フォーラム

賭けの数理-VII

竹内 啓

1. 簡単な賭けの再定式化

これまでは賭けについて，確率や配当率などはすべてわかっているものとして問題を論じてきた．しかし現実の問題においては，確率やその他の条件がわかっていないことも多い．今度はそのような問題を考えよう．

まず最も簡単な場合として，賭け方が1通りしかなくかつその結果は「勝」と「負」の2通りしかないような場合を考えよう．そうして「勝」の場合は賭け金はr倍になり「負」の場合は賭金はすべて失われてしまうものとしよう．

いま勝つ確率を p とすると，明らかに $p>1/r$ ならば，これは有利な賭け，$p<1/r$ ならば不利な賭けとなる．$p>1/r$ の場合，所持金 X_0 のうちπだけを賭けるとすれば，賭けの結果得る金額を X とすると，

$$E(\log X)=p\log(r\pi X_0+(1-\pi)X_0)+(1-p)\log(1-\pi)X_0$$

となるから，これを最大にするπの値を求めると，

$$\frac{\partial}{\partial\pi}E(\log X)=\frac{p(r-1)}{r\pi+(1-\pi)}-\frac{1-p}{1-\pi}=0$$

より，$\pi=(pr-1)/(r-1)$ となる．すなわちこれがブライマンの戦略を与える．

$p<1/r$ の場合には，とくに凸関数で表わされるような効用をもつ場合以外では，賭けを行なわないほうがよいということになる．

2. p 未知の場合

そこでいまpがわからない場合を考えよう．このような場合には，最初「試しに」何回賭けをやってみて，その結果からpを「推定」し，$p>1/r$ と判断されれば賭けを続け $p<1/r$ と判断したら賭けをやめるということが考えられる．この場合自分では賭けをせずに他人が賭けを行なうのを「見て」判断することは許されないとしよう．したがってもし $p<1/r$ ならば「試しに」賭けてみることによって，いくらかの金を失わなければならないことになる．また一度に賭けることのできる額には下限があって，あまり小さい額は賭けられないものとしよう．そうしなければ事実上「無料で」賭けてみることができることになるから，問題は意味を失うことになる．

問題を単純化して，1回に賭けることのできる額は一定であるとしよう．それを1としておく．また$r=2$とする．いま所持金額がc（cは正整数）であるとき，賭けるべきか，賭けるべきでないかを決める問題を考えよう．

3. ベイズ法

この場合pについて「何もわかっていない」としただけでは，これ以上議論を進めるのが困難であるから，その値はわからないが，それが大体どのような範囲にあるかについての確率分布は与えられているとしよう．この「確率分布」は同じような賭けのメカニズムについて，過去の経験から知られている頻度分布を表わすと考えてもよいし，あるいは賭けをする人の「判断」を表わすとしてもよい．確率の意味は主観的にせよ客観的にせよ，とにかく何らかの意味で「事前分布」が与えられているとしよう．そのような事前分布の密度を$f(p)$としよう．

いま賭けはN回まで(もしその前に所持金が無くなってしまわないなら) できるものとする．このとき最もうまく賭けたときに得られる期待金額は，c, N および f の関数になる．そこでそれを，

$$r^*(c,\ N,\ f)$$

と表わそう．ここで1回賭けを行なうと，その結果「勝っ」た場合には所得金額は$c+1$に，「負け」た場合には$c-1$ になる．また，それぞれの場合にpについての分布はつぎのような「事後分布」に変わる．すなわち勝った場合，

$$f^*(p)=pf(p)\Big/\int pf(p)dp$$

負けた場合，

$$f^{**}(p)=(1-p)f(p)\Big/\int(1-p)f(p)dp$$

である．

ところで，最初に賭けを行なわないことにした場合，2回目以降に賭けを始める理由はないから，決定として考えられるのは，賭けを全くしないことにするか，第1回目に賭けるかである．もし賭けをしないならば，当然

所持金額は変わらない．したがって期待金額を最大にするように行動するとすれば，

$$r^*(c, N, f)=\max(c, \tilde{r}^*(c, N-1, f))$$

という関係が成り立たねばならない．ただしここで $\tilde{r}^*$ は賭けを行なうときの期待金額であって，それは，

$$\tilde{r}^*(c, N-1, f)=r^*(c+1, N-1, f^*)\int pf(p)dp$$
$$+r^*(c-1, N-1, f^{**})\int(1-p)f(p)dp$$

と表わされる．これは，勝った場合と負けた場合の状況をそれぞれ考えてみればわかる．

ここで問題は1つのDP問題として表現することができたことになる．

4. ベータ事前分布の場合

ここで明らかにつぎの関係が成り立つ．まず，

$$r^*(c, 0, f)=c$$

したがって $\quad \tilde{r}^*(c, 0, f)=\int(c+1)pf(p)dp$

$$+\int(c-1)(1-p)f(p)dp$$
$$=c+\int(2p-1)f(p)dp$$
$$=c+2\tilde{E}(p-1/2)$$

ただし，$\tilde{E}$ は p の事前分布 $f(p)$ についての平均を表わす．それゆえまた，

$$r^*(c, 1, f)=c+\max\{0, 2\tilde{E}(p-1/2)\}$$

となる．

先へ進むために，さらに $f(p)$ を特定化して，事前分布としてつぎのようなベータ分布を考えよう．

$$f(p)=p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}/B(\alpha, \beta)$$

そうすると，これに対する事後分布もベータ分布になる．その母数は，もし賭けに勝てば $\alpha+1$, β に，負ければ α, $\beta+1$ に変わる．したがってこのようなベータ分布に対応する r^* の値を $r^*(c, N, \alpha, \beta)$ と表わしておくと，

$$r^*(c+1, N-1, f^*)=r^*(c+1, N-1, \alpha+1, \beta)$$
$$r^*(c-1, N-1, f^{**})=r^*(c-1, N-1, \alpha, \beta+1)$$

と表わすことができる．またここで，

$$\tilde{E}(p)=\int pf(p)dp=\alpha/(\alpha+\beta)$$

であるから，

$$\tilde{r}^*(c, N-1, f)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}r^*(c+1, N-1, \alpha+1, \beta)$$
$$+\frac{\beta}{\alpha+\beta}r^*(c-1, N-1, \alpha, \beta+1)$$

と表わすことができる．したがって，

$$r^*(c, N, \alpha, \beta)$$
$$=\max\Big\{c, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}r^*(c+1, N-1, \alpha+1, \beta)$$
$$+\frac{\beta}{\alpha+\beta}r^*(c-1, N-1, \alpha, \beta+1)\Big\}$$

となる．この関係と，

$$r^*(c, 0, \alpha, \beta)=c, \qquad r^*(0, N, \alpha, \beta)=0$$

から $r^*(c, N, \alpha, \beta)$ が順次定められる．

まず $N=1$ ならば，

$$r^*(c, 1, \alpha, \beta)=c \qquad (\alpha\leqq\beta \text{ のとき})$$
$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(c+1)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}(c-1)$$
$$=c+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \qquad (\alpha>\beta \text{ のとき})$$

となる．つぎに $N=2$ のときには，いくつかに場合を分けて考えねばならない．

a) $\alpha\leqq\beta-1$ のときには，

$$r^*(c+1, 1, \alpha+1, \beta)=c+1$$
$$r^*(c-1, 1, \alpha, \beta+1)=c-1$$

だから，

$$r^*(c, 2, \alpha, \beta)=c$$

b) $\beta-1<\alpha\leqq\beta+1$ のときは，

$$r^*(c+1, 1, \alpha+1, \beta)=c+1+\frac{\alpha-\beta+1}{\alpha+\beta+1}$$
$$r^*(c-1, 1, \alpha, \beta+1)=c-1$$

だから，

$$\tilde{r}^*(c, 1, \alpha, \beta)=c+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$
$$=c+\frac{\alpha(2\alpha+\beta+2)-\beta(2\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

となる．ゆえに，$\alpha(2\alpha+\beta+2)\leqq\beta(2\alpha+\beta+1)$ ならば，

$$r^*(c, 2, \alpha, \beta)=c$$

$\alpha(2\alpha+\beta+2)\geqq\beta(2\alpha+\beta+1)$ ならば，

$$r^*(c, 2, \alpha, \beta)=c+\frac{(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta+1)+\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

となる．

c) $\alpha>\beta+1$ ならば，同様にして，

$$r^*(c, 2, \alpha, \beta)=c+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha(\alpha-\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$
$$+\frac{\beta(\alpha-\beta-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$
$$=c+\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$$

となる．これに対応する具体的な賭け方は，

i) $\alpha(2\alpha+\beta+2)\leqq\beta(2\alpha+\beta+1)$ のとき，賭けない．

ii) $\alpha(2\alpha+\beta+2)>\beta(2\alpha+\beta+1)$ かつ $\alpha\leqq\beta+1$ のとき，1回賭けて，勝ったらもう1回賭け，負けたら賭けをやめる．

iii) $\alpha>\beta+1$ ならば2回続けて賭ける，

ということになる．

$N=2$ でもこのようにかなり問題は複雑になるから，より一般の場合は簡単に解析的な解は得られない．