竹内 啓・藤野和建

“強さ”をはかる

1. Bradly-Terry のモデル

2人，あるいは2つのチームが勝ち負けを争う競技を考えよう．最初引き分けはない場合を想定する．いまN人あるいはNチームが互いに何回か勝負したとき，その結果から各人の「強さ」をはかる問題を考えよう．

いまi（の人，あるいはチーム）がjに勝つ確率をp_{ij}, $i, j=1, \cdots, N$と表わすことにしよう．いま引き分けはないものとしたから，

$$p_{ij}+p_{ji}=1$$

となる．

「強さ」をはかることを考える前に，まず「強さ」というものが一義的に定められる条件を定めなければならない．「強さ」が一義的に定められない場合として，たとえば3つのチームの間に，

$$p_{ij}>\frac{1}{2}>p_{ji},\ p_{jk}>\frac{1}{2}>p_{kj},\ p_{ki}>\frac{1}{2}>p_{ik}$$

という関係が存在するような場合を想定することができる．この場合iはjより強く，jはkより強く，kはiより強いことになるから，i, j, kの間に強さの順序がつけられないことになる．

「強さ」というものが一義的に定められるためには，実は単に上記のような不等式が成立してはならないというだけでなく，より厳密な関係が成り立たねばならない．そのための条件としてふつう考えられているのは，つぎのような形の関係とする．すなわちそれぞれの競技者あるいはチームに対応して，N個の量$\pi_1, \cdots, \pi_N$が存在して，すべての組合せi, jに対して，

$$p_{ij}=\pi_i/(\pi_i+\pi_j) \tag{1}$$

となることである．このような関係式をBradley-Terryモデルという．（以下では簡単にBTモデルとよぼう）π_iはiの「強さ」を表わすと考えられる．

BTモデルをみちびくには，いろいろな考え方があるが，一つの考え方はつぎのようなものである．いまiとjが「勝負」を決めるのに，直接試合をせず，それぞれがkと試合して決めることにする．そうしてiがkに勝ち，kがjに勝ったならばiはjに「勝ち」，iがkに負け，kがjに勝てば，jはiに「勝ち」，i, jがともにkに勝つか，ともに負けるかした場合にはiとjとは「引き分け」とし，同じことを「勝負」がつくまで続けるとする．そうするとiがjに「勝ち」とされる確率と，jがiに「勝ち」とされる確率の比は$p_{ik}p_{kj}:p_{ki}p_{jk}$であるから，結局，$i$が$j$に「勝ち」とされる確率は$p_{ik}p_{kj}/(p_{ik}p_{kj}+p_{ki}p_{jk})$となる．いま$i, j, k$の間に，「苦手」がないということは，このように$k$を介して，$i, j$の「勝負」を決めたとき，$i$が$j$に「勝ち」とされる確率が$i$と$j$とが直接試合をして$i$が$j$に勝つ確率に等しいことを意味すると考えよう．そうすると，

$$p_{ij}=p_{ik}p_{kj}/(p_{ik}p_{kj}+p_{ki}p_{jk})$$

あるいは，$p_{ij}/p_{ji}=p_{ik}p_{kj}/p_{ki}p_{jk}$ (2)

という関係が成り立たなければならないことにな

る．

いますべての i, j, k について上記の関係が成り立つならば，k を固定して，

$$\pi_i = p_{ik}/p_{ki} \quad (i \neq k)$$

$$\pi_k = 1$$

とおく．(2)より，

$$p_{ij}/p_{ji} = \pi_i/\pi_j$$

となり，結局(1)が得られるのである．

(2)はつぎのようにも表わされる．

$$p_{ij}p_{jk}p_{ki} = p_{ji}p_{kj}p_{ik} \tag{3}$$

すなわち $i \to j$, $j \to k$, $k \to i$ という形で「3すくみ」になる確率と，逆向きに $j \to i$, $k \to j$, $i \to k$ という形で「3すくみ」が起こる確率が等しいということになる．もし本当に「3すくみ」的状況があれば，この2つの確率のうちいずれか一方が大になるであろうから，(3)が成り立つということは，そういう関係がないことを意味すると考えられる．

2. 「強さ」の推定

そこでいま N チーム(あるいは N 人)のあいだで何回か試合が行なわれたとき，その結果からそれぞれの「強さ」を推定する問題を考えよう．いま i, j の間には n_{ij} 試合行なわれ，そのうち i が j に勝った回数が X_{ij} であるとしよう．引き分けはないと仮定したから，

$$X_{ij} + X_{ji} = n_{ij}$$

となる．そうしてすべての $X_{ij}(i<j)$ は互いに独立に2項分布 $B(n_{ij},\ p_{ij})$ にしたがう．それゆえ同時確率は，

$$\Pr\{X_{ij}=x_{ij},\ i,\ j=1,\cdots,N\} = p(\underset{\sim}{x})$$
$$= \prod_{i<j}\left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!\,x_{ji}!}\,p_{ij}^{x_{ij}}p_{ji}^{x_{ji}}\right) \tag{4}$$

という形にされる．

いまBTモデル(2)が成り立つとすると，

$$p(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i<j}\left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!\,x_{ji}!}\cdot\frac{\pi_i^{x_{ij}}\pi_j^{x_{ji}}}{(\pi_i+\pi_j)^{n_{ij}}}\right)$$
$$= \prod_{i<j}\left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!\,x_{ji}!}\cdot\frac{1}{(\pi_i+\pi_j)^{n_{ij}}}\right)\prod \pi_i^{t_i} \tag{5}$$

ただし，$t_i = \sum_{j\neq i} x_{ij}$

と表わされる．すなわち尤度はこの場合，それぞれの総勝数 $T_i = \sum_{j\neq i} X_{ij}$ だけの関数として表わされることになる．いいかえればBTモデルのもとでは$(T_1, \cdots, T_N)$が十分統計量になる．逆に T_i, $i=1,\cdots,N$ が十分統計量になるのは，BTモデルの場合に限ることも証明できる．つまりこの場合には「強さ」を求めるには，それぞれの組合せの試合数 n_{ij} のほかには，それぞれの総勝数だけを知ればよいということになる．

仮定(5)のもとで「強さ」π_i を推定するには，最尤法を用いることができる．ところで実際 p_{ij} は π_i の比だけで決まるから，π_i の値を一義的に定めるには，それを何らかの形で基準化しなければならない．そのための式として，

$$\sum \pi_i = N \tag{6}$$

を仮定する．そうすると最尤解は，λ をラグランジュ乗数として，

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i}(\log p - \lambda \sum \pi_i) = 0 \text{ より，}$$

$$T_i/\hat{\pi}_i - \sum_{j\neq i} n_{ij}/(\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j) - \lambda = 0 \tag{7}$$

$$\sum \hat{\pi}_i = N \tag{8}$$

の解として求められる．ところで(7)より，

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j} \tag{9}$$

とおけば

$$T_i = \sum_{j\neq i} n_{ij}\hat{p}_{ij} + \lambda\hat{\pi}_i$$

となる．これをすべての i について加えれば，

$$\sum T_i = \sum_{i<j}\sum n_{ij} = \sum_{i<j}\sum n_{ij}(\hat{p}_{ij}+\hat{p}_{ji}) + \lambda\sum_i \hat{\pi}_i$$
$$= \sum_{i<j}\sum n_{ij} + \lambda N$$

となるから，$\lambda=0$．ゆえに，

$$T_i = \sum_{j\neq i} n_{ij}\hat{p}_{ij} \tag{10}$$

となる．$\hat{\pi}_{ij}$ は連立方程式(8)，(9)，(10)から定められる．実際にはつぎのようなくり返し計算によって求めることができる．いま $\hat{\pi}_1^0, \cdots, \hat{\pi}_N^0$ を一つの近似値とする．そうして

$$r_i^0 = \sum_{j\neq i} n_{ij}/(\hat{\pi}_i^0+\hat{\pi}_j^0)$$

とおき，

$$\hat{\hat{\pi}}_i{}^1 = T_i / r_i{}^0$$

$$\hat{\pi}_i{}^1 = N\hat{\hat{\pi}}_i{}^1 / \sum_i \hat{\hat{\pi}}_i{}^1 \quad i=1,\cdots,N$$

として，新たな近似値 $\hat{\pi}_i{}^1$ を求め，収束するまでくり返し計算を行なえばよい．

最尤解についてつぎのことに注意しておこう．すなわちすべての組合せが同じ回数ずつ行なわれる $(n_{ij} \equiv n)$．「リーグ戦」形式の場合には，

$$T_i = n \sum_{j \neq i} \hat{p}_{ij}$$

となるから「強さ」の推定値 $\hat{\pi}_i$ は勝数 T_i，あるいは同じことであるが「勝率」$T_i/n(N-1)$ と同じ順番になる．したがってこの場合には勝数で順位を定めるのは合理的である．

これに対して n_{ij} が一定でないときは，「強さ」π_i の順位は必ずしも勝数の順位と一致しない．このことは当然であって，強いチームと多く試合しなければならなかったチームが，勝ち数が多くなくても，必ずしも「弱い」ことにはならないはずである．しかしながら，この場合でも，どの相手に勝って，どの相手に負けたかは問題にする必要がなく，それぞれの相手との試合数のほかは総勝数だけで「強さ」が求められることになる．だから「番狂わせ」や「金星」は考慮する必要がない．それはもし勝数が一定ならば「強い」相手に勝ったということは，他方では「弱い」相手に負けたことを意味するので，当のチームが強いことにならないからである．

3. 「勝ち点」方式の欠点

上記のような考え方によると，順位を決めるのに勝ち数以外によるのは適当でないということになる．たとえば東京6大学野球では，すべてのチームが3回戦を行なって，2回勝ったほうが「勝ち点」を得ることになっている．そうして勝ち点によって順位が決定される．このルールによれば勝率が悪くても「優勝」することがあり得る．実際に3回戦のうち一方が2回続けて勝てば第3試合目は行なわれないから「勝ち点」と勝数は比例することになるが，試合数はチームによってまちまちになる．そこでこのような「勝ち点」によって順位を決めるのは適当であろうかという問題が生ずる．

この場合にもBTモデルを仮定すれば，試合数 n_{ij} 自体が今度は最初の試合の如何によって変わる確率変数となるが，それでも尤度関数はやはり，

$$L \propto \prod_{i<j} \frac{\pi_i{}^{x_{ij}} \pi_j{}^{x_{ji}}}{(\pi_i + \pi_j)}$$

という形になることが示される．したがって π_i の最尤解は先の場合とまったく同じようにして求めることができる．

そこでいま極端な場合として，ある期のリーグ戦の成績がつぎのようになったとしよう．

負チーム ＼ 勝チーム	K	T	W	M	R	H	勝数	勝点
K	*	2	2	2	2	2	10	5
T	1	*	2	2	2	2	9	4
W	1	0	*	2	2	2	7	3
M	1	0	0	*	2	2	5	2
R	1	0	0	0	*	2	3	1
H	1	0	0	0	0	*	1	0
負　数	5	2	4	6	8	10		

そうすると，この期の「優勝」チームは勝ち点5のK大学ということになる．しかしここで本当にK大学が一番強いといってよいであろうか．実際勝率を計算すると，つぎのようになってK大学よりT大学のほうがより強そうに思われる．

	K	T	W	M	R	H
勝　率	.667	.818	.636	.455	.273	.091

そこで，BTモデルを想定し，前節で述べた方法に従ってそれぞれの「強さ」を推定すると，つぎのような値が得られる．

	K	T	W	M	R	H
$\hat{\pi}$	1.240	2.813	1.156	0.514	0.212	0.065

すなわち，T大学は確かにK大学より強く，K大学は実は第3位のW大学と強さがほとんど変わ

らないということになる.

もちろんこのような極端な場合は現実にはほとんど起こらないし，また2チームの間の勝敗の確率が一定であるという仮定や，BTモデルの妥当性についても，実際に成り立つとは限らないから「勝ち点」による順位づけが誤りであるといい切ってしまうことはできない．しかしながらそれに対して疑問を呈する十分な根拠はあるといってよいであろう.

4. モデルの検定

ところで実際にデータが与えられたときに，それからBTモデルが成立するか否かをチェックすることができる．それには p_{ij} の間に(1)の関係が成立するかどうかを検定すればよい．そのために尤度比検定を適用することができる．すなわち仮説(1)のもとでの対数尤度の最大値は，

$$\begin{aligned}\log L_0 &= \sum_i \sum_j X_{ij} \log \hat{p}_{ij} + \text{const}\\ &= \sum_i \sum_j X_{ij} \log \hat{\pi}_i - \sum_i \sum_j X_{ij} \log(\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_j)\\ &= \sum_i T_i \log \hat{\pi}_i - \sum_{i<j}\sum n_{ij} \log(\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_j) \qquad (11)\end{aligned}$$

となる.

他方 p_{ij} について何も制限しない場合には，その最尤推定量は $\hat{p}_{ij}=X_{ij}/n_{ij}$ となるから，尤度の対数の最大値は，

$$\log L^* = \sum_i \sum_j x_{ij} \log x_{ij} - \sum_{i<j}\sum n_{ij} \log n_{ij}$$

となる．そうして n_{ij} がすべて大きければ，仮説が正しいとき，尤度比統計量

$$-2\log\lambda = 2(\log L^* - \log L_0) \qquad (12)$$

はほぼ自由度 $N(N-1)/2-(N-1)=(N-1)(N-2)/2$ の χ^2 分布に従う．したがってこれを用いて「強さが一義的に定まる」ということを表わす仮説(1)を検定することができる.

また特定の3チーム，i, j, k の間についてだけBTモデルの前提，すなわち(2)が成り立っているかどうかを検定することもできる．いま i, j, k を1，2，3とし，

$$T_1 = X_{12}+X_{13} \quad T_2 = X_{21}+X_{23} \quad T_3 = X_{31}+X_{32}$$

と表わす．このとき仮説は，

$$p_{12}p_{23}p_{31}/p_{21}p_{32}p_{13} = 1 \qquad (13)$$

と表わすことができる.

ところで仮説のもとで X_{ij} の同時確率は，

$$p(\underset{\sim}{x}) = \frac{n_{12}!\,n_{23}!\,n_{13}!}{x_{12}!\,x_{21}!\,x_{23}!\,x_{32}!\,x_{13}!\,x_{31}!} \times \frac{\pi_1^{t_1}\pi_2^{t_2}\pi_3^{t_3}}{(\pi_1+\pi_2)^{n_{12}}(\pi_2+\pi_3)^{n_{23}}(\pi_2+\pi_3)^{n_{13}}}$$

となるから，$T_1=t_1$, $T_2=t_2$, $T_3=t_3$ が与えられたとき X_{12} が与えられれば，残りの値はすべて定まり，またその条件付確率は，

$$\begin{aligned}&\Pr\{X_{12}=x \mid T_1=t_1, T_2=t_2, T_3=t_3\}\\ &=C/[x!(n_{12}-x)!(t_1-x)!(t_2-n_{12}+x)!\times\\ &\qquad (n_{13}-t_1+x)!(n_{23}+n_{12}-t_2-x)!] \qquad (14)\end{aligned}$$

と表わされる．ただし定数 C は(14)式の右辺の和が1になるように定める.

(14)のような形に表わされる分布は一般超幾何分布とよばれる.

そこで，3チームの間に，仮説(13)が成り立っているかどうかを検定するには，T_1, T_2, T_3 を与えられたものとして，X_{12} の値を(14)の形の分布を用いて検定すればよい.

たとえば，A，B，C 3チームの間で互いに10試合ずつを行なって，つぎのような結果になったとしよう．このとき強さの順位はA＞B＞Cであるとしてよいように思われる.

勝＼負	A	B	C	勝数
A	＼	9	5	14
B	1	＼	8	9
C	5	2	＼	7
負数	6	11	13	

しかしよく見ると，AはBに9勝1敗であるのにCには5敗している．このことはAはBを「カモ」にしているのに対して，Cは比較的「苦手」であるように思われる．このような印象をチェックするために仮説(13)を検定しよう

いま $T_1=14$, $T_2=9$, $T_3=7$ を与えられたものとして，AがBに勝つ回数 X の条件付分布を考える．$X=x$ のとき，それぞれの勝敗はつぎのよ

うになる．

＼	A	B	C	勝
A	＼	x	$14-x$	14
B	$10-x$	＼	$x-1$	9
C	$x-4$	$11-x$	＼	7
負	6	11	13	

したがって X の動き得る範囲は $4\leqq X\leqq 10$ であって，その条件付分布はつぎのようになる．

$$\Pr\{X=x|T_1=14,\ T_2=9,\ T_3=7\}=p(x)$$
$$=C/[x!(14-x)!(10-x)!(11-x)!\times(x-1)!(x-4)!]\qquad 4\leqq x\leqq 10 \tag{15}$$

この確率を厳密に計算するにはつぎのようにすればよい．(15)より，

$$p(x+1)/p(x)=(10-x)(11-x)(14-x)/x(x+1)(x-3)$$

という関係を得るから，

$p(5)=21p(4)$　$p(6)=9/2\times p(5)=94.5p(4)$

$p(7)=120p(4)$　$p(8)=45p(4)$

$p(9)=4.5p(4)$　$p(10)=0.08333p(4)$

全確率が1になるように $p(4)$ を定めて，すべての値を求めると，確率分布がつぎのように与えられる．

x	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	.0035	.0734	.3303	.4195	.1573	.0157	.0003

そこでこの条件は分布について，

$$\Pr\{X\geqq 9|T_1=14,\ T_2=9,\ T_3=7\}=.016$$

となる．したがって仮説のもとで X が9以上になる確率は1.6％であり，仮説は水準5％で（両側確率を考えるとしても）棄てられる．いいかえればAにとってCが「苦手」であるという印象は根拠があるといってよい．

n が大きいときには，つぎのような近似ができる．(14)の形の超幾何分布を，

$$\Pr\{X=x\}=\frac{C}{x!(a_1-x)!(a_2-x)!(a_3-x)!(b_1+x)!(b_2+x)!}\qquad x\geqq 0$$

$$a_1>0\quad a_2>0\quad a_3>0\quad b_1\geqq 0\quad b_2\geqq 0$$

と表わすとき，a_1, a_2, a_3 が大きければ，

$$\Pr\{X\geqq x\}\fallingdotseq\int_u^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

$$u=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\frac{1}{a_3-x}+\frac{1}{b_1+x}+\frac{1}{b_2+x}\right)^{-1/2}$$
$$\times\log\left[\frac{(x-\frac{1}{2})(b_1+x-\frac{1}{2})(b_2+x-\frac{1}{2})}{(a_1-x+\frac{1}{2})(a_2-x+\frac{1}{2})(a_3-x+\frac{1}{2})}\right] \tag{16}$$

という関係が成り立つことが示されている．

近似式(16)は，b_1, b_2 が負で $x\geqq\max(-b_1,-b_2)$ の範囲を動くときも成立することはすぐわかる．

ここで上記の場合について計算すると，

$$u=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}$$
$$\times\log\frac{8.5\times 7.5\times 4.5}{5.5\times 1.5\times 2.5}=1.8012$$

$$\int_u^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=.035$$

となる．この場合まだ近似はあまりよくないが，n がもっと大きくなれば，一般に満足すべき近似が得られる．

5. 大相撲の例

以上のことを前提にして実例をあげよう．

大相撲で昨年6場所を通じて幕内に在位した力士は全部で29名である．これらの力士相互間の対戦成績にもとづいて――それ以外の力士との勝敗は考えずに――各力士の強さ π_i を上述の方法で最尤推定すると，その結果は表1のようになる．なお，π_i は平均が50になるように計算されている．ごひいきの力士の強さはどれくらいだろうか．

この表から，たとえば，北の湖をはじめとする3横綱の強さは圧倒的であり，強さが平均をこえるのは，ほかには三重海しかいないことや，玉富

表 1 昨年6場所の相互の対戦成績から推定された各力士の強さ π_i

		勝	敗	勝率	強さ π_i
1	北の湖	79	8	0.908	442.08
2	若乃花	77	12	0.865	284.52
3	輪島	46	15	0.754	133.90
4	三重海	55	32	0.632	68.63
5	玉富士	45	39	0.536	46.62
6	旭国	46	41	0.529	42.26
7	貴ノ花	40	35	0.533	37.25
8	琴風	35	38	0.479	30.76
9	蔵間	41	46	0.471	29.22
10	麒麟児	40	37	0.519	29.21
11	増位山	41	40	0.506	26.76
12	富士桜	36	48	0.429	25.01
13	高見山	40	42	0.488	24.55
14	魁傑	39	48	0.448	23.26
15	青葉山	37	38	0.493	22.68
16	荒勢	34	44	0.436	19.71
17	出羽花	31	33	0.484	17.49
18	黒姫山	31	38	0.449	16.20
19	金城	26	45	0.366	14.41
20	双津竜	28	42	0.400	12.41
21	播竜山	27	41	0.397	12.29
22	舛田山	24	34	0.414	12.26
23	青葉城	30	41	0.423	12.06
24	玉輝山	25	34	0.424	11.89
25	魁輝	26	35	0.426	11.63
26	栃赤城	24	36	0.400	11.50
27	隆ノ里	28	48	0.368	10.77
28	大潮	23	43	0.348	10.77
29	千代富士	23	44	0.343	9.90

強さ π_i は平均が50になるように計算されている.

士が大関の旭国や貴ノ花よりも「強い」ことがわかる.

つぎに，対象を3横綱，3大関に限って，昨年以前の成績にもさかのぼって，少し詳細な解析を試みることによる.

昨年末までのこれら6力士の相互の対戦成績は表2で与えられるが，これから各力士の強さを最尤推定すると表3のような結果になる.

これから，これら6力士の間にBTモデルが成立しているか否かを調べることができる．この場合の尤度比検定のための⑫式の値は，

表 2 3横綱，3大関の昨年末までの通算対戦成績

	北の湖	若乃花	輪島	三重海	貴ノ花	旭国	計
北の湖	＼	13	13	22	26	24	98
若乃花	12	＼	7	16	0	13	48
輪島	20	15	＼	27	23	27	112
三重海	9	9	9	＼	15	17	59
貴ノ花	8	0	15	22	＼	24	69
旭国	7	13	3	15	10	＼	48
計	56	50	47	102	74	105	434

表 3 3横綱，3大関相互の間の昨年末までの通算の強さ

力士	強さ
北の湖	72.63
若乃花	41.85
輪島	93.52
三重海	27.57
貴ノ花	42.24
旭国	22.19

$$-2\log\lambda=10.80$$

である，相撲ファンには周知のことであるが，若乃花と貴ノ花とは同じ二子山部屋のために対戦することがない．したがって，今の場合，χ^2 の自由度は⑫式より1つ小さく9となるが，この値は有意とはいえない．つまり，これら6力士の間ではBTモデルが成立し，特定の「苦手」関係はないものと考えてよい．

同様に，これらの中の特定の3力士について，「苦手」関係があるか否かも，表2のデータからチェックすることができる．6力士の中から3力士をとりだす組合せのうち，若乃花と貴ノ花を同時に含まない16の場合について⑯式の u の値を（有限修正の 1/2 を除いて）計算するとき，目立った値は，北の湖，輪島，貴ノ花の場合の 1.868，若乃花，輪島，旭国の 1.675，北の湖，若乃花，旭国の 1.632 である．両側5%の有意点が1.96，同10%で 1.645 であるから，これらの“苦手”関係は，それほど極端なものではない．

表 4　3 横綱，3 大関相互の間の一昨年末までの強さおよび昨年 1 年間の強さ

力　士	一昨年末まで	昨年 1 年間
北 の 湖	62.28	145.45
若 乃 花	30.13	108.19
輪　島	106.83	20.34
三 重 海	27.12	14.68
貴 ノ 花	48.21	7.43
旭　国	25.43	3.91

さて，表 3 によれば，昨年末までの通算成績による最強の力士は輪島であって，昨年 6 場所に圧倒的な強さを示した北の湖ではない．そこで，これら 6 力士間の強さの関係が，昨年 1 年間とそれ以前とでは変化したのかどうかを調べてみたい．6 力士の一昨年末までの強さと，昨年 1 年間の強さを，相互の対戦成績から最尤推定した結果は，表 4 のようになる．

これから，昨年とそれ以前とで強さの関係に変化がないという仮説を尤度比検定することができる．仮説のもとでは(11)式の値は，

$$\log L_0 = -269.92$$

また，昨年の成績と一昨年までの成績について計算された同様の値は -29.70 および -225.91 であり，これから対立仮説のもとでの対数尤度の最大値は，

$$\log L_1 = -(29.70+225.91) = -255.61$$

したがって，

$$-2\log\lambda = 2(\log L_1 - \log L_0) = 28.62$$

がえられる．自由度 5 の χ^2 分布と比べるとき，この値は 0.1 %でも有意であり，昨年とそれ以前とで各力士の強さの構造に変化がみられたことは疑いの余地がない．それは，北の湖，若乃花の躍進と，輪島の強さの相対的な低落によるものということができる．

ここで，今年 1 年間の大相撲を展望してみよう．現時点で，われわれに入手可能なのは，本年初場所の取組みであるが，この取組みについて，横綱・大関の成績を表 1 の結果から予想すると，表 5 のようになる．なお，ここで強さの推定されていない力士の強さとしては，29力士の中央値である青葉山のものを用いた．

表 5　本年の成績の予想

	勝数の期待値	標準偏差	全勝の確率	1 敗の確率
北の湖	13.61	1.06	0.211	0.374
若乃花	12.96	1.20	0.082	0.269
輪　島	11.29	1.48	0.006	0.049
三重海	9.34	1.69	0.0002	0.0029
貴ノ花	8.04	1.79	1.5×10^{-5}	3.9×10^{-4}
旭　国	7.99	1.73	7.9×10^{-6}	2.2×10^{-4}

北の湖の勝数の期待値 13.61 から，年間 6 場所の勝数の予測値として81.7がえられる．彼が昨年達成した年間勝数の新記録82を更新することに，それほどの困難はないように思われる．北の湖と若乃花では，勝数の期待値はあまり違わないが，全勝の確率にかなりの開きがみられる．また，現在の 3 大関が横綱に昇進する見込みは決して明るいものではないということも言える．

つぎに，今年の優勝者が北の湖，若乃花以外からは出ないという仮定のもとで，優勝回数の内訳を予想してみよう．そのため，これら 2 力士の間の勝敗を条件として与えたときの勝数の分布が独立として表 6 を計算した．この計算には竹内「確率分布の近似」23 ページの近似法が使われている．

北の湖が若乃花に勝つ確率は，表 1 の結果から 0.6084となる．したがって，勝数が同じ場合の優勝決定戦の勝敗もこの確率で決まるものとすれば表 6 の値から，北の湖の優勝の確率として0.6644を得る．年間 6 場所の優勝回数の期待値としては 3.99，すなわち約 4 回という値がこれから得られる．また，北の湖が 6 場所すべてに優勝する確率は 0.086 となる．北の湖の強さをもってしても，6 場所制覇は非常に困難であるということがわかる．

上記の考察から輪島が除かれているのは，3 人の勝数の同時分布を考えることが面倒なためであ

表 6 北の湖，若乃花間の勝敗を条件としての2人の優勝の確率

	北の湖が若乃花に	
	勝ったとき	敗けたとき
同じ勝数	0.1684	0.2536
北の湖優勝	0.7474	0.2219
若乃花優勝	0.0842	0.5245

表 7 北の湖，若乃花の勝数の最大値の分布と輪島の勝数の分布

	北の湖，若乃花の最大値	輪　島
全　勝	0.295	0.006
14　勝	0.469	0.049
13　勝	0.201	0.156
12勝以下	0.035	0.789

る．輪島は優勝戦線にどの程度の影響を及ぼすだろうか．そのために，表6を作るために使った数値から北の湖，若乃花の勝数の最大値の分布を求めた．これと輪島の勝数の分布の近似値が表7に示されている．粗い近似として，この2つの分布を独立とみなしたうえで，輪島がこの最大値と同等以上の勝数をあげる確率を求めると0.086という結果になる．輪島の優勝の確率はきわめて限られたものと考えられる．

む す び

以上の例は，可能な分析について，いくつかの例を示したものにすぎない．BTモデルを仮定して計算を進めれば，たとえば現在の北の湖と全盛期の大鵬とどちらが強かったかというような問に答えることも可能である．それについては「強さ」の時間的変化について一定のパターンを仮定しなければならず，そこには問題があるが，またBTモデルからのズレの構造を分析して，力士の「強さ」だけでなく，その「タイプ」を分類し推定することも可能であるが，それについてはここでは立ち入ることができなかった．

この一文をきっかけとして，興味をもたれた読者の方々が，自らいろいろな分析を進めてくださることを期待したい．

東京大学工学部大学院の西尾敦氏には多くの有益なコメントをいただいたうえ，データ処理の援助をあおいだ．深く感謝したい．

(たけうち・けい　ふじの・よりたけ)

研究部会報告

●日本的リソースマネジメント

第25回部会　53年12月2日(土)　14:00～19:00．日本能率協会研修室で開催，参会者22名．議題「日本的合理主義を考える」東大教授公文俊平氏．

日本的合理主義は日本におけるリソースマネジメントを考える上で，最も基本になるものであり，今までの会合においても断片的にはしばしば論議されてきたが，本研究部会のしめくくりとして思い切ってメスを入れたものであった．本問題については，不可解な部分も相当あり，また現在の若年層の価値観の変化が，在来の合理主義にどのような変革をもたらすかは，今後の課題にもち越されたが，少なくとも今までの現象面に対する本質性が浮きぼりにされ，リソースマネジメントを考えるうえでの大きな示唆が得られた．