総合報告

整数/組合せ計画法の現状　その3
種々の実用的な技法

整数計画法研究部会　今野　浩
岡本吉晴

これまで2回にわたって，整数計画法における分枝限定法と構造的アプローチについてサーベイしてきたが，今回はそれ以外の方法の中で実用上重要なヒューリスティック法，Bendersの分割算法，双対法，パラメトリック分析などについて概説しよう．

1. ヒューリスティック法

分枝限定法や切除平面法のような厳密に大域的な最適解を求めるアルゴリズムは，一般に整数変数の指数関数的なオーダーの手間を必要とする．したがって，取り扱う問題の規模が大きくなると，急に解けなくなるのが普通である．ヒューリスティック法（近似法ともいう）は，大域的な最適解を求めることを諦めて，局所的な最適解，あるいはかなり良い実行可能解を少ない手間で求めようとするものである．実際，大規模な整数計画問題を解く場合，厳密な最適解でなくても，かなり良い実行可能解が得られればよいとする場合が多く，手頃な計算費用で実用的な解を求めるには，ヒューリスティック法は"現場"で非常に役に立つ方法である．

ヒューリスティック法は，特殊な問題に多くの工夫が考えられているが [14, 20, 21]，一般の整数計画問題では，純整数計画問題に対しては，Echols-Cooper [4]，Hillier [11]，混合整数計画問題に対しては，Ibaraki et al. [12]，Sorimachi et al. [22]がある．また，ヒューリスティック法で求めた実行可能整数解を分枝限定法のバウンドとするという形で分枝限定法と結びつける方法が，Jeroslow-Smith [13] で検討されている．

以下，一般の整数計画問題に対するヒューリスティック法を説明するが，この方法は，(i)実行可能整数解を改善して局所最適解を求めるフェーズと，(ii)1つの実行可能整数解を求めるフェーズとに分けることができる．

1.1 局所最適解の探索

ヒューリスティック法は，一般に現在の実行可能整数解の近傍を探して，目的関数を改善する解を求めてゆく方法である．整数変数を $y_j, j=1,\cdots,l$ とし，その現在の実行可能整数解の値を $\bar{y}_j, j=1,\cdots,l$ としたとき，$\bar{y}=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_l)^t$ の R-近傍 $N_R(\bar{y})$をR個までの要素が$\bar{y}$の要素と＋1，または －1 だけ異なる l-ベクトルの集合と定義する．ヒューリスティック法の局所最適解の探索は，現在の整数解$\bar{y}$のR-近傍 $N_R(\bar{y})$に属する実行可能な整数解のうち，目的関数を改善するものを探す方法である．このようにして得られた新しい整数解に対して，さらにその R-近傍を探し，R-近傍内には目的関数を改善するものがなくなった時，現在の解は局所最適解（R-最適解）となり，探索が終了する．

純整数計画問題：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \\ \text{条　件} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ge b_i, \quad i=1,\cdots,m \\ & y_j \text{は非負整数}, \ j=1,\cdots,n \end{array}\right\} \quad (1.1)$$

に対して，Hillier [11] は2個までの整数変数の値を同時に動かすことを行なっている．1変数だけを動かす探索は，現在の実行可能解を $\bar{y}_j, j=1,\cdots,n$ としたとき，つぎのような量：

$$s_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j-b_i \ge 0 \quad (1.2)$$

$$d_{ij}=\begin{cases} s_i/|a_{ij}| & c_j a_{ij}>0 \text{ の場合} \\ \infty & \text{上記以外の場合} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$d_j=\min_i [d_{ij}] \quad (\text{[ ]はガウス記号}) \quad (1.4)$$

を計算し，$r_k=\max_j |c_j| d_j$ を与える変数を y_k としたとき，$r_k>0$ ならば

$$\left.\begin{array}{ll} y_k:=\bar{y}_k-1, & c_k>0 \text{ のとき} \\ y_k:=\bar{y}_k+1 & c_k<0 \text{ のとき} \end{array}\right\} \quad (1.5)$$

として解を改善する．$r_k=0$ ならば，現在の解$\bar{y}$は 1-近傍では局所最適である．この時は2変数を同時に動かすことを考える．この場合は，y_jを目的関数を改善する方向に y_j を1だけ動かしたとき，$|c_k|<|c_j|$ なる y_k に対して，目的関数を全体として良くして，かつ実行可能

解となる y_k の変動量を求める．このような y_k の変動量が存在すれば，y_j と y_k をこの変動量にしたがって同時に動かして解を改善するのであるが，詳しくは文献[11]を参照されたい．

混合整数計画問題：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & z=\sum_{j=1}^{n1} c_j x_j+\sum_{j=1}^{n2} d_j y_j \\ \text{条　件} & x_{n_1+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n1} a_{ij}x_j-\sum_{j=1}^{n2} d_{ij}y_j, \\ & \qquad i=1,2,\cdots,m \\ & x_j\geq 0, \qquad j=1,2,\cdots,n_1+m \\ & y_j \text{は非負整数}, \ j=1,2,\cdots,n_2\end{array}\right\} \tag{1.6}$$

に対してはつぎのように拡張する．現在の実行可能整数解 $\bar{y}_j, j=1,\cdots,n$ に対して，連続変数 x_j のみに関する線形計画問題の最適解のシンプレックス・タブローが，

$$\left.\begin{array}{l} z=\sum_{j=1}^{n1}\alpha_{0j}(-t_j)+\sum_{j=1}^{n2}\beta_{0j}(-y_j)+\alpha_{00} \\ u_i=\sum_{j=1}^{n1}\alpha_{ij}(-t_j)+\sum_{j=1}^{n2}\beta_{ij}(-y_j)+\alpha_{i0}\end{array}\right\} \tag{1.7}$$

のようになっているとする．このとき，整数変数 y_j の値を $\bar{y}_j\pm 1$ に動かすと，目的関数 z は，

$$z\geq\alpha_{00}\mp\beta_{0j} \tag{1.8}$$

となるから，β_{0j} の符号を見れば y_j の値をどちらの方向に動かせば解が改善される可能性があるかが分る．y_j を動かす優先順位は，Sorimachi et al. [22] では単に $|\beta_{0j}|$ の大きい順にとっているが Ibaraki et al. [12] では，y_j を＋または－の方向に動かしてゆく最適化を，右辺パラメトリックで行なった時の最初の1反復当りの目的関数の改善量のような量の降順としている．

2つの整数変数を同時に±1だけ動かす場合（[22]）は，一般に y_k, y_l を $(+1,+1)$, $(-1,-1)$, $(+1,-1)$, $(-1,+1)$ だけ動かすことが考えられるから $1\leq k,l\leq n_2$ の $k, l(k\neq l)$ のすべての組み合わせで $(\beta_{0k}+\beta_{0l})$ と $(\beta_{0k}-\beta_{0l})$ の符号で，y_k, y_l を動かす方向を定めればよい．

1.2 初期実行可能解の探索

前節で述べた局所最適解をヒューリスティック法で探索するためには，出発点となる1つの実行可能整数解が必要である．そこで，なるべく良い実行可能整数解を簡便に求めることを考えなければならない．

純整数計画問題 (1.1) に対しては，2段階シンプレックス法のフェーズ1のように，実行不可能量

$$I(y)=\sum_{i=1}^{m}\max(0, b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j) \tag{1.9}$$

を最小化するようにヒューリスティックな探索を行なうことが考えられる．この場合，どの変数を＋1 あるいは－1 だけ変化させるのかは，たとえば，

$$q_j^-=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\max(0,-s_i+a_{ij}) & y_j>0 \text{ の場合} \\ +\infty & y_j=0 \text{ の場合}\end{cases} \tag{1.10}$$

$$q_j^+=\sum_{i=1}^{m}\max(0,-s_i-a_{ij}) \tag{1.11}$$

として

$$q_k^*=\min_j\{q_j^+, q_j^-\} \tag{1.12}$$

を与える y_k を選択するというルールに従えばよい．この時，$q_k^*>I(\bar{y})$ ならば実行不可能であり $q_k^*=0$ となれば，これで実行可能解が得られたことになる．

ここではなるべく良い実行可能整数解を求めたいわけであるから，実行可能解を探索する出発点は，問題(1.1)の連続問題（整数制約を取り除いた線形計画問題）の最適解を小数点以下四捨五入した解を採用するのがよいであろう．ところが，この解から探索を開始して，実行可能整数解が求まらなかった場合，他の出発点を適当に捜してそこから再び実行可能整数解の探索を始めなければならない．Hillier [11] では，線形探索と称して，つぎのような方法でこの出発点とするものを捜し出している．

連続問題の最適解を $\hat{y}$，対応する基底変数を $\hat{y}_B$，非基底変数を $\hat{y}_N$ として，

$$\hat{y}=(\hat{y}_B,\hat{y}_N)=(B^{-1}b, 0) \tag{1.13}$$

とする．また，等号が成立している制約式の添字集合を

$$E\equiv\{i\,|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_j=b_i\} \tag{1.14}$$

とおき，基底変数のうち，スラック変数以外のものの変数番号の集合を L とする．この時，右辺ベクトルをつぎのように変えたものを b' とする．

$$b_i'=\begin{cases} b_i+(1/2)\sum_{j\in L}|a_{ij}|, & i\in E \\ b_i, & i\notin E\end{cases} \tag{1.15}$$

この時，

$$y'=(B^{-1}b', 0) \tag{1.16}$$

とし，y^* を y' の各要素を四捨五入した整数ベクトルとすると，

$$(y_j^*=[y_j'+0.5],\quad j\in L)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^*\geq b_i,\quad i\in E \tag{1.17}$$

となる．この時，一般に，

$$\sum_{j\in L} a_{ij}y_j^*\geq b_i,\quad i\notin E \tag{1.18}$$

$$y_j^*\geq 0,\qquad j\in L \tag{1.19}$$

になるとは限らないので，点 $\hat{y}$ と y' とを結んだ線分

$$p\equiv\{x\,|\,x=\alpha\hat{y}+(1-\alpha)y', \alpha\in[0,1]\} \tag{1.20}$$

上を適当なきざみ幅で，$\hat{y}$ から始めて何点かとり，それぞれの点の要素を四捨五入した整数ベクトルを実行可能解探索の出発点とする．

Ibaraki et al. [12] では，混合整数計画問題に対して，Hillier の線形探索をつぎのように拡張している．混合整数計画問題 (1.5) に対応して，つぎのような線形計画問題を考える．

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \lambda \\
\text{条　件} & x_{n_1+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n1} a_{ij}x_j-\sum_{j=1}^{n2} f_{ij}y_j \\
 & \qquad -\lambda,\quad i=1,2,\cdots,m \\
 & \sum_{j=1}^{n1} c_j x_j+\sum_{j=1}^{n2} d_j y_j=u \\
 & x_j\geq 0,\qquad j=1,\cdots,n_1+m \\
 & y_j\geq 0,\qquad j=1,\cdots,n_2
\end{array}
\right\}\quad (1.21)
$$

ただし，係数行列は $\sum_j a_{ij}^2+\sum_j f_{ij}^2=1$ となるようにスケーリングしておく．上記の問題の解を $\bar{\lambda}(u)$, $\bar{x}(u)$, $\bar{y}(u)$ とすると，

$$\bar{\lambda}(u)\geq\frac{1}{2}\sqrt{n_2} \qquad (1.26)$$

ならば，$\bar{y}(u)$の各要素を小数点以下四捨五入で丸めた整数ベクトル $\langle\bar{y}(u)\rangle$ は，実行可能整数解となっている．ところで，この問題は，混合整数計画問題 (1.5) の連続問題の最適解から始めて，u の値をそれに対応する目的関数値から徐々にふやしてゆくという右辺パラメトリックによって計算するのがよいであろう．この右辺パラメトリックの反復を適当な回数，p 回（たとえば，λ の値が (1.26) を満足するまで）行なって，順に得られた解を (x^i, y^i), $i=1,\cdots,p$ とすると，これらの点を連続問題の最適解 $(\hat{x},\hat{y})$ から順に結んでいった折れ線 T の上を $(\hat{x},\hat{y})$ から適当なきざみ幅で何点かとり，それぞれの点の y の要素を四捨五入して丸めた整数ベクトルを実行可能解探索の初期点とするのである．

2. Benders の分割算法

混合整数計画問題：

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & cx+dy & \\
\text{条　件} & Ax+Ey\geq b & (A\in R^{m\times n}, E\in R^{m\times k}) \\
 & x\geq 0 & (x\in R^n) \\
 & 0\leq y\leq a,\quad y\text{は整数} & (y\in R^k)
\end{array}
\right\}\quad (2.1)
$$

において，整数変数 y の次元 k が比較的小さい場合に，y をパラメータ的に扱って，整数部分と実数部分を切離して解く Benders の分割算法がある．いま，y をある値に固定したときに得られる x に関する最小化問題：

$$
L(y):\left.
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & cx \\
\text{条　件} & Ax\geq b-Ey,\quad x\geq 0
\end{array}
\right\}\quad (2.2)
$$

を考え，その最適値を $w(y)$ とおくと (2.1) は，

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & dy+w(y) \\
\text{条　件} & 0\leq y\leq a,\quad y=\text{整数}
\end{array}
\right.\quad (2.3)
$$

と書き直される．$L(y)$ に線形計画法の双対定理を適用すれば，

$$
\begin{aligned}
w(y)&=\min\{cx\,|\,Ax\geq b-Ey,\ x\geq 0\} \\
&=\max\{(b-Ey)^t u\,|\,A^t u\leq c,\ u\geq 0\} \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

である．以下簡単のため，

$$U=\{u\in R^m\,|\,A^t u\leq c,\ u\geq 0\} \qquad (2.5)$$

は有界であるものと仮定しよう．このとき U は有限個の端点をもつので，それらを $u^1, u^2, \cdots, u^T$ とおくと，線形計画法の基本定理により，$w(y)$ は，

$$w(y)=\underset{1\leq l\leq T}{\mathrm{mix}}(b-Ey)^t u^l \qquad (2.6)$$

と表わされる．したがって (1.1) は，結局，

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & dy+\underset{1\leq l\leq T}{\max}(b-Ey)^t u^l \\
\text{条　件} & 0\leq y\leq a
\end{array}
\right.\quad (2.7)
$$

と等価になるが，これはまた，

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z \\
\text{条　件} & z\geq dy+(b-Ey)^t u^l, l=1,\cdots,T \\
 & 0\leq y\leq a,\ y\text{は整数}
\end{array}
\right.\quad (2.8)
$$

と書くこともできる．この問題は，$k+1$ 個の変数と，$T+k$ 個の制約式から成る純整数計画問題であるが，一般に T はきわめて大きな数なので，これを直接解くのは得策でない．しかしこれらの制約式のうち，一般に最適解において等号が成立するものは比較的少数であることを予想して（この予想は線形計画問題の場合と異なり y に整数条件が加わっているので必ずしも正しくない [1]）Benders [3] はつぎのようなアルゴリズムを提唱した：

ステップ 1　U のいくつかの端点 $u^l, l=1,\cdots,s(\leq T)$ が得られているものとして，純整数計画問題：

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & z \\
\text{条　件} & z\geq dy+(b-Ey)^t u^l,\ l=1,\cdots,s \\
 & 0\leq y\leq a,\ y\text{は整数}
\end{array}
\right\}\quad (2.9)
$$

をとき，その最適解を (z^s, y^s) とおく．

ステップ 2　線形計画問題 $L(y^s)$をときその最適乗数を u^{s+1}とする．もし，

$$z^s=dy^s+(b-Ey^s)^t u^{s+1} \qquad (2.10)$$

となっていれば，ステップ3へゆき，そうでなければ，u^{s+1} に対応する制約式を (2.9) に追加し，$s:=s+1$ とおいて，ステップ1にもどる．

ステップ 3　線形計画問題：

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & cx \\
\text{条　件} & Ax\geq b-Ey^s,\quad x\geq 0
\end{array}
\right.\quad (2.11)
$$

をとき，その最適解を x^s として停止する．

z^sは，単調増大で，それらは各々 (2.1) の最適値の下限を与える．一方，$dy^s+(b-Ey^s)^t u^s$ は，最適値の上限を与えるから，ステップ2で (2.10) が成立したとき，z^sは (2.1) の最適値となっており，このとき，ステップ3で得た (x^s, y^s) が (2.1) の最適解となる．

Bendersは同時に，このアルゴリズムが有限収束性をもつことを示したが，この方法は，純整数計画問題を繰り返し解かなくてはならないという難点をもつため，実際には余り利用されなかったようである．しかし，最近この方法は実用上も有用なアルゴリズムとして再浮上し

つつある．例えば Geoffrion-Graves [8] は，このアルゴリズムを大型の分配システム最適化問題に適用して，純整数計画問題を1回解くだけで，最適条件（2.10）が満たされたと報告している．

また，McDaniel-Devine [16] は，Benders の分割算法のステップ1において (2.9) のかわりに y の整数条件を外した問題：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{最小化} & z \\ \text{条 件} & z \geq dy + (b-Ey)^t u^l,\ l=1,\cdots,s \\ & 0 \leq y \leq a \end{array}\right\} \quad (2.9)'$$

を解き，これを条件(2.10)が成立するまで繰り返し（これは（2.1）の連続問題に対して，Benders の分割算法を適用していることに相当する），(2.10) が成立したとき(2.9)′において等号が成り立っている不等式に対応する U の端点を $u^1,\cdots,u^s$ とおいて，これを用いて本来の Bendersの分割算法をスタートさせると，たかだか数回純整数計画問題（2.9）を解くだけで（2.1）の最適解が得られると報告している．これらの事実の一般性については，今後の実験に待つべき部分が多いが，k が比較的小さい問題，もしくは特別な型の問題に対しては有望なアルゴリズムである．

3. 双対法

第1稿で詳しく述べたとおり，分枝限定法を用いて整数計画問題を解く場合，列挙木のサイズの増大を食止め早く最適解を得るには，最適目的関数値のよい推定値を用いることが重要である．この推定値を得る方法としては古くからいろいろなものが考えられているが，最近，大型問題を解くうえで双対概念を用いる方法の有効性が強く主張されている [6, 8]．そこでこれを説明するためつぎのような整数計画問題：

$$\left.\begin{array}{lll} \text{最小化} & cx & \\ \text{条 件} & Ax \geq a & (A \in R^{m_1 \times n}) \\ & Dx \geq d & (D \in R^{m_2 \times n}) \\ & x \text{ は非負整数} & \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

を取り上げよう．ここでは $A \in R^{m_1 \times n}$は，一般的な行列であるのに対し，$D \in R^{m_2 \times n}$ は，整数計画問題として解きやすい構造（たとえば，ネットワーク型など）をもつ場合を想定する．

(3.1) の目的関数値の下限として従来良く使われてきたものに，

$$\bar{v} = \min\{cx \mid Ax \geq a, Dx \geq d, x \geq 0\} \quad (3.2)$$

$$v(\lambda) = \min\{cx + \lambda(a - Ax) \mid Dx \geq d,\ x: \text{非負整数}\} \quad (3.3)$$

などがある．ここで，$0 \leq \lambda \in R^{m_1}$は，適当に選んだラグランジュ乗数である．($\bar{v}, v(\lambda)$ の右辺の問題はいずれも (3.1)に比して少ない手間で解けることに注意) (3.1)の最適目的関数値を $v(P)$ としたとき，

(i) $\bar{v} \leq v(P)$ (3.4)

(ii) $v(\lambda) \leq v(P), \quad \forall \lambda \geq 0$ (3.5)

が成り立つ．また，線形計画法における双対定理により $\bar{v}$ の右辺の線形計画問題の制約 $Ax \geq a$ に対応する最適乗数を $\bar{\lambda}$ とすれば，

(iii) $\bar{v} < \infty$ ならば $\bar{v} \leq v(\bar{\lambda}) \leq v(P)$ (3.6)

となる．このように $\bar{v}, v(\lambda)$ は，いずれも $v(P)$ の下限となるため，これを $v(P)$ の推定値とする方法がよく用いられる．これに対してある意味で“最良”の下限を求めるため，$v(\lambda)$ を λ に関して最大化する問題

最大化 $v(\lambda)$ $\lambda \geq 0$

を（たとえば，勾配法で）解き，この最大値（もしくは，その近似値）$v(D)$を用いる方法が提案されている [6]．(ii), (iii) より

(iv) $\bar{v} < \infty$ ならば $\bar{v} \leq v(D) \leq v(P)$

であるが，ここでは，$v(D) > v(\bar{\lambda})$ となることを期待しているわけである．$v(D)$ を得るために，かなりの手間が必要であるが，問題によってはこれによって得られる利得がその損失を上廻り，かなり有効に働くようである．たとえば Geoffrion [6] は，ある種の立地問題にこの方法を適用した結果，

$v(P) = 100,\ v(D) = 99.3,\ v(\bar{\lambda}) = 98.97,\ \bar{v} = 97.46$

という結果を得ており，$v(D)$ を用いることによって分枝限定法の効率がいちじるしく改良されたことを報告している．（ただし，問題によっては，$v(\bar{\lambda}) = v(D)$ となる場合もあり，いつでも，良い結果が得られるとは限らない．）

このような双対法を用いた例をもう1つあげておく．

整数計画問題：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{最小化} & cx \\ \text{条 件} & Ax = b \\ & x \text{ は非負整数} \end{array}\right\} \quad (3.9)$$

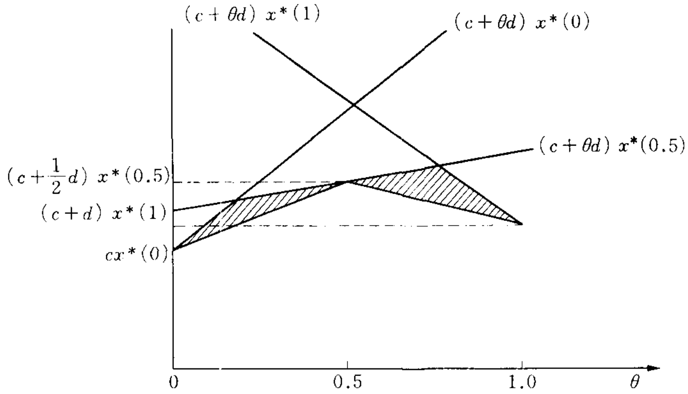
に対する群論的アルゴリズム（前号参照）では，(3.9) の連続問題の最適基底に関する基準表現：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{最小化} & \bar{c}^N x^N \\ \text{条 件} & x^B = \bar{b} - \bar{A} x^N \\ & x^B, x^N \text{ は非負整数} \end{array}\right\} \quad (3.10)$$

において，条件 $x^B \geq 0$（すなわち $\bar{A} x^N \leq \bar{b}$）を外して，群最小化問題をといた．これに対し，Fisher-Shapiro [5] は，ラグランジュ乗数 $\lambda \geq 0$ を用いて $\bar{A} x^N \leq \bar{b}$ を目的関数の中に組み込み，

$$L(x^N, \lambda) = \bar{c}^N x^N + \lambda(\bar{b} - \bar{A} x^N) \quad (3.11)$$

とおき，x^Bの整数条件は通常の場合と同様に，$\sum_{j \in J} \alpha_j x_j \equiv \beta (\mathrm{mod}\ 1)$ と表現して，



$$\underline{L}(\lambda)=\min\{L(x^N,\lambda)\mid\sum_{j\in J}\alpha_j x_j{}^N\equiv\beta,$$
$$x_j{}^N \text{は非負整数},\ \ \forall j\in J\} \quad (3.12)$$

を定義し,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最大化} & \underline{L}(\lambda)\\ \text{条　件} & \bar{c}^N+\lambda\bar{A}\geq 0\\ & \lambda\geq 0\end{array}\right\} \quad (3.13)$$

を解くことによって, (3.9) の最適目的関数値の下限を得る方法を提案している. (3.13)を解くには, (D)を解く以上にかなりの手間がかかり, また, 途中の過程で群最小化問題を繰り返し解かなくてはならない, という欠点があるが, 下限値は一般にきわめてよいものが得られるようである.

4. パラメータ分析／感度分析

整数計画問題に対しては, 線形計画法のような強力な双対定理が成立しないので, パラメータ分析, 感度分析は一般には困難である. このため, これまでまとまった研究は行なわれなかったが, 1973年以降いくつかの論文が発表されるようになってきた. これらは, まだ初歩的段階にあり, これから先どこまで成果を挙げうるか疑問であるが, 現在までに得られている結果の主なものをサーベイしておこう.

(イ) 目的関数がパラメータを含む場合

$\theta\in[0,1]$ をパラメータとするパラメータ問題:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & (c+\theta d)x\\ \text{条　件} & Ax=b\\ & x\text{は非負整数}\end{array}\right\} \quad (4.1)$$

を考えよう. 前回の構造的アプローチの項で述べたとおり, 実行可能領域

$$X_I=\{x\mid Ax=b,\ x\text{は非負整数}\} \quad (4.2)$$

の凸包を$\mathrm{co}X_I$と書けば, この問題は$\mathrm{co}X_I$上で$(c+\theta d)x$を最小化する問題と等価であり, また$\mathrm{co}X_I$は有限個の1次等式不等式系で表わされるから, 線形計画法の場合と同様$v(\theta)$を問題(4.1)の最適目的関数値とすれば, vは[0, 1]で区分的に線形な凹関数となる. この事実により, いくつかのθに対する最適解が分っているとき, それ以外のθに対する最適目的関数値に関するかなりの情報が得られる. たとえば, 図のように$x^*(0)$, $x^*(1/2)$, $x^*(1)$が分っているとき, それ以外のθに対する目的関数値は, 斜線を施した領域に入ることが結論されるのである. このように, $v(\theta)$の下限が明らかになれば, それをたとえば分枝限定法における下限として用いることもできるであろう.

(ロ) 右辺がパラメータを含む場合

右辺がパラメータ $\theta\in[0,1]$ を含む問題:

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{最小化} & cx\\ \text{条　件} & Ax\geq b+\theta d\\ & x\text{は非負整数}\end{array}\right. \quad (4.3)$$

は, (イ)で述べたケースに比べて遙かに難しく, 有用な結果が得られているのは, $d\geq 0$もしくは$d\leq 0$の場合に対してのみである. すなわち, $d\geq 0$ ならばθが0から増加するにつれて(4.3)の実行可能領域は単調に縮小してゆくので,

(i) $d\geq 0$ならば, あるθに対して最適な解$x^*(\theta)$は, $Ax^*(\theta)\geq b+\theta' d$ をみたす限り, $\theta'\geq\theta$ をみたす任意のθ'に対して最適である.

(ii) $d\geq 0$ ならば, θで実行可能な解は$\theta'\leq\theta$においても実行可能で, その結果 $v(\theta)$ は, [0, 1] で単調非減少である.

などの結果が得られる. ($d\leq 0$の場合は, θを$(1-\theta)$でおきかえれば上の結果がそのまま成り立つ.)

(ハ) 一群の問題を扱うための分枝限定法の一般化

分枝限定法を用いて, 異なる目的関数をもつ問題を並列的に扱うアルゴリズムがいくつか提唱されている. たとえば, Piper-Zoltners [18] は, 分枝限定法で,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & cx \\ \text{条　件} & Ax=b \\ & x_j=0 \text{ または } 1, j=1,\cdots,n\end{array}\right\} \quad (4.4)$$

に対する最も望ましい k 個の実行可能解，$x^1, x^2, \cdots, x^k$ が得られているとき，これを目的関数の係数を c から c' に変更したときの最適解を求める際に利用する方法を提案している．いま，もし

$$\min_{1\leq l\leq k} c'x^l \leq \min\{c'x \mid Ax=b,\ cx\geq\min_{1\leq l\leq k} cx^l \quad x_j=0 \text{ または } 1,\ j=1,\cdots,n\} \quad (4.5)$$

であることが立証されれば，

$$c'x^s=\min_{1\leq l\leq k} c'x^l \quad (4.6)$$

としたとき x^s が (4.4) で c を c' に変更した問題の最適解となるわけである．ところが，(4.5) の右辺を計算するのは，一般に難しいので，そのかわりにそれより小さな量

$$\bar{z}_1=\min\{c'x \mid cx\geq\min_{1\leq l\leq k} cx^l,\ x_j=0 \text{ または } 1,\ j=1,\cdots,n\} \quad (4.7)$$

$$\bar{z}_2=\min\{c'x \mid Ax=b, cx\geq\min_{1\leq l\leq k} cx^l,\ 0\leq x_j\leq 1,\ j=1,\cdots,n\} \quad (4.8)$$

$$\bar{z}_3=\bar{z}_2+p \ (p\text{ は分枝限定法のところで述べたペナルティ}) \quad (4.9)$$

などを計算する．ここで，もし，$\min_{1\leq l\leq k} c'x^l$ が，これのいずれかより小さいならば，(4.5) が成り立つ．Piper-Zoltners は，このアルゴリズムを $\|c'-c\|/\|c\|=0.1$ 程度の問題に適用し，$k=10$ として 800 の問題のうち 799 が誤差10%の範囲で (4.5) を満たしたことを報告している．このように基準となる問題からの偏差が小さい場合には，このアプローチは有効なものであるということができよう．この方向の研究としては，問題 (4.3) において $d>0$ が満たされている場合に対するMarsten-Morinによる接近 [15] などもあるが，詳細は文献を参照されたい．

第1回目に予告したとおり，今回で整数計画法と組み合わせ計画法に関するサーベイの前半を終了するわけであるが，ここで読者の便宜を考えて整数計画法に関する代表的な教科書を紹介しておこう．年代順にこれらを列挙すれば，

a．Hu, T. C., *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley, 1969 (伊理・今野・棚橋訳，整数計画法とネットワーク・フロー，培風館 1975.)

b．Greenberg, H., *Integer Programming*, John Wiley & Sons, 1971. (真鍋訳，整数計画法，培風館，1976.)

c．Plane, D. R. and C. McMillan, Jr., *Discrete Optimization, Integer Programming and Network Analysis for Management Decisions*, (黒田訳，整数計画法入門，培風館，1977.)

d．Garfinkel, R. and G. L. Nemhauser, *Integer Programming*, John Wiley & Sons, 1972.

e．Salkin, H. M., *Integer Programming*, Addison-Wesley, 1975.

f．Taha, H. A., *Integer Programming; Theory, Applications and Computations*, Academic Press, 1975.

g．Kaufmann, A. and A. Henry-Labordère, *Integer and Mixed Programming: Theory and Applications*, Academic Press, 1977.

などがある．これらの中では記述の分りやすさ，カバーする範囲の広さからいって，[d, e] が推薦に値しよう．[a] は構造的アプローチを詳しく扱ったハイレベルの教科書で，[b, c, f, g] はいずれも読みやすい入門的教科書である．しかし，この分野ではまだ決定版と呼ぶにふさわしいもの（線形計画法における D. Gale や G. Dantzig，非線形計画法における O. Mangasarian や D. Luenberger の著書に匹敵するもの）はまだ存在しない，というのが筆者を含めた研究部会のメンバーの最大公約数的見解である．

参考文献

[1] Balas, E., and C. Bergthaller, "Benders' Method Revisited," MSRR 401, GSIA, Carnegie-Mellon University (1977).

[2] Bell, D. E. and J. F. Shapiro, "A Convergent Duality Theory for Integer Programming," *Operations Research* **25**, pp. 419-434 (1977).

[3] Benders, J. F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems," *Numerische Mathematik* **4**, pp. 238-252 (1962).

[4] Echols, R. E. and L. Cooper, "Solution of Integer Linear Programming Problems by Direct Search," *J. ACM* **15**, pp. 75-84 (1968).

[5] Fisher, M. L. and J. F. Shapiro, "Constructive Duality in Integer Programming," *SIAM J. Appl. Math.* **29**, pp. 31-52 (1974).

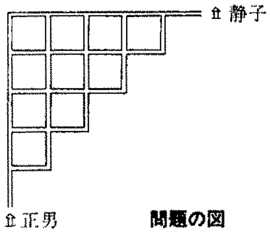
[6] Geoffrion, A. M., "Lagrangean Relaxation for Integer Programming," *Math. Prog. Study* **2**, pp. 82-114 (1974).

[7] ——, "A Guided Tour of Recent Practical

Advances in Integer Linear Programming," WP-220, WMSI, University of California, Los Angeles (1974).
[8] —— and G. W. Graves, "Multicommodity Distribution System Design by Benders' Decomposition," *Management Science* **20**, pp. 822-844(1974).
[9] —— and R. Nauss, "Parametric and Post-optimality Analysis in Integer Linear Programming," *ibid.* **23**, pp. 453-466 (1977).
[10] Gorry, G. A., J. F. Shapiro and L.A. Wolsey, "Relaxation Methods for Pure and Mixed Integer Programming Problems," *ibid.* **18**, pp. 229-239 (1972).
[11] Hillier, F. S., "Efficient Heuristic Procedure for Integer Linear Programming with Interior," *Operations Research* **17**, pp. 600-636 (1969).
[12] Ibaraki, T., T. Ohashi and H. Mine, "A Heuristic Algorithm for Mixed-Integer Programming Problems," *Math. Prog. Study* **2**, pp. 115-136 (1974).
[13] Jeroslos, R. G. and T. H. C. Smith, "Experimental Results on Hillier's Linear Search," *Math. Prog.* **8**, pp. 371-376 (1975).
[14] Lin, S. and B. W. Kernighan, "An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem," *Operations Res.* **21**, pp. 498-516 (1973).
[15] Marsten, R. E. and T. L. Morin, "Parametric Integer Programming : The Right-Hand-Side Case," WP 808-75 Sloan School of Management, MIT (1975).
[16] McDaniel, D. and M. Devine, "A Modified Benders' Partitioning Algorithm for Mixed Integer Programming," University of Wisconsin at Milwaukee (1975).
[17] Meyer, R. R. and J. Fleischer, "Strong Duality for a Special Class of Integer Programs," *J. O. T. A.* **22**, pp. 25-30 (1977).
[18] Piper, C. J. and A. A. Zoltners, "Some Easy Postoptimality Analysis for Zero-One Programming," *Management Sci.* **22**, pp. 759-765 (1976).
[19] Roodman, G. M., "Postoptimality Analysis in Zero-One Programming by Implicit Enumeration," *Naval Research Logistics Quarterly* **19**. pp. 822-844 (1974).
[20] Sá, G., "Branch-and-Bound and Approximate Solutions to the Capacitated Plant-Location Problems," *Operations Res.* **17**, pp. 1005-16(1969).
[21] Senju, S. and Y. Toyoda, "An Approach to Linear Programming with 0-1 Variables, *Management Science* **15**, pp. 196-207 (1968).
[22] Sorimachi, Y. et al., "Implementation of the Heuristic Mixed Integer Program to the Mathematical Programming System," in Proceedings of IX International Symposium on Mathematical Programming, Hungary (1976).
〔こんの・ひろし（筑波大学） おかもと・よしはる（三菱総合研究所）〕

数理パズルを楽しもう (15)

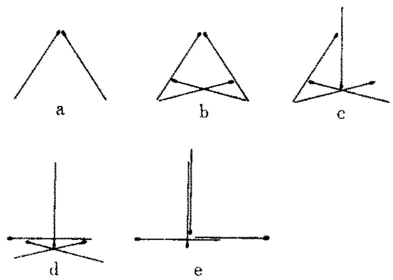
問題 正男さんの家から静子さんの家まで行く道路は，図のように，縦・横の格子状の道路を半分にした形をしています．遠まわりしないで行く方法は，全部で何通りあるでしょうか．ただし，図の縦・横5本ずつの道路を，縦・横 n 本ずつの一般の道路として考えてみて下さい



問題の図

〔12月号（806ページ）の解答〕 4本のマッチ棒の両端を互いにつなぎ合わせれば，必ず菱形ができるから，問題は4本のマッチ棒だけで直角を作図することである．これには幾つかの方法があるが，最も簡単なのはつぎの方法である．

まず，2本のマッチ棒の一端を合わせて，直角より小さ目の角度で適当に開く（図a）．つぎに，開かれた両端に残りのマッチ棒の一端を1本ずつ合わせ，もう一端は先に置かれたマッチ棒の上にくるようにうまく調整する（図b）．この図は左右が対称であるから，その後の図c～図eの操作で，明らかに直角が得られる．



（中村義作 信州大学工学部）