スポーツの戦略

1. はじめに

今日，スポーツは非常に盛んになり，自身で楽しむ人も増えてきた．スポーツに関してのORも少しずつではあるが，学会誌に発表されるようになった．Operations Research に最初に現われたのは，1954年に，国防省のC. M. モットレイ[1]によるもので，彼は「スポーツのゲームに科学的方法を適用することの可能性はOR界の関心を集めていない」が「スポーツはORを“生きた”状況で教育するのにすぐれた機会を与える」と述べている．もっとも，彼の狙いは，スポーツ，たとえば米式フットボール，野球，バスケットボールなどは，軍事的戦闘状態をよくシミュレートしているので（彼によれば，これらはそれぞれ，陸軍の地上戦闘，艦隊の海戦，空中戦に類似しているという），これらで演習しておいて軍事研究に役立てようというのであった．今読んでみると，彼の立場と時代が反映されていて，大変興味深い．

今日までのところ，ORは広い範囲の“平和的”スポーツにも応用され，それらの最適戦略の研究，パーフォーマンスの評価等が研究されている．

ただし，これらのモデル一般について，スポーツは生身の人間により争われるので，ゲーム中に競技者の調子の波，疲労，相手の戦略への習熟，心理的要因のために，一般にはマルコフ過程，定常状態等の仮定は成立しないのであるが，あまり一般的モデルを考えると手に負えない代物となるため，とくに断りのない限り，これらの仮定がおかれているものと解釈していただきたい．さて以下に筆者の興味と研究の範囲でいくつかのスポーツにつき紹介を試みてみよう．

2. テニスの最適サーブ

最近，最も流行のスポーツである．ただし，なじみのない方でもここでは，テニスは各ポイントごとに2本のサーブがゆるされることが予備知識としてあれば十分である．

いま，Sをある選手のもつサーブの集合とし，特定の相手に対し，すべての$i \in S$に対して，

P_i：サーブiがサーブコートに入る確率(>0)

W_i：サーブiが“入った”場合にそのポイントをとれる確率(>0)

が与えられているものとする．

彼が第1サーブにi，第2サーブにjを選んだとすると彼がそのポイントをとれる確率Q_{ij}は，

$$Q_{ij}=P_iW_i+(1-P_i)P_jW_j \qquad (1)$$

さて，サーブiを，

もしW_iが大きければ，強いサーブ

もしP_iW_iが大きければ，確実なサーブとよぶことにすると，

〔定理1〕

第2サーブには最も確実なサーブを選ぶべきである．

証明．j^*を最も確実なサーブとする．これを

第2サーブに選ぶとそのポイントを勝つ確率は $P_{j^*}W_{j^*}$. j^* の定義から $P_{j^*}W_{j^*} \geqq P_iW_i \ \forall i \in S$ ゆえに j^* を選べば最もそのポイントがとりやすい† ||

〔定理2〕

第1サーブは，第2サーブより弱くてはならない.

証明. 第1サーブを i とし，$W_i < W_{j^*}$ とする

$$
\begin{aligned}
Q_{ij^*} - Q_{j^*j^*} &= \{P_iW_i + (1-P_i)P_{j^*}W_{j^*}\} \\
&\quad - \{P_{j^*}W_{j^*} - (1-P_{j^*})P_{j^*}W_{j^*}\} \\
&= (P_iW_i - P_{j^*}W_{j^*}) \\
&\quad + (P_{j^*} - P_i)P_{j^*}W_{j^*}
\end{aligned}
$$

$P_i > P_{j^*}$ なら，ただちに，$Q_{ij^*} - Q_{j^*j^*} < 0$

$P_i \geqq P_{j^*}$ なら，

$$
\begin{aligned}
Q_{ij^*} - Q_{j^*j^*} &\leqq (P_iW_i - P_{j^*}W_{j^*}) \\
&\quad + (P_{j^*} - P_i)W_{j^*} \\
&= P_i(W_i - W_{j^*}) < 0 \quad ||
\end{aligned}
$$

最適第1サーブを求めるにはつぎのチャートが便利であろう. 図でI，IIはそれぞれ $P(W-C) = K$, $PW = K$ の型の直角双曲線で S に“外側”から接するものである. このチャートから，より確実な第2サーブをもつことが，より強い第1サーブをもつことにつながることが容易に理解できる.

いま，サーブの重要さを，それをフォールトした場合のポイントを得る確率の減少で表わすと，

〔定理3〕

第2サーブのほうが，第1サーブより重要である.

証明. i^* を第1サーブとすると，

$$
\begin{aligned}
&(P_{j^*}W_{j^*}) - \{P_{i^*}W_{i^*} + (1-P_{i^*})P_{j^*}W_{j^*} \\
&\qquad - P_{j^*}W_{j^*}\} \\
&= P_{j^*}W_{j^*}(1+P_{i^*}) - P_{i^*}W_{i^*} \\
&\geqq P_{j^*}W_{j^*} - P_{i^*}W_{i^*} \geqq 0 \quad ||
\end{aligned}
$$

† 本当は，「より“有利な”状態のほうがより勝ちやすい」という議論がこれについで必要である. 驚くべきことには“相当に単純な”モデルにしないとこれは証明可能でない.

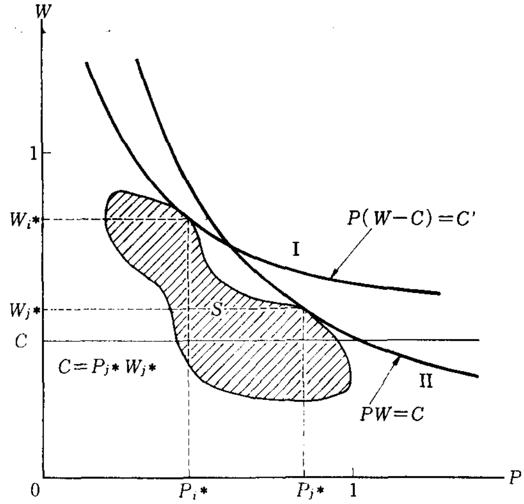

図1 最適サーブの求め方
I：最適第1サーブ
II：最適第2サーブ

P_i, W_i に関するデータは，現実のゲームから容易に推定することができる. 少し観測してみると，強い選手ほど，サービス側有利を裏づける P_i, W_i がえられる. サーブの練習において，このモデルを利用することで，各サーブの目標設定(P_i, W_i, P_iW_i など)が可能となり，サーブの重要性の実感がでてくる効果がある.

3. 球技

事象の動的なつながりを研究するのがORであるとしてみれば，スポーツとくに球技は，現実に比べて，おのおのの事象がきわめて判然と定義できるため，研究しやすい. もちろん，サッカーやアイスホッケーのようにゲーム全体がほとんど連続しており，定かにゲームの状態を区分しにくいものもあるが，これらは程度問題であり，ボール等の保持が明らかに攻撃側と守備側とを区別するし，レフェリー等のジャッジはゲームの状況を明示してくれる. まして米式フットボール，野球等ではゲームは1プレーごとに中断，または静止するので真に都合がよい. 先に述べたモットレイ[1]は，米式フットボールの2種類のランニングプレ

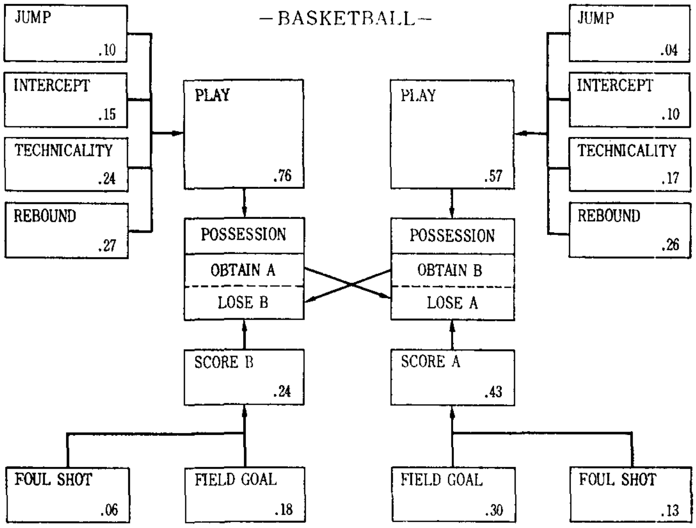

図 2 ボールを獲得または失う相対頻度

ーの統計をとり，平均値では良い結果を示す各プレーが，それらの確率分布曲線の偏りから，実際には平均値ほどは有効でないことを知り，陣型のたてなおしをはかった結果，その後の試合に連勝したことを報告している．

彼は同じくバスケットボールについて，どちらの側がボールを所持しているかで状態を二分し，図2に示すようにそれらの状態がどのような状況からもたらされたか，それらの相対的頻度を実際のゲームから記録した．たとえばチームAはボールの76%をフロアプレーから獲得する．そのフロアプレーの内訳は，ジャンプ10%，インターセプト15%，反則24%，リバウンド27%である．残りの24%は相手のシュートの成功に伴い獲得し，そのうちフィールドゴールは18%，フリースローは6%であることを示している．彼はこうしたデータをもとにして，種々の戦略を比較検討することが可能であるとしている．彼はこれ以上の解析，またはモデル構築はせず，ORの専門家にあとをまかせた形で打ち切っているが，たしかに，この線を拡充すればバスケットボールのモデルを作ることは可能である．たとえば図3は，Aがボールを保持した状態からの遷移を示すモデルで，これにBが保持した状態からの残りの半分をつけ加えれば，大まかではあるがバスケットボールのモデルとなる．たとえばこのモデルをもとにして，シュート，フリースロー，リバウンドの獲得等々の成功確率の上昇が与える効果を推定することが可能となる．

4. 野　球

他のスポーツに比べて最も文献も多く，モデル化も最も進んでいる．本特集では鳩山氏が別稿にて，野球の戦略面を詳報されているので，ここではこの分を割愛し，打者のパーフォーマンスの評価の方法について述べることにする．これは評価の方法自体の中に野球のモデル化が含まれており，ORの見地から大変興味深いことによる．従来，打率，打点，ホームランは打撃3部門として有名であるが，各々の特徴が際だっており，いまだ決め手となるような指標が存在していない．そこでいろいろな提案がなされてきた．ここで，

AB＝打数　　HR＝死球数

1B＝単打数　　SH＝犠牲バント(成功)数

2B＝2塁打数　　SF＝犠牲フライ(成功)数

3B＝3塁打数　　BFP＝AB＋BB＋HP＋SH＋SF

HR＝本塁打数　　SB＝盗塁数

H＝1B＋2B＋3B＋HR

とすると，

① 打率＝H/AB　　(BA)

② 長打率＝(1B＋2·2B＋3·3B＋4·HR)/AB　　(SA)

はよく用いられてきた指標であるが，E. Cook の提案の一つは，

③ DX＝[1B＋BB＋HP－2SH][TB＋SB]/BFP^2

ここで TB＝1B＋2·2B＋3·3B＋4·HR

なる指標である．これは大まかに言って打者が1

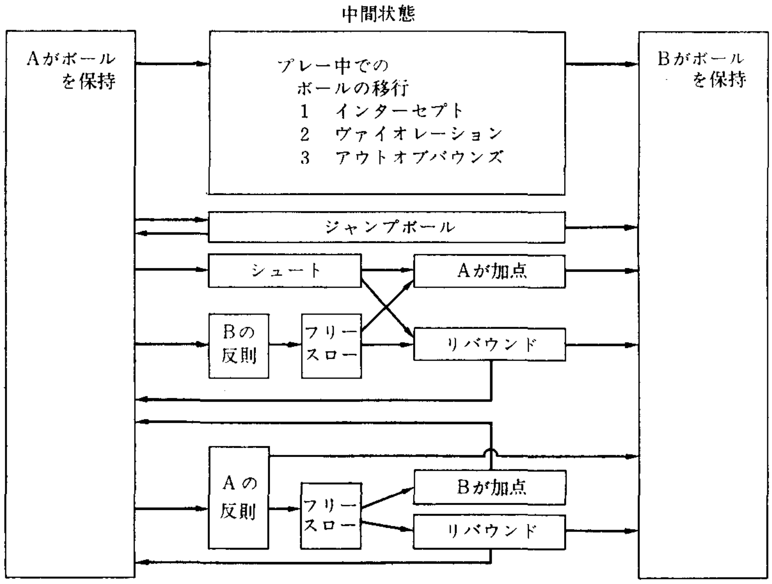

図 3 バスケットボールのモデル
Aがボールを保持している状態からの遷移

塁に達する確率に，1塁以上に達する確率を掛けたものである．−2SHなる項は，クックがどうやら犠牲バントは得点力を下げるものと考えていたらしく，大体バントが不成功のほうが成功した場合より，D(X)に大きい値を与えるのは不自然である．

リンゼイ[3]は，指標は，打撃による得点の期待値の上昇を示すべきものと考え

④ $(1B+2B+2.5\cdot 3B+4.5HR)/AB$

を提案しているが，これは，アウト数と各塁のランナーにより考えられる24種の状態のおのおのについて，まずその状態の起こる確率と，その状態からその回終了までに得る得点の期待値を実際のデータより推定しておく．つぎに各状態は次打者の安打(単打，2塁打……等)の種類によりどの状態に遷移するかを想定する．これらからその攻撃により，その回の期待値がどれほど増加したかが計算できる．以上を総合して（ある状態の起こる確率)×(ある安打が打たれる確率)×(それによる得点の期待値の変化）を各状態・各安打について加えれば，その人の打撃評価ができることになる．リンゼイはこれを実施し，各安打の単打に対する相対価値を調べることにより，概略④の式を得た．

ただしこれには四死球，盗塁が含まれていないためパンキン[4]はこれを補完し，

⑤ $$OPA_1=\frac{[1B+2\cdot 2B+2.5\cdot 3B+3.5HR+0.8(BB+HP)+0.5\cdot SB]}{AB+BB+HP}$$

を提案している．パンキンはこのOPA_1を少しモデファイして，⑤からHPを除いたもの(OPA_2)(昔の統計にはHPが含まれていない理由による)さらに⑤の分子から0.65(AB−H)を減じたもの

表 1 米大リーグ選手の各指標による生涯打撃成績

選手		OPA_3	OPA_2	BA	SA	OERA
ベーブ・ルース	(1914—35)	.333(1)	.677(1)	.342(12)	.690(1)	13.19 (2)
テッド・ウィリアムズ	(1939—60)	.301(2)	.639(2)	.344(8)	.634(2)	13.20 (1)
ルー・ゲーリッグ	(1923—39)	.269(3)	.630(3)	.340(16)	.632(3)	11.19 (3)
ジミー・フォックス	(1925—45)	.236(4)	.608(4)	.325(29)	.609(4)	10.14 (4)
ハンク・グリーンバーグ	(1930—47)	.221(5)	.604(5)	.313(60)	.605(5)	9.44 (5)
ロジャー・ホーンスビー	(1915—37)	.214(6)	.584(6)	.358(2)	.577(7)	* ( )
ミッキー・マントル	(1951—68)	.201(7)	.577(7)	.298(>135)	.557(12)	9.31 (6)
タイ・カッブ	(1905—28)	.188(8)	.559(13)	.367(1)	.513(32)	9.148 (7)
スタン・ミュージアル	(1941—63)	.187(9)	.567(10)	.331(24)	.559(9)	9.152 (8)
ジョー・ディマジオ	(1936—51)	.178(10)	.571(8)	.325(31)	.579(6)	8.66**(11)

[2]，[4]の表から合成したもの，( )内は各指標での順位
* ホーンスビーの値は欠落，** ディマジオは推定

(OPA_3) (④の計算では凡打は含まれていないが凡打は得点の期待値を減ずるのでこれを考慮したもの) 等を考えた.

この他にこれらとまったく異なる方法として, コーバー, ケイラーズ[2]の

⑥ 打撃の“自責点”方式 (自獲点とでもいうべきか)

の計算がある. これはチームメートの強弱による誤差をなくそうとする試みである. 特定の打者が常に打席に立ち, 9回まで攻撃したと想定したら何点得点するかを尺度とする. ④と同様ここでは凡打, 各安打, 四球に対し, 状態 (アウトとランナー) がどのように移るかを想定しておき, このもとで彼は毎打席同じ確率分布で攻撃を繰り返すシミュレーションを実施し, その結果, 平均毎試合何点得点したかをもって評価とするのである. このモデルでは各攻撃は確率的に(無作為に)出現してくるだけで, 戦略的に出現するような工夫がなされていないこと (途方もないときに犠打や盗塁が行なわれる可能性がある. この批判は④, ⑤にもあてはまる) 攻撃の種類がもう少し増えてもよいこと(死球, 犠打等)と加え, 改良の余地を残している. 最後に投手の評価についてであるが, パンキンは⑤の方式を投手に適用することで, 現行の自責点方式のもつ不備 (リリーフ投手は前の投手の残したランナーについてはまったく責任を負わされないことなど) を補足しうるとしている. OPA ではベーブ・ルースはタイ・カップ(生涯打率最高) をはるかに抑えて最強打者となったが, OERA ではテッド・ウィリアムスに僅差で抜かれた. 指標そのものも興味深いが, こうした“打撃争い”もさらに楽しい. 熱狂的ファンのいる日, 米では, まだまだ予想外の評価方法が提案される可能性が高い.

5. 棒高跳び

走り高跳びと同じく, この競技では自分の試みるバーの高さが次第に高くなっていくこと, 試技の数に伴い, 疲労の蓄積が激しく, 最良のパーフォーマンスが何回目でも同様に期待できるというわけにはいかない事情がある.

競技者の目的としては,

a スコア(自分がその競技会で跳んだ最高値) の期待値を最大化する

b ある値以上のスコアの期待値を最大にする

c i 位になる確率を最大にする

d ある高さをクリアする確率を最大にする

等ある. S.P. ラダニー[5]は50マイル競歩の世界記録保持者 (当時) でメキシコ・ミュンヘンのオリンピックにも参加した人物であるが, 彼によれば「大部分の競技者は a にもとづいて行動している. それは, 大部分の人はメダルのチャンスはなく, できるだけ高いスコアを出したいが, さりとて失敗してゼロにしたくない. このことから, 知らぬまに a の 行動基準を とっている.」としている. 棒高跳びのルールは,

1. バーの高さは順次上げられる (下がることはない)
2. 競技者はどの高さから跳び始めてもよい
3. パス (その高さの跳躍を放棄すること) はいつしてもよい
4. 3度連続して失敗すると失格
5. 最後にクリアした高さがスコアとなる

ラダニーは, このうち, パスはできないものとしバーは等間隔に上げられることをさらに仮定したモデルについて考えた. そこで彼はつぎの条件確率を提案した.

$p(h, j \mid n)$: すでに n 回跳躍した条件の下で, 高さ h を(j 回目試技として) クリアする確率

彼はこの (h, j, n) をステートにとったマルコフモデルを考え, スコアの期待値を最大化することを目的として, 競技者はどの高さから跳躍を開始すべきかを検討した. この最適化の計算は比較的容易であるが, 問題はいかにしてこの条件確率 $p(h, j \mid n)$ を求めるかである. これは当然ながら

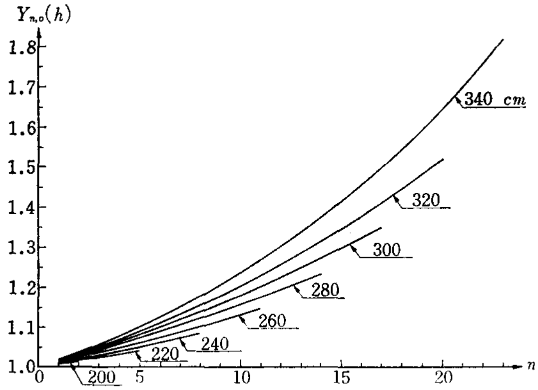

図 4 それまでに n 回跳んでいる場合と一度も跳んでない場合の失敗する確率の相対的増加割合

個々の競技者に特有の値である．簡略化のために $p(h, j|n) \equiv p(h|n)$，$j=1,2,3$ と考えても，これらの値の一つ一つを推定するのは実際問題不可能である．そこで彼はクラブの記録から各高さについて，x 回目までは連続成功し，$x+1$ 回目にその高さ h で初めて失敗した人の数 (ax)，つぎの試技にも失敗した人の数 (bx)，最後の試技にも失敗した人の数 (cx) を調べ，これをもとにして失敗する確率の相対的増加を推定した．すなわち $q(h|n)=1-p(h|n)$ とおけば，

$$q(h|x+2)/q(h|x+1)=(cx/bx)/(bx/ax) \quad (2)$$

で q の増加率を推定した．彼によれば，これらの推定値が得られれば，

$$\begin{aligned} q(h|n) &= \frac{q(h|n)}{q(h|n-1)} \cdot \frac{q(h|n-1)}{q(h|n-2)} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{q(h|1)}{q(h|0)} \\ &\quad \cdot q(h|0) \qquad (3) \\ &= y_{n,n-1}(h) \cdot y_{n-1,n-2}(h) \cdots\cdots y_{1,0}(h) \\ &\quad \cdot q(h|0) \\ &= y_{n,0}(h) \cdot q(h|0) \end{aligned}$$

が計算可能となる．したがって $q(h|0)$ を知れば，その人の $q(h|n)$ すなわち $p(h|n)$ はすべて計算できることになる．

彼の推定は，筆者からすればアイデアとしては理解できるが，よほどクラブのデータが豊富で充実していないと困難である．また(3)の右辺の各項は当然異なるレベルの競技者たちからの推定値と考えられるが，それらを用いて特定の競技者についての推定をしてもよいものかどうか，また，$q(h|0)$ の推定だけでも大変である．なにしろ1日にいくつも実験をゆるすわけにはいかないからである．しかし，実際に利用してみれば，案外実用上はこうしたモデルで彼の意図するクラスの競技者の大まかな戦略の把握は可能なのかも知れない．恐らくこのモデルでも「最適開始高さは自分の期待スコアの高さの5段階手前ほどである」という原則が証明できるのかも知れない．図4と表2はそれぞれ $y_{n,0}(h)$ のグラフとある競技者についての最適開始高さの計算例である．

表 2 最適開始高さの計算例

開始高さ (cm)	スコアの期待値
340	155.9884
320	209.7872
300	274.9418
280	301.2548
260	304.4709
240*	304.6999(最大)
220	303.1892
200	302.1677

終りに，彼のモデルではパスはゆるされなかったが，もしこれをゆるした場合でも，$p(h|n)$ の推定に関しては事態は同じである．モデルはやや複雑になるが容易に組み立てることができる．また異なる目的に対して組み立てることも同様に可能である．

6. ゴルフ

これもきわめて競技人口の多いスポーツである．この小文を読まれる諸兄においては，ここで取り上げたいくつかのスポーツの中で，ゴルフはDo-スポーツとして最もエンジョイされているものではなかろうか．ゴルフがかくも多くの人々の人気を得ている理由の一つは，ハンディキャップ(ハンディという)がプレーヤーの間に完全に滲透しているからである．これによって種々の技倆の人々の間での競技が可能となっている．したがってゴルファーにとっては“公正に”ハンディを決

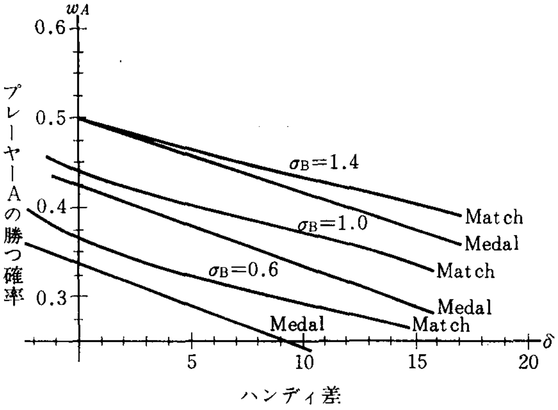

図 5　$\sigma_A=1.4$ のときの W_A と δ の関係　$\alpha=0.85$

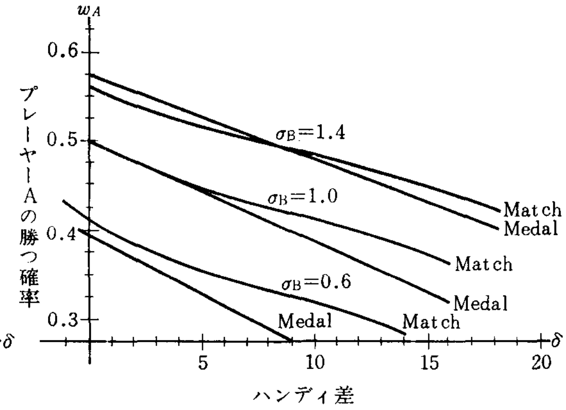

図 6　$\sigma_A=1.0$ のときの W_A と δ の関係　$\alpha=0.85$

めることが，きわめて大事となる．USGA の定めるハンディの計算法は“その人の最近20回のスコアのうち（グロスーパー）のベスト10を平均しこれに係数 α を乗じたもの”と決められている．α は1976年の改訂以前は0.85であった．

S.M. ポーラック[6]は「現在のハンディの計算法の“公正さ”を研究するための解析モデルを提案したが，種々の単純化にもかかわらず，ある具体的組合せについてハンディと勝つ確率との関係が概略理解できた」としている．彼は上の問題をメダルプレー（18ホール全部のストローク数で競う）とマッチプレー（各ホールごとに勝敗を競う）について研究し弱いプレーヤーにとってはどちらのプレーを選ぶべきなのかを考察した．

例によってモデルのための仮定として，

1. 各プレーヤーは各18ホールに要するストローク数のみで表現する．
2. この分布はステーショナリーである．
3. ホールごとのスコアは互いに独立である．
4. 一つのホールにおける各プレーヤーのスコアは独立である．（一番弱い仮定：とくにマッチプレー）

を考えた．

彼はこの他に，各ホールはみな同等である，各ホールを攻めるのに必要なストローク数は正規分布に従う等の“実用的”な仮定を置いて，近似解を求めた結果は図5，図6に示すとおりである．

ここで σ_A, σ_B はそれぞれ，プレーヤーA（弱いプレーヤー；グロスの平均が大）とプレーヤーB（強いプレーヤー）のストローク数の分散とする．

さて，このグラフから，プレーヤーA（弱いプレーヤー）としては選ぶとすればメダルプレー，マッチプレーのどちらを選ぶべきかがすぐ考察できる．これをまとめると，

1. Aのプレーのバラツキが大，または普通程度でBのプレーがAよりバラついていない限り，Aはマッチプレーを選ぶほうがまだましである．
2. Aのプレーが着実で，Bのプレーのバラツキが大のとき，あるハンディ差以内（$\sigma_A=1.0$　$\sigma_B=1.4$ のとき $\delta\doteqdot 8$）なら，両プレーとも $W_A>1/2$ となり，この場合はAはメダルプレー！を選ぶほうがよい．

さて，しかしながら一般には，強いプレーヤーはバラツキも少ないので，弱いプレーヤーは常に不利なプレーをすることになることはこれらの図からも明らかである．これの原因は，ハンディの計算方法にある．“係数α”と“最近20回の……ベスト10……”の２点からである．F.シェイド[7]は，プリマスカントリークラブの50人の各20ラウンドの結果を集め，これからデータを組み合わせて両プレーのシミュレーションを行なった．その結果ハンディの計算方法が弱いプレーヤーにあまりにも不利であることを発見した．USGA では，

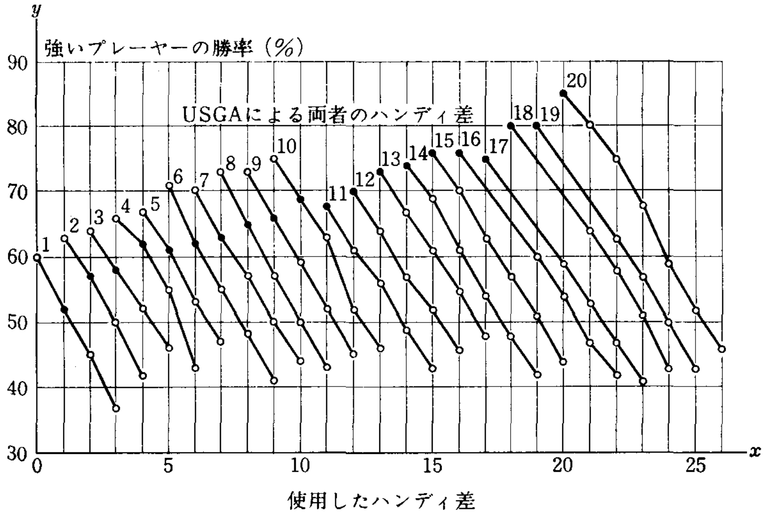

図 7 ハンディ差 x と強いプレーヤーの勝率 y のグラフ
黒丸は $\alpha=0.85$ で得られた両者のハンディ差 (USGA による)

これに基づき1976年より α を従来の0.85から0.96に改訂した. 図7はハンディ差 (x) と強者の勝率 (y) のグラフを示している. これより x と y との関係は i を USGA 式のハンディ差 ($\alpha=0.85$) とすると,

$$y=50-6.95(X-1.27i)+0.3(X-1.27i)^3$$

と推定できるので,

$$X=1.27\,i \text{ のとき } y=50(\%) \text{ となる.}$$

これをそのまま受け入れると $\alpha=0.96$ に改訂された現行のハンディ差でも, さらに12%ハンディ差をひろげなければ公正にはならないのだが, それでも弱いプレーヤーにとっては大きな福音というべきであり, 完全な公正さというものはどの世界でもなかなか達せられないものなのである.

7. 探検隊 (ジープ問題)

最後に少し変わったスポーツを紹介したい. これは広い砂漠を横断しようとする探検家の話である[†]. いまこの探検家には1台の小さいジープがあるだけで, たとえ, これにガソリンを満載してスタートしたところで砂漠は広すぎて, これだけの燃料では横断できないものとしよう. 砂漠にはオアシスはあってもガソリンスタンドまでは営業しているはずはないので, 彼としては積んできたガソリンを一部デポし, スタート地点にもどって給

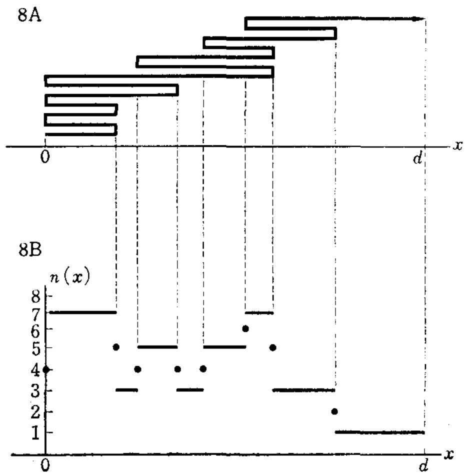

図 8 ジープの動きと $n(x)$ の例

† ジープ問題の名で, ここ30年以上も N. Fine, C. Phipps, G. Alway, O. Helmer, R. Bellman, J. Franklin, D. Gale らの "Jeepologist" の関心を集めている.

油し再び砂漠に向かうということを繰り返さなければならない．さて，ジープ満載のガソリンの量を1単位の燃料とよぶことにし，この1単位の燃料で走れる距離を1と考えると，問題は“燃料 f で横断できる最大広さ(距離) $d(=d(f))$ はどれほどか”†であり，これより始めて種々の変形問題を考えることができる．整理してみると，横断問題，往復問題，砂漠の両端に燃料源のある往復問題，複数ジープ問題，貨物を運ぶ問題等あり，この他にもベルマンの著書[9]には多くのケースがあげられている．つぎに述べるのはD.ゲール[8]による，きわめてエレガントな解答である．

横断問題 ($d(f)$を求める問題)

ジープのスタート点を原点とし，ジープは x 軸上を動くとしよう．図8Aは，ジープの動きの一例である．ここで点 x 上をジープが通過する回数を $n(x)$ で表わすことにしよう．図8Bは $n(x)$ の例である(図8Aのジープの動きに対応する)．ここで $n(x)$ はジープの動き方によっては無限の値をとることも可能ではあるが，簡便のために，ジープは“普通”の動き方，すなわち，有限回しか方向転換をしないものと仮定し，(“普通”でない動きのできるジープは，まったく世にももの凄いジープである．)したがって $n(x)$ はつねに有限と考える．さて燃料と距離の定義からジープの動線の長さ1単位あたり1単位の燃料が消費されることになる．それゆえ，

ジープの動線の総延長＝燃料の総消費量

$$=\int_0^d n(x)dx$$

ここで，

$$X_k=\{x\mid n(x)=k\} \qquad (4)$$

と定義する．X_k はディスジョイントな区間のユニオンの形をしている．すると，

$$\int_0^d n(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}k(X_k\text{の長さ}) \qquad (5)$$

† オリジナルな問題は，ある距離を横断するのに必要な燃料の最小化問題であった．

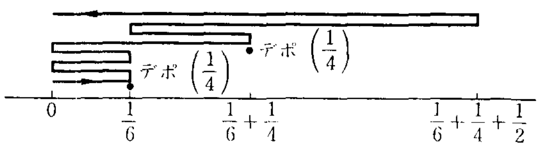

図 9 $f=3$ のときの往復問題の解

(この式の左辺はリーマン積分であるのに対し右辺はルベーグ積分である！)

いま x_k(k：整数)を，その点の右側での動線の総延長が k である点とする．

〔補助定理〕

$x<x_k$ ならば $n(x)\geqq 2k+1$

〔証明〕

x_k の定義から，ジープは点 x 上を，最低 $k+1$ 回は左から右に横断しなければならない．ゆえに x 上を最低 $2k+1$ 回は通過しなければならない．||

$$\therefore\ 1=\int_{x_{k+1}}^{x_k}n(x)dx\geqq(2k+1)(x_k-x_{k+1})$$

$$\therefore\quad x_k-x_{k+1}\leqq\frac{1}{2k+1}$$

ここで f が整数の場合は，

$$\therefore\quad \sum_{k=0} x_k-x_{k+1}=x_0-x_f=d\leqq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2f-1}$$

これで $d(f)$ の上限が与えられたが，実はこの上限が $d(f)$ であることを帰納法で証明する．

$f=1$ のときは明らかに正しい．

$f\leqq k$ のとき正しいとする．

いま $k+1$ 単位の燃料が原点にあるとすると，$\frac{1}{2k+1}$ 地点まで $k+1$ 回の運行をする．各回燃料を満載して出発し，$\frac{1}{2k+1}$ 地点に $\frac{2k-1}{2k+1}$ デポして原点にひきかえす．こうすると $k+1$ 回目に $\frac{1}{2k+1}$ 地点に着いたときは合計 k の燃料が運ばれたことになる．この地点からは帰納法の仮説で成立する．||

以上より，$d(f)=1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2f-1}$ (6)

f が整数でないときは同様にして，

$$d(f)=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2[f]-1}+\frac{\{f\}}{2[f]+1} \qquad (7)$$

ここで$[f]$，$\{f\}$はそれぞれfの整数部分，小数部分である.||

ゲールのこの議論がすぐれているのは形式のスマートさもさることながら，しかもきわめて応用が広い．読者諸兄は往復問題の解がつぎの式になることをお確めいただきたい．$d_r(f)$をfによって往復できる最大距離とすると，

$$d_r(f)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2[f]}+\frac{\{f\}}{2[f]+2} \tag{8}$$

$d_r(f)$の式が$d(f)$に比べ各項の分母が1ずつ大きいのは復路用の動線が1本増えるからであり，この分は往路における各デポ地点に復路用として残されると理解される．(図9に一例を示す.)

最後に両端より燃料が得られる場合の往復問題はどう解けるであろうか．紙面の都合で解のみを示すと，筆者の研究によれば，合計f単位の燃料を用いる場合の最大距離を$d^r(f)$とすると，

$$d^r(f)=d_r(f-f_1)-d_r(f_1)+d(f_1) \tag{9}$$

ただしf_1は，

$$2f_1^2-1\leqq f\leqq 2(f_1+1)^2-1 \tag{10}$$

を満たす整数である．ここでf_1は最適解を達成するために，砂漠の他端で入手すべき燃料の量である.

貨物を運ぶ問題は解釈の仕方で異なる問題になる．たとえば，

1. 燃料の積載量は同じだが，走行燃料の消費率が増す.
2. 燃料の消費率は同じだが，積載量が減少する.

などのモデルを考えることが可能である．これにも，ゲール型の議論が可能で解を見つけるのは容易である．1，2の両方の要素を考えることにより，登山のモデルを作ることができるであろう．こういうわけで，つぎからつぎへまだまだしばらくは楽しめそうである.

8. おわりに

以上いろいろなスポーツについて書いてきたが，紙面の都合で割愛したものには，最適のリレーメンバーの決定，テニスにおける最重要ポイント，重量挙げの最適戦略等々がある．人気あるスポーツは落とすまいとしたため紹介した内容も実証的なものや論理的なもの，戦略論や評価論，現実的なものから空想的なもの，まことに雑多な寄せ集めになってしまった．読者諸兄におかれてはいささかの興味を誘われ，お楽しみいただけたであろうか．読了を感謝いたします.

参考文献

[1] C. M. Motteley, "The Application of Operations Research Methods to Athletic Games", *Opns. Res.* **2**, 335-338(1954)

[2] T. M. Covers, C. W. Keilers, "An Offensive Earned-Run Average for Baseball," *Opns. Res.* **25**, 729-740(1977)

[3] G. R. Lindsey, "An Investigation of Strategies in Baseball," *Opns. Res.* **11**, 477-501 (1963)

[4] M. D. Pankin, "Evaluating Offensive performance in Baseball," *Opns. Res.* **26**, 610-619(1978)

[5] S. P. Ladany, "Optimal Starting Height for Pole-Vaulting," *Opns. Res.* **23**, 968-978(1975)

[6] S. M. Pollock, "A Model of the USGA Handicap System And "Fairness" of Medal And Match Play," *Opns. Res.* **22**, 1040-1050 (1974)

[7] F. J. Scheid, "A Least Squares Family of Cubic Curves With An Application to Golf Handicapping," *SIAM J. Appl. Math.* **22**, 77-83(1972)

[8] David Gale, "The Jeep Once More OR Jeeper By the Dozen," *Amer. Math. Monthly.* **77**, 493-501(1970)

[9] R. Bellman, "Dynamic Programming," Princeton University Press, p. 103(1955)

(ますだ・しんじ　東京工業大学　経営工学科)