賭けの数理-V

竹内　啓

1. もう一つの問題

今度は問題の見方を少し変えて，最初1単位の所持金をもっている人が $R\ (>1)$ だけの金を必要としているとしよう．R より少ない金額では役に立たないとする．そのために賭けをして所持金をふやすことを考える．このとき所持金が R 以上になる確率を最大にするには，どのようにしたらよいかを考えよう．

このことは金額 X に対する効用が，

$$u(X)=0 \qquad X<R$$
$$=1 \qquad X\geq R$$

となることを意味する．

いま第 t 回の賭けの後の所持金額を $X(t)$ とする．$X(t)\geq R$ となれば，実際には賭けをやめることになるが，このときは，$X(t)=X(t+1)=X(t+2)=\cdots\cdots$ と考える．また $X(t)=0$ となった場合も同様とする．

このとき公平な賭け，有利な賭け，不利な賭けのそれぞれの場合について，$X(t)$ はマルチンゲール，劣マルチンゲール，優マルチンゲールになる．そうして1回の賭けにおいて所持金が増加する比率に上限 K があれば，つねに $X(t)<KR$ であるから，$X(t)$ は有界になる．したがっていずれの場合にも，(証明は省略するが，一般の場合から系として得られる) $X(t)$ はある確率変数 X_∞ に収束する．そうしてこの場合，

$$E(u(X_\infty))=Pr\{X_\infty\geq R\}$$

を最大にするようにすることが望ましいことになる．

ここで明らかに，

$$E(u(X_\infty))\leqq E(X_\infty)/R.$$

2. 公平な賭けの場合

ここで公平な賭けの場合には，

$$1=E(X(1))=E(X(2))=\cdots\cdots=E(X(t))=\cdots\cdots$$

であり，かつ $X(t)$ が有界であるから，$E(X_\infty)=1$ となる．したがって，$E(u(X_\infty))\leqq 1/R$ となる．

すなわち必要なだけの金が得られる確率は $1/R$ を越えない．そうして等号が成り立つのは $u(X_\infty)=R$ or 0 となる場合である．すなわち所持金がちょうど0になるかまたは R になることが望ましい．

したがって，つねに勝った場合にも所持金額が R を越えないような範囲で賭けるべきだということになる．またいつまでも結着がつかないという場合をさけるためには，1回に上記の条件と満たす範囲でできるだけ多く賭けるのがよいことになる．そうすれば所持金が R になるか，または0になってしまうかの結着がもっとも速くつくことになる．

公平な賭けの場合には，上下の限界が決まっていると賭け方の戦略によって影響される面は少ない．

3. 有利な賭けの場合

有利な賭けの場合には，途中で賭けをやめない場合には，確率1で $X(t)\to\infty$ となるから，必ず途中で $X(t)\geq R$ となり，$E(u(X_\infty))=1$ となるようにすることができる．

そのためにはたとえばこれまでに述べたブライマンのルールを用いればよい．

いまブライマンのルールを用いたときの所持金額を $X^*(t)$ とすれば $X^*(t)/X^*(t-1)$ $t=1,2\cdots\cdots$ は互いに独立に同一分布にしたがい，かつ，

$$E\{\log X^*(t)/X^*(t-1)\}=\mu>0 \quad t=1,2\cdots\cdots$$

である．したがって t が大きいとき，

$$\log X^*(t)=\log X^*(t)/X^*(0)$$
$$=\log X^*(t)/X^*(t-1)+$$
$$\log X^*(t-1)/X^*(t-2)+\cdots\cdots+\log X^*(1)\sim\mu t$$

となる．よりくわしくは大数の強法則により確率1で，

$$\frac{1}{t}\log X^*(t)\to\mu$$

となる．したがって R が大きいとき $X^*(t)$ が R を越えるときの t の値を t^* とすれば，

$$\frac{1}{t^*}\log R\sim\mu$$

すなわち，$t^*\sim(\log R)/\mu$ となる．

これに対して他の任意の戦略を用いたときの所持金額を $X(t)$ とすれば，すでに前に示したように，

$$\limsup \frac{1}{t} \log X(t) \le \mu$$

である．したがって $X(t)$ が R を越えるときの t の値を t° とすれば，R が大きいとき，

$$\frac{1}{t^{\circ}} \log R \le \mu - \varepsilon$$

$$t^{\circ} \ge (\log R) / (\mu - \varepsilon)$$

となる．したがって R が大きいとき　確率1で

$$t^{\circ} / t^{*} \ge 1$$

となる．すなわちブライマンのルールを用いれば R が大きいとき，もっとも早く R まで所持金をふやすことができるといってよい．

4. 不利な賭けの場合

不利な賭けの場合には，ことが面倒になる．いま $X^{*}_{R}(t)$ を目標額が R であるときに，$E(u(X_{\infty}))$ を最大にするような戦略を用いたときの所持金額とし，またこれに対応して，

$$u^{*}(R) = E(u(X^{*}_{R\infty}))$$

とおくと，ダイナミックプログラミングの原理により，

$$u^{*}(R) = E\left\{u^{*}\left(\frac{R}{X^{*}_{R}(1)}\right)\right\}$$

ただし $X^{*}_{R}(1)=0$ のときは，{　} 内の値は $u(\infty)=0$ とするという関係が成り立つ．なぜならば1回賭けを行なうと所持金が $X^{*}_{R}(1)$ に変わるが，そうなると所持金額を $R/X^{*}_{R}(1)$ 倍しなければならないことになるからである(所持金を一定倍することのできる確率は，最初の所持金の額には無関係である)．いま変数を変換して，

$$u^{*}(R) = v^{*}(\log R)$$

とすれば，$X^{*}_{R}(1)$ を簡単のために X^{*} とあらわすと，

$$v^{*}(\log R) = E(v^{*}(\log R - \log X^{*}))$$

となる．そうして他の任意の戦略を用いたときの $X(1)$ を X とあらわすと，最適性の原理により，

$$v^{*}(\log R) \ge E\{v^{*}(\log R - \log X)\}$$

となる．

関数 v^{*} の形を具体的に求めることは，一般には不可能であるが，それはつぎの性質をもつことは明らかである．

1°　$v^{*}(0) = v^{*}(\log 1) = 1$

2°　v^{*} は単調非増加関数

3°　$v^{*}(x+y) \ge v^{*}(x)\, v^{*}(y)$．なぜなら　$x = \log R_1$　$y = \log R_2$ とするとき，所持金を $R_1 R_2$ 倍するのに，まず最初に R_1 倍し，つぎにさらにそれを R_2 倍することができれば，確かに目標が達せられるからである．さらに3°より，

$$v^{*}(x+y) - v^{*}(y) \ge v^{*}(x)\,(v^{*}(y) - 1)$$

となるから，この両辺を y で割って，$y \to 0$ とすれば，v^{*} の微分可能性を仮定すると，

$$v^{*\prime}(x) \ge v^{*}(x)\, v^{*\prime}(0)$$

となる．そこで $v^{*\prime}(0) = -c \le 0$ とおくと，

$$v^{*\prime}(x) \ge -c\, v^{*}(x)$$

これより，$\dfrac{d}{dx}(\log v^{*}(x)) \ge -c$

$$v^{*}(x) \ge e^{-cx}$$

を得る．そうするとさらに，

$$u^{*}(R) = v^{*}(\log R) \ge R^{-c}$$

となる $R > 1$ のとき $u^{*}(R) < 1$ だから　ここで $c > 0$ でなければならないことがわかる．

また $X(t)$ がほぼ連続的に変わるとすれば，所持金を $R_1 R_2$ 倍にするにはまず R_1 倍し，ついでさらに R_2 倍にしなければならない．そこでこのような場合には，

$$v^{*}(x+y) \fallingdotseq v^{*}(x)\, v^{*}(y)$$

となり，

$$v^{*}(x) \fallingdotseq e^{-cx}, \qquad u^{*}(R) \fallingdotseq R^{-c}$$

を得る．そこで仮りに $u^{*}(R) = R^{-c}$ としてみよう．公平な賭けの場合にはちょうどここで $c=1$ となっていたことを思い起こせば，これはまったくでたらめな想定ではないであろう．そうして不利な賭けの場合には $c>1$ と考えられる．そうすると最適な戦略は，

$$E\left(u^{*}\left(\frac{R}{X}\right)\right) = R^{-c} E(X^{c})$$

を最大にするようにすればよいことになる．

$c>1$ だから　X^{c} は X の凸関数，したがってその期待値を大きくするには，期待値とともにばらつきをなるべく大きくするようにするのがよいということになる．

たとえばもっとも簡単な場合として，p 本のくじのうち1本だけが「当り」で他は「はずれ」となる場合，i 番目のくじが当る確率を p_i，当ったときの配当額を r_i となる場合を想定する．このとき所持金のうち π_i だけで i 番のくじを使うことにすると，

$$E(X^{c}) = \sum p_i (\pi_0 + r_i \pi_i)^{c}$$

となる．これは π_i の関数として凸関数だから　$\sum \pi_i = 1$　$\sum \pi_i \ge 0$ の範囲でこの値を最大にするのはその端点，すなわちある i に関して $\pi_i = 1$，その他の $\pi_j = 0$ となる場合である．すなわち，

$$\max_i p_i \pi_i^{c} = p_{i^*} \pi_{i^*}^{c}$$

となるとき i^* 番目のくじに全金額を投ずればよいことになる，これは「危険分散」の逆の「集中決戦」型の戦略である．しかしながらこの場合 c は実は最適戦略に応じて定まることになるから，実はまだ解は完全には定まらない．この問題についてはつぎにもう少しくわしく考えよう．