

## 地域研究(その1)

地域研究部会

地域研究部会も予定の2年が過ぎようとしている。そこでこの紙面を借り、一応「総合報告」として地域研究の概要をまとめておくことにする。

地域研究は非常に広い範囲を扱う研究である。地表において点とみなせる物の分布のような地理学や生態学に含まれる研究から経済学、工学、さらには政策、行政までも扱っている。それらをすべて網羅することは不可能でもあるし、この報告の目的でもない。ここで取り上げているテーマは数理学やORの基本的考え方をその背景にもっているときとみなせるものである。それらを便宜的につきのような5つの大きいテーマに分け、部会のメンバーがそれぞれ得意とするところを分担し執筆している。

1. 地域における人間や活動の分布に関する研究。
2. 地域内の機能的分割に関する研究。
3. 地域内における施設の立地に関する研究。
4. 地域内、地域間の人や物の移動の分析。
5. 地域の水準と計画の実現が地域に与える影響の分析。

これ以外にも地域研究として本来取り扱われるべき重要なテーマは多い。それらを研究し、発展させてくれる人が大勢出てきてくれることを願っている。

## 1.1 点の分布パターン

地図をみると、縮尺によって、さまざまなものを点とみなしてよいと思われることが多い。たとえば縮尺の小さい(すなわち対象地域が大きい)地図で関東地方をみれば、東京、横浜を除いて各都市を点とし、都市の分布パターンを点の分布パターンで表わすことが可能である。また、縮尺の大きい地図では、小中学校、近隣公園、小売店のような都市の種々な施設を点として表わすことができるだろう。

平面における点の分布パターンを数理的に理論化しようという試みは、まず森林の植生等を対象とする生態学で始まり(文献[1])、ついでの成果が地理学に適用さ

れ今日に至っている。

ところで地域に展開されているさまざまなものは、点としてよりも線あるいは面とみなすほうが適切である場合も少なくない。最近、点、線および面のパターンを主題とした本(文献[2])が出たり、線の分布パターンを点の分布パターンに置き換える試みもなされていないわけではない(文献[3])。しかし点の場合に比べて、線や面の分布パターンについては定説というものがなく、これからの課題というべきだろう。

そこで以下では、比較的蓄積の多い点の分布パターンに関して理論の概略を述べていこう。

## 1.1.1 ポアソン分布

地域研究の分野で、はじめて厳密にポアソン分布を導入したのは Dacey(文献[4]) だと思われるので、これに沿って説明しよう。

いま平面の広い領域に点が分布していて、この点の密度が大局的に  $\rho$  であることがわかっているものとしよう。そして面積  $S$  の領域に  $x$  個の点がある確率を  $P(x, S)$  で表わし、つぎの4つの前提から論議を展開する。

- (i)  $P(x, S)$  は面積  $S$  の領域の位置や形によらない。
- (ii) 微小な面積  $\Delta S$  の領域においては、 $P(1, \Delta S) \doteq \rho \Delta S$  で、 $P(x, \Delta S)$  ( $x \geq 2$ ) は  $\rho \Delta S$  に比較してはるかに小さく、ほとんど0である。
- (iii)  $P(x, S)$  は  $S$  に関して微分可能。
- (iv) 境界条件としては、 $x \neq 0$  のとき  $P(x, 0) = 0$ 、 $P(0, 0) = 1$ 。

まず(i)と(ii)より、

$$P(x, S + \Delta S) \doteq P(x, S)P(0, \Delta S) + P(x-1, S)P(1, \Delta S)$$

となる。さらに(ii)より  $P(0, \Delta S) \doteq 1 - P(1, \Delta S)$  であることから、

$$P(x, S + \Delta S) - P(x, S) \doteq P(1, \Delta S) \{P(x-1, S) - P(x, S)\}$$

が得られ、これと(ii)、(iii)から微分方程式

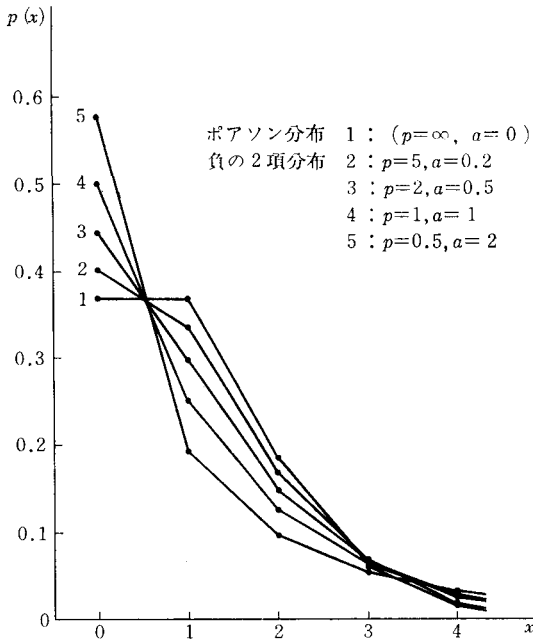


図 1.1.1 ポアソン分布と負の 2 項分布

$$\frac{dP(x, S)}{dS} = \rho \{P(x-1, S) - P(x, S)\} \quad (1.1.1)$$

が求められる。そしてこれを  $x=0$  のときから(iv)の条件を入れて逐次解いていけば、

$$P(x, S) = \frac{(\rho S)^x}{x!} e^{-\rho S} \quad (1.1.2)$$

と面積  $S$  の領域に点が  $x$  個ある確率が(1.1.2)のポアソン分布に従うことが導かれる。そして  $X$  の期待値、分散はよく知られているように、ともに  $\rho S$  となり、

$$E(X) = V(X) \quad (1.1.3)$$

が成立する。

### 1.1.2 負の 2 項分布

前節では点の密度  $\rho$  は一定であった。すなわち  $P(1, dS) \doteq \rho dS$  は面積  $dS$  の領域の位置によらず成立した。しかし現実には  $\rho$  が一定の均質な平面よりも、 $\rho$  が各所で変化する不均質な平面のほうが、より一般的であろう。

そこで  $\rho$  も確率変数であると考え、前節の(1.1.2)は  $\rho$  が定まったときの条件付確率

$$P(x, S | \rho) = \frac{(\rho S)^x}{x!} e^{-\rho S}$$

を表わしているとしよう。そして  $\rho$  は確率密度関数

$$f(\rho) = \frac{1}{a\Gamma(p)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{p-1} e^{-\frac{\rho}{a}} \quad (1.1.4)$$

なるガンマ分布に従っているものとすれば、この 2 式から、面積  $S$  の領域に  $x$  個の点がある確率は、

$$P(x, S) = \int_0^{\infty} P(x, S | \rho) f(\rho) d\rho$$

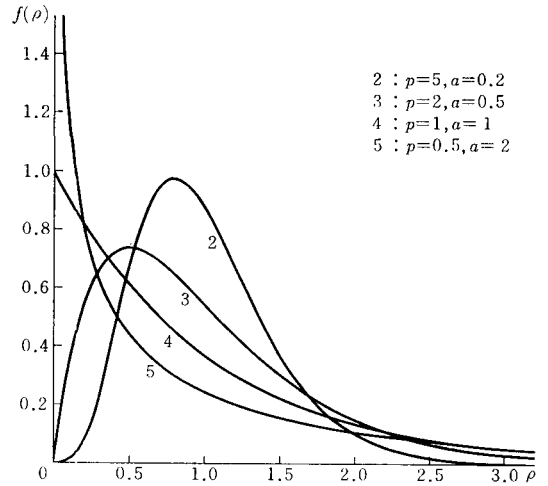


図 1.1.2  $\rho$  の確率密度関数(ガンマ分布)

$$= \frac{\Gamma(x+p)}{x! \Gamma(p)} \left(\frac{1}{1+aS}\right)^p \left(\frac{aS}{1+aS}\right)^x \quad (1.1.5)$$

となり、負の 2 項分布に従うことがわかる。そして  $X$  の期待値と分散は、

$$E(X) = a\rho S,$$

$$V(X) = a\rho S + a^2 \rho S^2$$

と表わされ、ポアソン分布のときの(1.1.3)と異なり

$$E(X) < V(X) \quad (1.1.6)$$

となっている。

ここでポアソン分布と負の 2 項分布の関係をみよう。まず(1.1.4)の  $\rho$  の分布より、 $E(\rho) = ap$  となるから、2 つの分布の大局的な密度を等しく  $ap = \rho$  (一定)とおく。そして  $p \rightarrow \infty$  とすれば、(1.1.5)の負の 2 項分布は(1.1.2)のポアソン分布に限りなく近づく。つまりポアソン分布は負の 2 項分布の極限と考えることができる。

簡単な例として、 $ap = \rho = 1$ 、 $S = 1$  の場合の両者の分布を図 1.1.1 で示す。またこの図の負の 2 項分布を現出せしめた  $\rho$  の確率密度関数を図 1.1.2 に示す。2 つの図で同じ番号のものが、それぞれ対応していることに注意されたい。

### 1.1.3 負の 2 項分布のあてはめ

負の 2 項分布はそれほどポピュラーな分布ではないためか、数理統計の教科書では、母数の推定についてほとんど触れられていない。そこで Fisher の最尤法による推定法(文献[5])を紹介しておこう。詳細な計算は略して結果だけを述べるが、最尤法の計算法を知っていればさほど難かしいわけではない。

ここで分布(1.1.5)の母数  $a$ 、 $p$  の最尤推定量をそれぞれ  $\hat{a}$ 、 $\hat{p}$  とし、標本の点の数  $x_i$  の平均を  $\bar{x}$  とする。また

$A_j$  は  $x_i > j$  なるすべての標本数を表わすものとすれば、尤度を最大にする条件から、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{\hat{p}+j} = n \log \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\hat{p}} \right),$$

$$\hat{a} = \bar{x} / \hat{p} S \quad (1.1.7)$$

の2式が得られる。ただし  $n$  は全体の標本数を表わす。

2式のうちの  $\hat{p}$  を求める上の式は、一般的には  $\hat{p}$  についてきれいに解けるものではなく、試行錯誤によって求めていかなければならない。しかし卓上計算機等の発達している現在では、それほど煩わしい計算でもないだろう。

### 1.1.4 修正ポアソン分布

これまで述べてきた分布では、平均と分散が等しいかまたは分散のほうが大きかった。しかし現実のデータでは、分散が平均よりも小さい場合がしばしば生ずる。これは点が一様にランダムに（ポアソン分布）というより、もっと均等に分布していることを示している。点が勢力圏のようなものをもつときには、点相互の相対的位置関係が重要になり、点同士がある程度離れていなければならないことがある。つまり、点の分布が互いに独立ではないわけだが、これまでの分布の導出では、理論化のしやすさから、点同士を独立であるとしてきた。

このような均等な分布に対して、Dacey は文献 [6] で、ランダムなものから規則的 (regular) なものまでの指標を得るために、つぎのような修正ポアソン分布 (Modified Poisson Distribution) を提示した。

まず対象地域全体をメッシュに分割し、一方2種類の点を考える。第1種の点は1つのメッシュの中に1個あるか1個もないかで、1個のときの確率を  $\zeta$ 、0個のときの確率を  $1-\zeta$  とする。残りの第2種の点は対象地域で一様にランダムに分布しているものとすれば、この点は、メッシュの大きさとこの点の密度によって決まる  $\lambda$  を母数とするポアソン分布に従う。よって1つのメッシュに点の数が  $x$  個ある確率を  $P(x)$  とすると、この分布は、

$$P(x) = \zeta \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} + (1-\zeta) \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (1.1.8)$$

と表わされる。また  $X$  の期待値と分散は、

$$E(X) = \lambda + \zeta,$$

$$V(X) = \lambda + \zeta - \zeta^2$$

となり、これまでと違って以下のようにになっている。

$$E(X) > V(X), \quad (1.1.9)$$

しかしこの分布を前の2つの分布と同列に論ずることはできない。前の分布では、確率の式に対象となる領域の面積  $S$  が入っていて、領域の位置、形によらず確率を計算することができる。ところがこの (1.1.8) 式では領

域があらかじめ定められたメッシュであり、面積すら変化させるのは難しい。メッシュを小さくしていく場合はまだよいが、メッシュを大きくすると、1メッシュ内に第1種の点が2個以上入ってくる場合が出てくる。

前の2つの分布はもちろん、メッシュに分割した場合には適用できる。しかしこの修正ポアソン分布は、手頃なメッシュに分割した場合にしか適用できないため、分布の応用範囲がせばめられている。

しかし他に有力な分布があるわけではなく、問題が残されているというべきだろう。

### 1.1.5 最近隣距離の分布

点が分布している平面に任意の点  $O$  をとり、そこから最も近い点までの距離  $R$  を最近隣距離というが、点の分布がポアソン分布に従っているとき、この  $R$  の分布は Clark と Evans (文献 [7]) によって導かれた。

点  $O$  から最も近い点までの距離  $R$  が  $0 < R < r$  である確率は、 $O$  から半径  $r$  以内に少なくとも1つの点がある確率に等しく、さらにこの確率は半径  $r$  以内にある点の数が0ではない確率ということができる。そこで  $R$  の確率密度関数を  $f(R)$  とし、 $O$  から半径  $r$  以内に点が1個も存在しない確率を  $P(0, \pi r^2)$  で表わせば、

$$\int_0^r f(R) dR = 1 - P(0, \pi r^2)$$

が導かれ、これを  $r$  で微分して、

$$f(r) = - \frac{dP(0, \pi r^2)}{dr} \quad (1.1.10)$$

が得られる。したがって点がポアソン分布に従っているときは (1.1.2) 式より  $P(0, \pi r^2) = e^{-\pi r^2}$  となるから、

$$f(r) = 2\pi r e^{-\pi r^2} \quad (1.1.11)$$

が求められ、これより期待値と分散は以下ようになる。

$$E(R) = 1/2 \sqrt{\rho},$$

$$V(R) = (4-\pi)/4\rho\pi, \quad (1.1.12)$$

以上の議論を一般化して、 $O$  から  $j$  番目に近い点までの距離についても同じ展開が可能で、これについては文献 [4] を参照されたい。

つぎに点が負の2項分布に従っているときは、(1.1.5) 式から  $P(0, \pi r^2) = 1/(1 + \alpha \pi r^2)^p$  となり、

$$f(r) = \frac{2\alpha p \pi r}{(1 + \alpha \pi r^2)^{p+1}} \quad (1.1.13)$$

が得られる。また期待値と分散は、

$$E(R) = \frac{\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\alpha} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left( \text{ただし } p > \frac{1}{2} \right),$$

$$V(R) = \frac{1}{\alpha \pi (p-1)} - [E(R)]^2 \quad (\text{ただし } p > 1) \quad (1.1.14)$$

と求められる。ここで (1.1.2) と同じように  $\alpha p = \rho$  (一定) として  $p \rightarrow \infty$  とすれば、(1.1.13)、(1.1.14) はそれぞれ限りなく (1.1.11)、(1.1.12) に近づく。

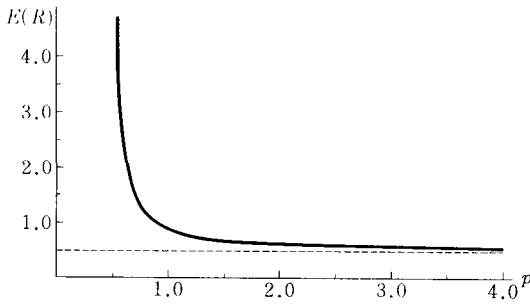


図 1.1.3 負の 2 項分布の場合の最近隣距離  $R$  の期待値

修正ポアソン分布の場合には、前に述べた理由で、このような議論の展開を行なうことはできない。

### 1.1.6 最近隣距離の応用

地理学では、点の分布パターンを解析するとき、最近隣距離の分布を用いる方法と、ポアソン分布等を直接用いる方法とを分けて考えている。どちらも点の分布が何に従うかを厳密に判定するために用いられているが、分析する局面がそれぞれ異なるために分けられているのだろう。最近隣距離の場合、基点  $O$  は任意の点ではなく、分布している点の 1 つ 1 つを代わる代わる  $O$  として分析していることが多い。

われわれの興味の対象は、点の分布パターンそのものにもないわけではない。点がある都市施設を表わしている場合、この点が対象地域全体にサービスしていると考えられるが、われわれは点の分布パターンそのものよりも、これに依存するサービスのパターンのほうに、より一層の興味をもっている。そこでそれに則して、応用について説明しよう。

都市地域において、あるいくつかの業種の小売店の分布は負の 2 項分布に従うとされている(文献[8])。そこで任意の点から最も近い小売店までの距離によって、その業種全体のサービスを考えてみよう。実際には最も近い店を利用するとは限らないが、どこで購入しても変わらないものや緊急の場合を考慮すれば、最も近い店までの距離に意味はあろう。まず、メッシュに分割して、メッシュごとに点の数を数えるか、またはサンプリング領域の形を決めてサンプリングを行ない、(1.1.7) の 2 式から負の 2 項分布の母数の推定値を求める。ついでこれを(1.1.14)の 2 式に代入すれば、対象地域のあらゆる点からその最も近い店までの距離に関する期待値と分散が推定できる。

ここで期待値と分散のグラフを示そう。前と同じように大局的密度  $ap$  を一定( $=1$ )とし、 $p$  の変化に応じて(1.1.14)を計算し、期待値が図 1.1.3、分散が図 1.1.4 と

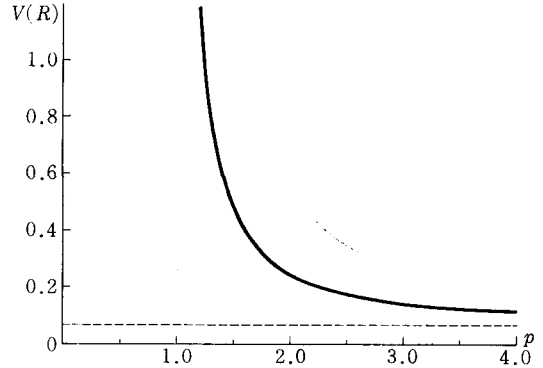


図 1.1.4 負の 2 項分布の場合の最近隣距離  $R$  の分散

なっている。両図の破線は  $p \rightarrow \infty$  のときの極限值、すなわち点がポアソン分布に従うときの値、を表わしている。 $p \leq 0.5$  では期待値が、 $p \leq 1$  では分散が、それぞれ発散するのは興味深い。

前節で述べたが、修正ポアソン分布をもとにしたのでは、最近隣距離の分布が求められない。したがってランダムなものよりもっと規則的なものに対して、この最近隣距離を用いる方法は、いまのところ適用できない。そこで規則的な点の分布として、一辺  $a$  の正方形の格子点を考えれば、このときには任意の点から最も近い点までの距離  $R$  の確率密度関数を求めることができる。それは、

$$\begin{cases} f(r) = \frac{2\pi r}{a^2} & (0 < r \leq a/2), \\ = \frac{2\pi r}{a^2} - \frac{8r^2}{a^2} \cos^{-1} \frac{a}{2r} & (a/2 < r < \sqrt{2}a/2) \end{cases} \quad (1.1.15)$$

であり、期待値と分散は以下のようにになっている。

$$E(R) = \frac{a}{b} \{ \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \},$$

$$V(R) = \frac{a^2}{b} - \{E(R)\}^2.$$

これまで、3 種類の最近隣距離の分布を提示した。そこで点の大局的密度を等しく 1 とおいて、3 つの分布を比較しよう。まず  $A$  として、直前に示した分布を考えよう。大局的密度を 1 とするためには(1.1.15)式において、 $a=1$  とすればよい。つぎに  $B$  には、ポアソン分布から導出された(1.1.11)式をあてる。密度の条件は  $\rho=1$  となる。最後に負の 2 項分布より導かれた(1.1.13)式を  $C$  とする。これは  $a$  と  $p$  の値によっていろいろ変化するが、 $a=1$ 、 $p=1$  の場合を代表させよう。以上の  $A$ 、 $B$ 、 $C$  の確率密度関数を表わすと、図 1.1.5 のようになる。これを見ると、 $B$  から  $C$  への変化は連続的であることがわかるが、 $A$  と  $B$  の間には越え難い溝があるようにも思える。

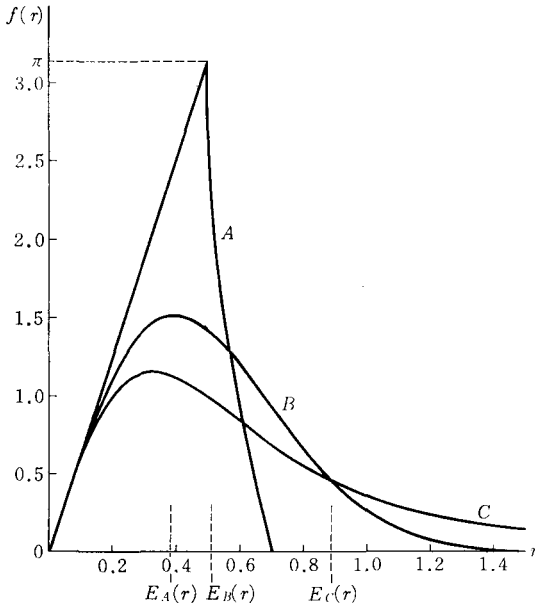


図 1.1.5 最近隣距離の比較

なお、図 1.1.6 のように点(施設)から半径  $r$  以内にある領域の面積を  $S(r)$  とすると、同じ  $r$  で最も  $S(r)$  を大きくする点の配置が望ましいことは明らかであろう。考えている対象地域が広くて、境界条件をそれほど気にしなくてよい場合には、全体の面積を  $S_0$ 、最近隣距離  $R$  の確率密度関数を  $f(R)$  とすると、近似的に以下の式が成立する。

$$\int_0^r f(R) dr = \frac{S(r)}{S_0}.$$

これから

$$f(r) = S'(r)/S_0$$

も得られるので、 $S(r)$  に関しては最近距離の分布をもとに、理論的考察が可能である。そして分布している点ごとに微小な半径  $dr$  の円を考えると、点の分布がどのようなものであれ、他の点がこの微小な円に含まれることは考えなくてもよい。このことから図 1.1.5 における 3 種類の確率密度関数の  $r=0$  における傾きは、すべて等しいことが明らかになる。

### 1.1.7 補足

以上で点の分布パターンの項を終わりにしたいが、ここで述べなかった分布も多い。たとえば 0 を付加したポアソン分布、ネイマン A 型分布、二重ポアソン分布、等等である。これらについては、まず教科書として書かれた本を参照するとよい。これに該当するものとしては、文献[1]、[9]、[10]、[11]を挙げることができる。

そしてこれらの本では、ここでは触れることのできなかった他の点の分布パターンの分析法についても、いろ

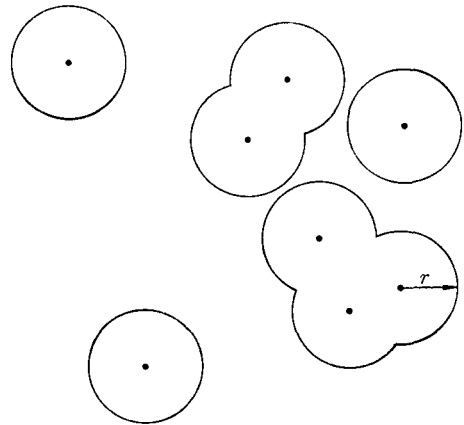


図 1.1.6 点から半径  $r$  以内の領域(面積  $S(r)$ ) いろと述べられている。

## 1.2 人口密度分布

都市を車等で通り過ぎると、中心から離れるに従って密集していた人家もやがてまばらとなり、最後には人がほとんど住んでいないような地域に到達してしまう。このような傾向は洋の東西を問わずみられることで、この中心が高く周辺が低い人口密度の分布に対しては、これまで多くの観測と研究がなされてきた。これらに共通していえることは、現象の数式的記述には熱心であるが、数式で表現される現象の理由については問わないことである。

したがって、すべて経験式といえるものであるが、都市の将来人口を予測する場合、これらの経験式から大きく逸脱することはないという点で重要なものであろう。

### 1.2.1 Clark の経験式

世界の主要都市についてその人口密度を観測し、これが指数曲線にのると発表したのは Clark(文献[12])で、彼によれば、都心部から  $x$  の距離にある地区の人口密度  $y$  は以下のように表わされる。

$$y = Ae^{-\alpha x}. \quad (1.2.1)$$

ただし  $A$ 、 $\alpha$  はその都市に固有の係数で、 $A$  は仮想的な都心部の人口密度、 $\alpha$  はひろがりを表わす係数ともいうことができる。

もしこの式がよく適合すると、この都市の全体の人口はこれを積分することによって、

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha x} x dx d\theta = \frac{2\pi A}{b^2} \quad (1.2.2)$$

と表わされる。Clark は後に文献[13]の中で詳しく論じ、世界各国の都市の詳細な結果や比較も記している。中で、日本の都市にも言及し、「日本の場合、大都市で驚くほど  $\alpha$  の値が小さいが、これは電車賃が安いことによ

るものだろう」と述べている。なお、東京の係数は1950年で  $A=232(\text{人}/\text{ha})$ ,  $b=0.13(1/\text{km})$  となっており、これを(1.2.2)に代入して単位に注意すると、 $P \approx 860(\text{万人})$ と計算される。

日本における観測と研究では、東京を主要鉄道路線によって5つのセクターに分け、 $\alpha$ と $A$ の値およびその経年変化について論じた文献[14]が最も興味深い。

### 1.2.2 Newling の経験式

Clark が文献[12]を発表してから10年ほどたって、Sherratt と Tanner が独立につぎのような経験式を発表した。これはClarkの式(1.2.1)の  $x$  を  $x^2$  に置き換えたもので、

$$y = Ae^{-\beta x^2} \quad (1.2.3)$$

と表わされる。

さらに Newling はこれまでの式を包括する内容で、文献[15]を発表した。彼による式は、前と同じように都心から  $x$  の距離の人口密度を  $y$  とすると、

$$y = Ae^{x(\alpha - \beta x)} \quad (1.2.4)$$

と表わされる。ただし  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  は係数である。

この式がこれまでの(1.2.1)式および(1.2.3)式を包括していることは、 $\beta=0$ , または  $\alpha=0$  とおけば明らかであろう。この式は  $x=\alpha/2\beta$  で極大となり、また  $x=\alpha \pm \sqrt{2\beta}2\beta$  で変曲点を有する。そこでこれを実際の人口密度分布にあてはめるとき、都心に相当する地点が曲線のどこにくるかによって、Newling は都市の発展段階をつぎの4つに分類している。

- (i)  $\frac{\alpha + \sqrt{2\beta}}{2\beta} < 0$  のとき、「若年」.
- (ii)  $\frac{\alpha + \sqrt{2\beta}}{2\beta} > 0$ ,  $\frac{\alpha}{2\beta} < 0$  のとき、「成熟初期」.
- (iii)  $\frac{\alpha - \sqrt{2\beta}}{2\beta} < 0$ ,  $\frac{\alpha}{2\beta} > 0$  のとき、「成熟後期」.
- (iv)  $\frac{\alpha - \sqrt{2\beta}}{2\beta} > 0$  のとき、「老年」.

そしてこれらを分かりやすく表示すると図1.2.1のようになる。これをもとに Newling は世界の主要都市の経年変化を記述している。

最後に、人口密度分布に関する他の論文としては、文明による相異にまで言及している文献[16]を、よくまとめられている教科書としては文献[17]を挙げておく。

## 1.3 都市規模分布

1つの地域内にはさまざまな人口規模の都市が存在しているが、それらの分布を表現しようとするのが都市規模分布である。都市規模分布に関する理論としては、以下で説明する、ランクサイズ分布、対数正規分布、サイ

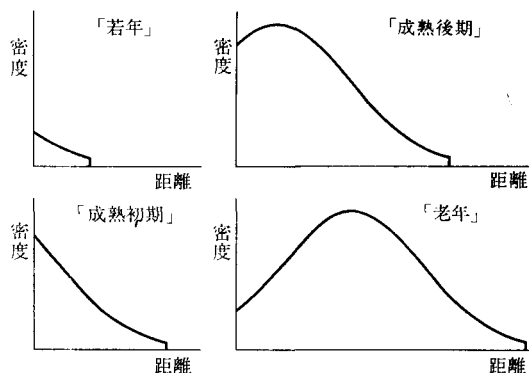


図 1.2.1 都市の人口密度による発展段階

モンモデル、マルコフ連鎖モデルの他に、中心地理論、経済学からのアナロジーなど多くの理論があるが、説明が繁雑になるので、ここでは省略する。

### 1.3.1 ランクサイズ分布

Zipf によって定式化されたもので、

$$R = \alpha P^{-\beta}$$

という形で表わされる(文献[18])。ここで  $R$  は、規模の大きい都市から順につけた都市のランクであり、 $P$  は、都市の人口、 $\alpha$ ,  $\beta$  はパラメータである。普通は、 $\beta$  がほぼ1の値をとるので、

$$R = \alpha P^{-1}$$

の形をとる。この分布は、小説に出てくる単語の数の分布などにも当てはまる分布であると言われている。しかし、この分布はまったく経験的なものなので、多くの人人がある仮定のもとに演繹的に導こうとした(文献[19], [20])。たとえば、Curry は、エントロピーの概念を用いて、

$$\frac{N!}{\prod_{q=1}^Q n_q} \rightarrow \max.$$

subject to

$$\sum_{q=1}^Q n_q = N$$

$$\sum_{q=1}^Q q n_q = Q$$

という問題を解いた。ここに、 $N$  は全都市数、 $n_q$  は人口  $q$  人の都市数、 $Q$  は総人口である。解はラグランジュ乗数法を用いて、スターリング近似をして、 $\mu = Q/N$  とおくと、

$$n_q = \frac{N}{\mu} e^{-\frac{q}{\mu}}$$

$$= n_1 \left(1 - e^{-\frac{q}{\mu}}\right)$$

が得られるが、これは負の指数型であり、ランクサイズルールとは少々異なっている。いっぽう、岡部は、順序

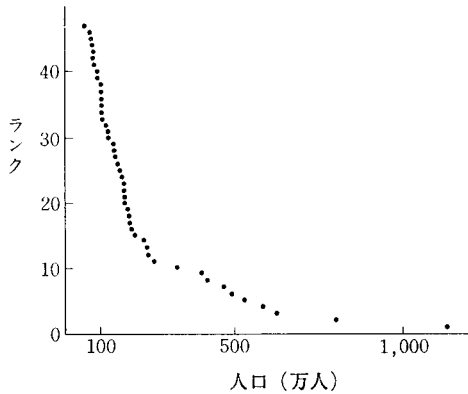


図 1.3.1 ランクサイズ分布(昭和50年県人口)

統計量を用いて演繹的に、つぎの式を導き出した(文献[21]).

$$R-1 = \alpha P^{-1}$$

ここに、 $R$ でなく  $R-1$  で与えられることは注目すべきである。

### 1.3.2 対数正規分布

これは、都市規模の頻度分布であり、

$$N = \gamma \log P$$

で与えられる。ここに、 $N$  は、人口  $P$  以下の都市数である。これも、ランクサイズ分布同様、図1.3.1, 図1.3.2からもわかるように、現実にフィットする分布である(文献[22])。

### 1.3.3 サイモンモデル

Simon は、都市規模  $P$  人の都市の集合の中の一つの都市に1人の人口が増える確率が、都市規模  $P$  の都市の集合の合計人口に比例するという仮定と、新しい都市が出現する確率が一定であるという仮定のもとに、安定状態といった条件のもとに、都市規模分布を導き出した。スターリング近似を用いると、解は、ランクサイズ分布と同じものに帰着されるが、岡部は、安定状態を加えると矛盾が生ずることを示し、サイモンモデルの一般化を行なった(文献[21])。

### 1.3.4 マルコフ連鎖モデル

これは Rogers らによって開発された、都市規模分布のダイナミックモデルである。まず、初期の都市規模分布ベクトルを  $\vec{w}_0$  とすると、つぎの期の分布ベクトルはつぎのように表現される。

$$\vec{w}_1 = S\vec{w}_0 + \vec{b}$$

ここに、 $\vec{b}$  は純出生人口分布ベクトル、 $S$  は推移確率行列である。第  $t$  期の分布ベクトルは、

$$\vec{w}_t = S^t \vec{w}_0 + (I + S + S^2 + \dots + S^{t-1}) \vec{b}$$

となるが、 $S$  の収束性を仮定すると、最終期の都市規模

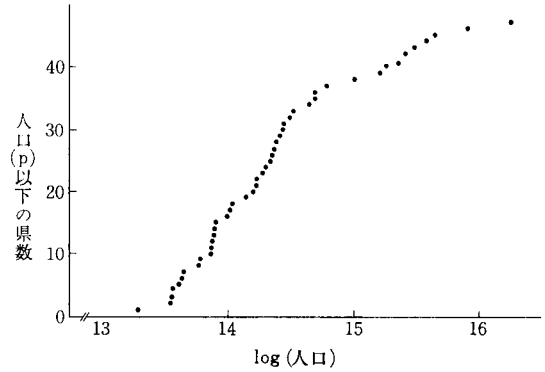


図 1.3.2 対数正規分布(昭和50年県人口)

分布ベクトル  $\vec{w}$  は、

$$\vec{w} = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{w}_t \\ = (I - S)^{-1} \vec{b}$$

で表わすことができるが、これは初期分布ベクトル  $\vec{w}_0$  によらないことを示している。

### 参考文献

- [1] Pielou, E. C., *An Introduction to Mathematical Ecology*, John Wiley, New York, 1964. (邦訳) 南雲仁一監訳, 数理生態学, 産業図書, 1974.
- [2] Getis, A. and B. Boots, *Models of Spatial Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [3] 腰塚武志, “道路網と交差点”, 都市計画, 103号 (1978), 36-41.
- [4] Dacey, M.F., “Two-Dimensional Random Point Patterns: A Review and an Interpretation,” *Papers of the Regional Science Association*, 13(1968), 41-55.
- [5] Fisher, R.A., “Note on the Efficient Fitting of the Negative Binomial Distribution,” *Biometrics*, 9, (1953), 197-200.
- [6] Dacey, M.F., “Modified Poisson probability law for point pattern more regular than random,” *Annals of the Association of American Geographers*, 54(1964), 559-565.
- [7] Clark, P.J. and F.C. Evans, “Distance to Nearest Neighbour as a Measure of Spatial Relationships in Population,” *Ecology*, 35 (1954), 445-453.
- [8] Rodgers, A., “A Stochastic Analysis of the Spatial Clustering of Retail Establishment,”

- Journal of American Statistical Association*, **60**  
(1965), 1094-1103.
- [9] King, L.J., *Statistical Analysis in Geography*, Prentice-Hall, New Jersey, 1969.  
(邦訳) 奥野隆史, 西岡久雄訳, 地域の統計的分析, 大明堂, 1973.
- [10] 奥野隆史, 計量地理学の基礎, 大明堂, 1977.
- [11] Haggett, P., A. Cliff and A. Frey, *Locational Analysis in Human Geography, Second Edition*, Edward Arnold, London, 1977.
- [12] Clark, C., "Urban Population Densities," *Journal of the Royal Statistical Society, Ser A*, **114**, Part 4 (1951), 490-496.
- [13] Clark, C., *Population Growth and Land Use*, Macmillan, London, 1967.  
(邦訳) 馬場啓之助監訳, 人口増加と土地利用, 大明堂, 1969.
- [14] 奥平耕造, 他, 就業および通勤輸送のシステムと人口配分計画, 首都圏整備委員会(1968).
- [15] Newling, B., "The Spatial Variation of Urban Population Densities," *Geographical Review*, **59**(1969), 242-252.
- [16] Berry, J.W., W. Simmons, and R.J. Tennant, "Urban Population Densities: Structure and Change," *Geographical Review*, **53** (1963), 389-405.
- [17] Northam, R.M., *Urban Geography*, John Wiley, New York, (1975).
- [18] Zipf, G. K., *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Cambridge Mass, Addison-Wisley, (1949).
- [19] 高見 章, "Rank Size Rule 研究," 東京大学工学部都市工学科修士論文, (1975).
- [20] 高見, 田中, 中村, "人の集まり方の確率的見方," *オペレーションズ・リサーチ*, **22**, 1 (1977) 31-39.
- [21] 岡部篤行, "都市規模分布に関する一連の研究," 東京大学工学部都市工学科博士論文, (1976).
- [22] Richardson, H.W., *The Economics of Urban Size*, Saxon House, Westmead, England, (1973).