竹内 啓

スポーツのOR

―その数理科学的側面―

1. スポーツのORとは

スポーツのORといっても，ここではスポーツで勝つためのOR的戦略を考えるという面には限らないことにしたい．もっと広くスポーツの中にあるOR的側面，あるいはさらに広く数理的合理性，または数理科学的モデル化の可能な面を一般的に捉えるにはどうしたらよいか，という問題を考えたい．それによってスポーツというものの見方に一つの「奥行」を加えることができれば，私としてはこの「特集」の目的は達せられると思う．そうして，実はそのような方向からスポーツというものを眺めることができるならば，同じような問題が，現実のORの場において現われる一見スポーツとは無関係ないろいろな実際問題の中にも現われていることが自ら明らかとなり，したがってスポーツのORはたとえば企業のORとも無関係でないことが明らかとなるであろう．

そこでまずスポーツの定義からはじめよう．スポーツとはここでは「人間が一定のルールに従って肉体的運動による成果を競うもの」という意味に理解したい．したがってここでは，碁，将棋，トランプのような頭脳的遊戯や，競馬，競艇のような人間が主でないもの，また人間の肉体的運動であっても登山のように競技のルールが明確でないものは「スポーツ」に含めないことにする．もちろんこのような区別は絶対的ではないが，問題を整理するうえでは妥当な定義といってよいであろう．

そうすると，先に述べたような意味でのスポーツのORとは，このようなスポーツ活動に現われる科学的側面を捉えて，それをモデル化し，そこからスポーツをめぐるいろいろな問題についての合理的な推論と判断とを引き出すことであると考えることができる．

ところで，スポーツを上のように定義したうえでそれをさらにいろいろな基準によって分類することができる．

まず，スポーツには，競走，競泳のように「記録」を争うものと，野球，相撲，その他直接に「勝敗」を争うものがある．また個人と個人が争うものと「チーム」と「チーム」が戦うものとがある．そこでいろいろな種類のスポーツについて，どのような問題が考えられるかを，いろいろな角度から考えよう．

2. 「記録」の問題

まず「記録」を問題とするスポーツについて．これには，競走，競泳，跳躍，投てき等いろいろな種類があるが，ここではその内容は問題にせずただ「記録」というものの性質だけを考えよう．

ところで，陸上でも水上でも「記録」は年々更新されつつある．スポーツの水準は年々向上しつつあるように思われる．このことは疑いのない事実であろうが，しかし「記録」というものは，たとえ全体としての水準に変わりがなくても，いつ

かは破られるのが当然である．したがって水準が向上しているということを証明するには，偶然より以上にしばしば記録が破られていることを示さなければならない．

いまある年から記録がとられはじめたとしよう．そのとき最初の年の記録はもちろん「新記録」である．そうしてもし記録が全体として向上するという傾向がないならば，t 年目の最高記録が「新記録」である確率は $1/t$ になる．なぜならば 1, …, t 年のそれぞれの年の記録のうちどれが最大になるかは，すべて等確率で，その確率は $1/t$ に等しくなるからである．したがって X_t を，

$$X_t=1 \quad t\text{ 年の記録が「新記録」であるとき}$$
$$=0 \quad \text{そうでないとき}$$

と定義すると，

$$E(X_t)=1/t \qquad V(X_t)=(t-1)/t^2$$

となる．そうして T 年のうちに「新記録」の出た回数を R_T とすると，

$$R_T=X_1+X_2+\cdots+X_T$$

であるから，

$$E(R_T)=1+1/2+\cdots+1/T$$
$$V(R_T)=1+1/2+\cdots+1/T$$
$$-1-1/2^2-\cdots-1/T^2$$

となる．T が大きいときには，

$$E(R_T)\sim\log T+\gamma \quad (\gamma\text{ はオイラー定数})$$
$$=\log T+0.577\cdots$$
$$V(R_T)\sim\log T+0.577-\pi^2/6$$

となる．したがってたとえば $T=30$ とすると，

$$E(R_T)\sim 3.40+0.58+3.98$$

となるから，「新記録」の回数の期待値はほぼ 4 である．

また $f_T(r)=\Pr\{R_T=r\}$ とおくと，

$$f_1(1)=1$$
$$f_{T+1}(r)=\frac{1}{T+1}f_T(r-1)+\frac{T}{T+1}f_T(r)$$

という関係が成り立つ．

そこで現実に「新記録」の出た回数を調べてそれがこのような分布から期待されるところよりいちじるしく大きければ「傾向がない」という仮説は棄てられ「記録は向上している」といってよいことになる．そうしてこのことはほとんどすべての競技についていえるように思われる．

つぎに「記録」を争うスポーツでも，その「記録」のとり方は必ずしも一定でない．小野勝次氏が別稿で取り上げておられるように，跳躍や投てきの競技では，何回かの試行の中の「最大値」がその人の「記録」として認められることになる．このような「ルール」は何を意味するであろうか．この種の競技では「失敗」や「ファウル」をおかすことが多い，すなわち偶然性に支配されることが大きいことが，このようなルールが作られた理由であろう．いいかえれば，ある人の「実力」を θ とするとき，1 回の試行の結果を X とすれば，X は θ に依存するが，かなりばらつきの大きい分布に従うことになる．(ただしここでは「ファウル」の場合にも，X は適当な値，たとえば 0 をとることにしておく．) そうすると X の値を 1 回求めただけでは，θ を正確に求めることはできないから何回かのくり返し観測が必要になる．そうして「記録」を定めるルールとは，適当な回数の試行の結果 $X_1, \cdots, X_n$ から，その人の「実力」の指標を求める方法であるとみなすことができる．

この場合もし $X-\theta$ を「誤差」とみなすことができ，かつその分布が正規分布に近い形をしているならば「記録」としては $X_1, \cdots, X_n$ の算術平均

$$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$$

あるいはそれに近い値をとるのが合理的であろう．しかし「ファウル」が起こりやすいということは，X の値の分布は図 1 の(a)のような対称な分布でなく，(b)のような左側にスソをひいた分布になっていることを意味する．このような場合には θ の推定量として算術平均は適当でないことは直観的にも推測できるが数学的にも証明することができる．

$X_1, \cdots, X_n$ を大きさの順に並べた値（順序統計量）を $X_{(1)}<\cdots<X_{(n)}$ とし，θ の推定量として，

$$\hat{\theta}=c_1X_{(1)}+\cdots+c_nX_{(n)}$$

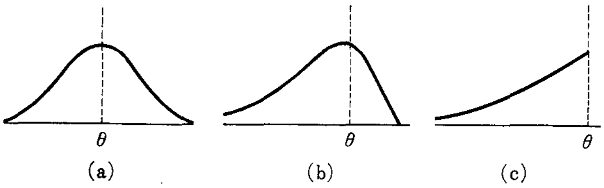


図 1

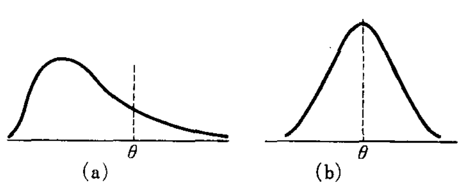


図 2

という形の線形推定量を考えると，(b)のような形の分布のもとでは大きい値のほうのウェイト c_n, c_{n-1}, … を大きくしたほうがよい推定量(分散の小さい推定量）が得られることがわかっている．「最高記録」を「記録」とするというのは $c_n=1$, その他の $c_i=0$ として，

$$\hat{\theta}=X_{(n)}=\max X_i$$

とすることを意味する．しかしこれが最もよい推定量になるのは，実は分布の形が図 1 の(c)のようになる場合であるが，これは極端であって，現実にこのようにはならないであろう．したがって順位を決めるには，単に 1 つの値だけをとるのではなく，大きいほうから何個かの値をとって，その平均を求める，すなわち，

$$\hat{\theta}=(X_{(n)}+X_{(n-1)}+\cdots+X_{(n-k+1)})/k$$

とするのが，よりよいと思われる．これによって小野氏も指摘しておられるような矛盾もさけられるのではなかろうか．k の値は，n に対応し，また「失敗」に終わる確率を考慮して定めねばならないが，たとえば $n=4$, $k=2$ ならば，4 回の試行のうちよいほうから 2 つの値をとって，その人の「成績」とするということになる．

この問題のもう 1 つの側面は，最高記録だけで順位を決めるとなると，失敗に終わる確率が高くなっても偶然高い記録が出ることを期待して「一発」をねらうことが多くなるということである．そのような考え方が競技者の間に共通になると，試行の結果の分布の形は変わってしまって，むしろ図 2 (a)のような形になるであろう．そうしてこのような分布のもとでは，最大値の分散は大きくなるからそれは「実力」θ の推定量としてはよくないものになってしまう．いいかえれば「記録」がそれぞれの人の実力よりも「運」に左右されることが多くなる．

スポーツ競技の公平性という点からすれば，これは好ましくないことであるから「一発」をねらうことが不利になるように，多くの結果の平均をとるとか，あるいはもっときびしく，何回かの「ファウル」をしたら，成績の如何にかかわらず失格とするとかのようにルールを変えて，試行結果の分布が図 2 (b)のようになるように方向づけることが望ましい．もちろん具体的にルールをどのようにしたらよいかは，それぞれの競技の特質にもよることであるから，一概にはいえないが，そこにＯＲ的・統計的考察を入れる可能性は大いにあると思う．

3. 「勝敗」の決め方

つぎに「勝敗」を争うスポーツについて考えよう．これには個人の間で戦うものと，チームで戦うものとがある．「勝敗」という面だけから考えれば，この 2 つの間の区別は不必要だから，ここでは「チーム」の間の試合について考えよう．

まず最初にチームの「強さ」というものについて考えよう．一般にスポーツにおいては「強い」ほうが必ず勝つとは限らない．もし一方がつねに勝つと決まっているならば，ゲームの興味はなくなってしまうであろう．したがってあるチームが「強い」ということは，そのチームが必ず勝つということではなく，勝つ「確率」が大きいということを意味すると考えねばならない．そこで勝敗の確率を問題にしよう．

いまＡチームがＢチームに勝つ確率を p_{AB} と表わすことにしよう．引き分けはないものとする

と，

$$p_{AB}+p_{BA}=1$$

となる．ところでもし A, B, C 3チームの間で，

$$p_{AB}>\frac{1}{2}>p_{BA} \quad p_{BC}>\frac{1}{2}>p_{CB} \quad p_{CA}>\frac{1}{2}>p_{AC}$$

という関係が成立したとすると，AはBより強くBはCより強く，CはAより強いということになって，3チームの間ではどれが強くてどれが弱いかということはできなくなってしまう．そこでチームの「強さ」が矛盾なく定義できるためには，このような確率の間に一定の制約条件が成り立たなくてはならないことになる．この問題については，別稿でくわしく述べるが，各チームに対していわばその「実力」を表わすと考えられる量πが定義できて，

$$p_{AB}=\pi_A/(\pi_A+\pi_B)$$

となることが要請されるのである．このような関係，あるいはモデルを前提にすると，今度はチームの間のこれまでの対戦回数が不揃いであって，ある組合せはこれまで行なわれたことがないというような場合でも，その記録から各チームの「実力」を推定したり，あるいは今後の勝敗を予測したりすることが可能になる．

逆にこのような関係が成り立たないときには，いろいろなチームの間に相対的に「苦手」と「カモ」が存在して「強さ」が一義的に定義できないことになる．そこで現実のデータから，はたして上記のような関係が成り立っていると考えられるかどうかを検定してみることも面白いであろう．

「勝敗」を争うスポーツについてもう一つの問題は，「強いもの」を選び出すルールの定め方である．スポーツの中には，いくつかのチームの間でいろいろな方法で何回かゲームをして，その結果によって「優勝」や「順位」を定めたりするものが多い．この場合「強い」チームが「弱い」チームに必ず勝つとは限らないとすれば「弱い」チームが優勝することもあり得る．そこでルールとしては「強い」チームが優勝する確率が大きくなるようにすることが望ましいであろう．

いま簡単な場合として，2チームの間で「優勝」を争う場合を考えよう．たとえばプロ野球日本シリーズの場合には「7回戦」で先に4回勝ったほうが「優勝」ということになっている．いまA，B両チームの間で「優勝」を争うものとし，1回の試合でAが勝つ確率をp，Bが勝つ確率をqとし，引き分けはないものとすると$(p+q=1)$

4試合でAが優勝する確率p^4，Bが優勝する確率q^4

5試合でAが優勝する確率$4p^4q$，Bが優勝する確率$4pq^4$

6試合でAが優勝する確率$10p^4q^2$，Bが優勝する確率$10p^2q^4$

7試合でAが優勝する確率$20p^4q^3$，Bが優勝する確率$20p^3q^4$

となるから，Aが優勝する確率をPとすれば，

$$P=p^4(1+4q+10q^2+20q^3)$$

となる．

また「優勝」が決まるまでの試合数の期待値は

$$E(N)=4(p^4+q^4)+20(p^4q+pq^4)+60(p^4q^2+p^2q^4)+140(p^4q^3+p^3q^4)$$

となる．いろいろなpの値に対するPおよび$E(N)$の値は下記のようになる(表1)．

表 1

p	P	$E(N)$
0.500	0.500	5.81
0.550	0.608	5.78
0.600	0.710	5.70
0.650	0.800	5.56
0.700	0.874	5.38
0.750	0.929	5.16
0.800	0.967	4.93
0.850	0.988	4.68
0.900	0.997	4.44

すなわちAがBに1回の試合で勝つ確率が0.6いいかえれば，AとBとが何回も試合をすれば，Aの勝率が6割になるとき，7回戦でAが「優勝」する確率は約71%になる．両リーグの優勝チーム

について，その実力の差がこれより大きいとは考えられないから，日本シリーズで実際に「強い」ほうが勝つ確率は必ずしも大きくないといえる．

強いほうが「優勝」する確率をもっと大きくするためには，試合回数を増す必要がある．しかし試合数をあまり多くすることはいろいろ意味で費用や負担がかかりすぎる．7回戦方式というのはアメリカのワールドシリーズと同じであるが，経験的にいって妥当なところなのかも知れない．

しかし「優勝」を決めるルールにはもっと別の方式も考えられる．その1つは先に何回か勝ち越した(相手より多く勝つ)ほうを「優勝」とするものである．たとえば2回勝ち越したら優勝とすると

A が2試合で優勝する確率 p^2, B が2試合で優勝する確率 q^2

A が4試合で優勝する確率 $2p^3q$, B が4試合で優勝する確率 $2pq^3$ 等

となるから，A の優勝する確率 P は，

$$p^2(1+2pq+\cdots)=p^2/(1-2pq)=p^2/(p^2+q^2)$$

B の優勝する確率は $q^2/(p^2+q^2)$ となる．また優勝が決まるまでの試合回数の期待値は，

$$E(N)=(p^2+q^2)(2+4pq+6p^2q^2+\cdots)$$
$$=2(p^2+q^2)\times\frac{1}{(1-2pq)^2}=\frac{2}{p^2+q^2}$$

となる．

このルールと5回戦，すなわち先に3回勝ったほうを優勝とする方式とを比較すると，つぎのようになる(表2)．

表 2

p	5回戦 P	5回戦 $E(N)$	2回勝ち越し P	2回勝ち越し $E(N)$
0.50	0.500	4.13	0.500	4.00
0.55	0.593	4.11	0.599	3.96
0.60	0.683	4.07	0.692	3.85
0.65	0.765	3.99	0.775	3.67
0.70	0.837	3.89	0.845	3.45
0.75	0.896	3.77	0.900	3.20
0.80	0.942	3.63	0.941	2.94
0.85	0.973	3.48	0.970	2.68
0.90	0.991	3.32	0.988	2.44

この表から見られるように，p が1に近いところ以外では「勝ち越し」方式によるほうが強いほうが確率 P が大きくなり，しかも試合数の期待値は5回戦方式の場合よりも小さくなる．いいかえれば勝ち越し方式のほうが一般により効率的であるということができる．

しかしながら勝ち越し方式の1つの欠点は，なかなか優勝が決まらないことが(小さい確率にせよ)起こり得ることである．これは試合運営のうえからは困ることである．そこでこの2つを折衷してたとえば，最初に k 回勝ち越すか，あるいは l 回勝ったほうを優勝とする($l>k$)というような方式も考えられよう．表3に $k=3$, $l=5$ の場合の方式と，単純な9回戦方式(先に5回勝ったほうが優勝)との2つの場合の比較を示す．「折衷」方式では P がわずかに小さくなる反面，試合数の期待値は1以上小さくなる．したがって明らかに前者のほうがより効率的であるといえよう(表3)．

表 3

p	「折衷」方式 P	「折衷」方式 $E(N)$	9回戦方式 P	9回戦方式 $E(N)$
0.50	0.500	6.26	0.500	7.54
0.55	0.617	6.20	0.621	7.49
0.60	0.725	6.03	0.733	7.35
0.65	0.818	5.76	0.828	7.14
0.70	0.891	5.41	0.901	6.86
0.75	0.943	5.00	0.951	6.54
0.80	0.975	4.57	0.980	6.20
0.85	0.991	4.13	0.994	5.87
0.90	0.998	3.71	0.999	5.55

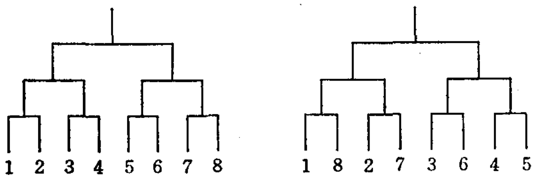
4.「優勝」チームを選ぶ

つぎに数多くのチームの中から「優勝」を決めたり，順位を定めたりする場合を考えよう．

「優勝」を決定する最も簡単な，そうして最も多く用いられるやり方は，いわゆる勝抜きトーナメント方式である．

いま8チームの間のトーナメント戦において，1～8までのそれぞれの「強さ」π_i が，

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17



(a)　　　　　　　　(b)

図 3

と表わされ，i が j に勝つ確率が $p_{ij}=\pi_i/(\pi_i+\pi_j)$ に等しくなるものとして，それぞれのチームの優勝する確率を計算してみよう．

その確率は一般に組合せによって決まる．いま図3の(a)(b) 2つの場合を考えよう．

すなわち(a)においては第1回戦においては，強いチームは強いチームと，弱いチームは弱いチームと当るようになっているのに対して，(b)では最初は強いチームと弱いチームが当るようになっている．この2つの場合について，それぞれの優勝する確率を計算すると，つぎのようになる(表4).

表 4

チーム	強さ π	優勝確率 (a)	優勝確率 (b)
1	3	0.018	0.007
2	5	0.063	0.023
3	7	0.091	0.048
4	9	0.149	0.082
5	11	0.116	0.124
6	13	0.160	0.175
7	15	0.180	0.230
8	17	0.223	0.310

表4からわかるように，(b)の組合せのほうが，強いチームが優勝する確率が大きくなっている．それは(a)のほうでは強いチームが互いに「星のつぶし合い」をすることになるからである．

そこで強さの順位がわかっているならば，(b)のような組合せにするほうが合理的であるといえる．もし強さの順位があらかじめわかっていないならば「くじ引き」でランダムに組合せるのが一番よいということになるであろう．また何チームかの「強い」チームの存在が知られているときにはそれらにいわゆる「シードチーム」として，別別の「山」に入れるということも行なわれているが，これもできるだけ(b)の形に近づけるという点で1つの有効な方法であろう．

強いチームが優勝する確率をもっと大きくしようとすれば，試合数をもっと多くしなければならない．そのためにはいわゆる「敗者復活戦」方式をはじめ，いろいろなルールが考えられるが，トーナメント方式と対照的なのが，いわゆる「総当りリーグ戦」である．もちろんこの場合には総試合数はいちじるしく増すが「強い」チームが優勝する確率は大きくなる．ただしこの場合「タイ」が出た場合のルールなど細かいことを決めておかねばならないので，確率を正確に計算することは面倒である．

しかし「総当り」方式は，ただ「優勝」を決めるのには効率があまりよくない．とくにチーム数が多くなると試合数が多くなりすぎる．そこでオリンピックなどの国際大会では「予選」をして，まず何チームかの「優勝候補」を定め，つぎにそれらの間で「決勝」をするという方式がとられている．この場合そのやり方には，予選トーナメント＋決勝リーグ，予選リーグ＋決勝トーナメント等いろいろの方式があり，また「優勝候補」をどれくらい残すのがよいかという問題もある．いろいろな方式の中で，最も少ない試合数で「強い」チームを残すにはどのようなものが効率的かを調べてみることも面白い問題であろう．

む す び

このほかルールの問題として，たとえばゲームの「決め方」自体に関するものもある．たとえば野球で1試合のイニング数を現在の9の代わりにたとえば18とすれば「強い」チームが勝つ確率は大きくなるであろう．逆に5にすれば，偶然によって決まることがそれだけ大きくなり「強い」ほうが勝つ確率は小さくなるであろう．同じような問題はほかの球技の試合時間などについても考えられ

る.（もちろん選手の疲労もあるから，むやみにイニングを多くすることはできないけれども.）

ゲームの興味という点からすれば，試合の結果がまったく偶然によって決まるのはつまらないし，また「強い」ほうが必ず勝つというのでも味気ないであろう．どの程度のところが最も適当であろうか．それについてはまだはっきりした理論はないが，1つの問題にはなるであろう．

「スポーツとOR」についてはまだいろいろな問題が考えられよう．とくにここではその戦略的な側面にはまったくふれられなかったが，それについては他の方の稿にゆずりたい．

（たけうち・けい　東京大学経済学部）

■スポーツのOR■

3割打者の条件

門山　允

よく野球で打率をよくするには打数を少なくするほうが有利だといわれているが果たしてそうだろうか？そこで実際のデータで調べてみた．データは1978年のプロ野球から，代表的なバッターとして巨人の王，張本，パシフィックの代表として阪急の福本の3人を取り上げてみた．

この3人の各試合ごとの打数とそのときのヒット数を集計したのがつぎの表である．数字は新聞の記録から拾ったので，公式記録と比べると少し脱落があるが，それはお許し願いたい．

王

打数＼ヒット数	0	1	2	3	4	計	打率
1	1					1	0
2	10	10	2			22	.318
3	14	23	3	1		41	.260
4	12	21	17	3		53	.302
5	1	2	3	1	2	9	.489
計	38	56	25	5	2	126	.304

張　本

打数＼ヒット数	0	1	2	3	4	計	打率
1							
2	4	1				5	.100
3	14	16	4			34	.216
4	10	27	11	6		54	.310
5	0	10	2	5	2	19	.390
計	28	54	17	11	2	112	.305

福　本

打数＼ヒット数	0	1	2	3	4	計	打率	
2	2	2	1			5	.400	
3	7	7	5	1		20	.333	
4	10	23	23	1		57	.316	
5	4	15	10	7		36	.206	.2188
6			1	1		2	.417	
計	23	47	40	10		120	.323	

さてこの表からわかることは，同じように3割打者といってもだいぶパターンがちがうことである．まず福本は典型的に打数が少ない試合ほど打率がよい打者であり，これに反して張本は逆に打数が多いときのほうが打率がよく，定説の逆になっている．王はこの表ではハッキリしないので，2分して打数3以下の試合と4以上の試合とに分けて計算すると，

打数3以下のときの打率＝0.2738

〃　4以上　〃　＝0.3230

となって，これも打数が多いときのほうが打率がよい．

したがって王や張本の場合には打数が少ないほうが打率がよくなるという常識とは逆で，福本は反対に常識どおりのパターンになっている．この3人とも代表的な好打者であるから，どういうパターンがよいということはいえないという結論が導かれる．