賭けの数理-VI

竹内　啓

1.

今度は不利な賭けの場合について考えよう．すなわち i 番目のくじの j 番の目が出たときの単位当りの利得を r_{ij}，j 番の目の出る確率を p_j とするとき．すべての i について，

$$\sum_j r_{ij}\ p_j<1$$

となる場合である．この場合にはいつまでも賭けをつづければ確実に損をすることは優マルチンゲールの理論から示される．したがって一般にはこのような場合には賭けはしないほうがよいといえるであろう．

しかしながら，もし一定の金額があれば何か重要なことが可能になるが，現在の所持金額はそれには足りないというような場合，とにかく「イチかバチか」賭けてみるということは考えられる．すなわち今所持金額を1とするとき，これを是が非でも $R(>1)$ までふやしたいという場合を考えよう．もちろん一般にはそれを必ずふやすということは不可能であるから，R までふやすことのできる確率をなるべく大きくすることを考えよう．いま X_t を t 回賭けをした後の所持金額とすると，このことは，

$$\Pr\{\max_t X_t\geqq R\}$$

を最大にするような賭けの戦略をえらぶことに帰着する．

いま不利な賭けの場合 $E(X_{t+1}|X_t)\leqq X_t$ であって，$\{X_t\}$ は優マルチンゲールとなる．また $0\leqq X_t$ だから，結局確率1で $X_t\to X_\infty(t\to\infty)$ が存在し，

$$E(X_\infty)<1$$

となる．上記の問題は(一度 R を越えたら，そこで賭けをやめれば $X_{T+1}=\cdots\cdots=X_\infty$ となるから，

$$\Pr\{X_\infty\geqq R\}$$

を最大にする問題であると考えられる．ところでこのことは，

$$u(X)=1 : X\geqq R \qquad u(X)=0 : X<R$$

とおけば $E(u(X_\infty))$ を最大にすることに等しい．そこでより一般に任意の効用関数 $u(X)$ に対して $E(u(X_\infty))$ を最大にすることを考えよう．

2.

いままったく賭けをしないとすれば，$X_\infty=X_0=1$ となることは明らかである．したがって賭けをすることが積極的な意味をもつためには，

$$E(u(X_\infty))>E(u(1)) \qquad (2.1)$$

とならねばならない．そこでどのような「効用関数」u について，上記の不等式が成り立つような戦略が存在するかを調べよう．

最初に u が凹関数（すなわち $\partial^2u/\partial x^2<0$．このことはいわゆる「貨幣の限界効用減少」を意味する）の場合には(2.1)成り立ち得ないことを証明しよう．ジェンセンの不等式を用いれば u が凹関数のとき，

$$E\{u(X_{t+1})|X_t\}\leqq u\{E(X_{t+1}|X_t)\}$$

そうして u は単調増加関数と考えられるから，

$$u\{E(X_{t+1}|X_t)\}\leqq u(X_t)$$

したがって，　$E(u(X_{t+1}))\leqq E(u(X_t))\quad t=0, 1, \cdots$

が得られる．ゆえに $E(u(X_\infty))\leqq u(X_0)=u(1)$ となる．すなわちいわゆる「リスクをきらう，risk-averse な効用をもつ人」は，不利な賭けには手を出さないほうがよいということになる．これは当然である．

他方効用関数が凸ならば，積極的に賭けたほうがよい場合が生ずる．一番簡単な場合として賭け方が1通りしかない場合を考えよう．このとき，t 回目の賭けにおいて1単位の賭け金は Z_t になるとすれば，不利な賭けであるから $\mu=E(Z_t)<1$ となる．この場合賭け方の戦略としては，各回において所持金のうち賭ける金額 $\pi_t, t=1, 2\cdots\cdots$ である．そうすると，

$$X_t=\pi_tZ_t+(1-\pi_t)X_{t-1} \quad t=1, 2\cdots$$

という関係が成立する．いま1回だけしか賭けを行なわないとすれば，

$$E(u(X_1))=E[u\{\pi Z_1+(1-\pi)\}]$$

を最大にするように $\pi(=\pi_1)$ を定めればよい．そこでいまこれを π の関数として $\phi(\pi)$ と表わせば，u が2回微分可能であるとすると，

$$\frac{\partial\phi}{\partial\pi}=E[(Z_1-1)u'\{\pi Z_1+(1-\pi)\}]$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\pi^2}=E[(Z_1-1)^2u''\{\pi Z_1+(1-\pi)\}]$$

となる．u が凸関数であるとすれば $u''>0$ であるから，

$$\partial^2\phi/\partial\pi^2>0$$

となる．すなわちϕはπの関数として凸関数になる．したがって $0\leqq\pi\leqq1$ の範囲での ϕの最大値はその両端，すなわち $\pi=0$ または $\pi=1$ で最大になる．すなわちまったく賭けをしないか，所持金を全部賭けるかのどちらかが最適であることになる．そこで，

$$E(u(Z_1))>u(1)$$

ならば，全額を賭ける，すなわち「ノルカソルカ」一発に「勝負する」のがよいということになる．もし逆に $E(u(Z_1))<u(1)$ ならば，賭けをまったくしないで現状に甘んずるよりしかたないことになる．

以上の議論は u が凸であれば，必ずしも（すべての点で） 2次微分可能でない場合にも成り立つことは示される．

つぎに最初の所持金額がcであったときの最適戦略は同じ論理によって，

$$E(u(cZ_1))\gtreqless u(c)$$

によって $\pi_1=1$ または 0 になる．そこで一般に最大T回 ($T\geqq2$) 賭けを行なった後，賭けをやめる場合を考えよう．このとき最初の所持金額がcであるとき，最適戦略をとった場合の期待効用を，

$$v^*_T(c)=\max_{\pi_1,\cdots,\pi_T,X_0=c} E\{u(X_T)\}$$

とおくと，ダイナミックプログラミングの「最適性の原理」により，

$$v_T^*(c)=\max_{\pi_1} E(v^*_{T-1}(X_1)) \qquad T=2,3,\cdots$$

の関係が成立する．

$$v_1^*(c)=\max\,[E\{u(cZ_1)\},\ u(c)]$$

となる．ところで $E(u(cZ_1))$, $u(c)$ はともにcの凸関数であるから，$v_1^*(c)$ も凸関数である．それゆえ上記の議論をくり返せば，

$$v_2^*(c)=\max\,[E\{v_1^*(cZ_1)\},v_1^*(c)]$$

となることがわかる．したがって数学的帰納法により，

$$v_T^*(c)=\max[E\{v_{T-1}^*(cZ_1)\},v_{T-1}^*(c)]$$

が成り立つ．そうして最適戦略においては，

$$\pi_t^*=0 \quad \text{または}\ 1,\ t=1,\ 2,\cdots,T$$

となる．またこのとき $\pi_1^*=0$ ならば $\pi_2^*=\cdots=\pi_T^*=0$ となるものとしてもよい． すなわち，もしあるjに対して $\pi_1^*=\cdots=\pi_j^*=0,\pi^*_{j+1}=0$ ならば，

$$\pi_1{}^0=1,\ \pi_i{}^0=\pi_{j+1}{}^*,\cdots,\ \pi_{T-j+1}{}^0=\cdots\pi_T{}^0=0$$

としても，結果は同じになる．ところがこのような$\pi_t{}^0$は賭けを $T-j$ 回でやめる戦略と同じであるから，このときの最後の所持金額を $X_T{}^0$ とすれば，

$$E(u(X_T{}^0))=E(u(X_{T-j}{}^0))\leqq\max E(u(X_T))$$

となる．したがって解が一義的ならばこのような形のπ_t^* は解にならないし，そうでない場合は $\pi_t\neq0$ となる同等な解が存在する．

同じように考えれば結局最適な解としては $\pi_t^*=0$ ならば $\pi_{t+1}^*=\cdots\cdots=\pi_T^*=0$ となるものだけを考えればよいことがわかる．また前記の議論により $\pi_t^*=1$, 0 は X_{t-1} および $T-t$ の値によって決められることは明らかである．したがって最適戦略はつぎのような構造をもつことがわかる．すなわち各kに対し，正の実数の部分集合 R_k^* が存在し，

$$X_{t-1}\in R_{T-t}^* \quad \text{ならば}\quad \pi_t^*=1$$
$$X_{t-1}\notin R_{T-t}^* \quad \text{ならば}\quad \pi_t^*=0$$

となる．そうして $R_1^*\subset R_2^*\subset\cdots$ が成立する．いいかえれば X_t が R_{T-t-1}^* の外に出るまで全額を賭けつづけるのがよいということになる．

ここで $T\to\infty$ とすると，結局 $\bigcup_{t=1}^{\infty}R_t^*=R_\infty^*$ とおいて X_t が R_∞^* の中に入っている限りは賭けをつづけるのがよいということになるように思われるかも知れない．しかしすでに何回ものべたように，無限に賭けをつづけていれば，最後には必ず全額を失ってしまう．すなわち $X_\infty\equiv0$ となる．すなわちこの場合には，

$$E(u(X_\infty))<\lim_{t\to\infty}E(u(X_t))$$

であって，等号が成り立たないことになる．そこで十分大きいTを取り，X_t^* が R_∞^* の外に出るか $t=T$ となれば賭けを止めることにすれば，

$$E(u(X_\infty))=E(u(X_T^*))$$

の値を，可能な上限にいくらでも近づけることができる．

つまり不利な賭けの場合には，もし賭けをするならば必ず全額を賭けること，（これを「捨身の戦略」bold strategy という．）ただし十分多数回賭けつづけたら止めること が最もよい戦略であることがいえるのである．

3.

以上の議論は賭け方，すなわち「くじ」が何本もある場合にも簡単に拡張できる．すなわちk本のくじのそれぞれについて単位金額当りの利得を $Z_i, i=1,\cdots,k$ とすると，i番目のくじをπ_iだけ買うときの期待利得は，$\pi_0=1-\sum\pi_i$ とすると，

$$E(u(\pi_1Z_1+\cdots+\pi_kZ_k+\pi_0))$$

となるが，ここでuが凸関数ならば，これは$\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_k$に関する凸関数になるから，これを最大にする値はある1つの $i^*(0\leqq i^*\leqq k)$ について $\pi_i^*=1$ となる．すなわちどれか1つのくじに全額を投ずるか，あるいはまったく賭けをしないのがよいということになる．

したがって $k=1$ の場合の議論とまったく平行的につぎのことがいえる．すなわち実数の $k+1$ 個の集合 $R^*(i)$ $i=0,\ 1,\cdots,k$ が存在し，「ほとんど」，最適な戦略は十分大きいTをとって $t\leqq T$ のときは $X_t\in R^*(i)$ ならば $\pi_{t+1,i}^*=1$とし $t>T$ ならば$\pi_{t,0}^*=1$とするものとなる．