総合報告

整数／組合せ計画法の現状　その2
構造的アプローチ

整数計画法研究部会　今　野　　浩

1.　はじめに [19, 33, 39]

前回で解説した分枝限定法は，実行可能な整数格子点を効率的に数え上げることを狙ったものであるが，今回は実行可能な整数格子点集合の代数的・幾何学的構造を用いた構造的アプローチをサーベイする．なお以下では紙数の制約から，議論を純整数計画問題：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & cx \\ \text{条　件} & Ax=b \\ & x\text{ は非負整数ベクトル}\end{array}\right\}(IP)^*$$

に絞ることにする．また今回は全体を通じて，

(α)　$A\in R^{m\times n}$，$b\in R^m$，$c\in R^n$ の成分はすべて整数で，rank $A=m$

(β)　(IP) およびその連続問題（整数条件を外した問題）の実行可能解集合をそれぞれ，

$$X_I=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\text{は非負整数}\} \qquad (1.1)$$

$$X=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\} \qquad (1.2)$$

で表わしたとき，Xは有界かつ空でないものと仮定する．

今回取り上げる構造的アプローチの基礎となるもっとも重要な事実はつぎのように述べることができる(**図1.1**参照)．

実行可能整数格子点集合 X_Iの凸包coX_Iは有限個の1次等式および不等式によって，

$$\mathrm{co}X_I=\{x\in R^n \mid A_1x=b_1,\ A_2x\geq b_2\} \qquad (1.3)$$

と表わされるから，(IP) の最適解はつぎの線形計画問題：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & cx \\ \text{条　件} & A_1x=b_1,\ A_2x\geq b_2\end{array}\right\} \qquad (1.4)$$

を解くことによって得られる．

これは線形計画問題の最適解が一般に実行可能解集合の端点において実現されること，および co X_Iの端点が X_I の点であることから結論される．ところが残念なことに，co X_I を具体的に(1.3)のように表現することは第4節で取り上げる特殊な問題を別にすれば，現在のわれわれの能力を超えた難問である．また仮にこれが可能であっても，(1.3) に含まれる等式・不等式の数は天文学的なものとなって，線形計画問題 (1.4) を解くことは事実上不可能といってよい．しかし，このような考え方がまったく役に立たないかといえば決してそうではない．なぜなら，

(i)　図1.1に見るように (IP) を解くという立場からは co X_I の完全な表現(1.3)を求めることが必要なわけではなく，(IP)の最適解 x^* の近傍での co X_I の表現，すなわち (1.3) の等式・不等式の一部を求めるだけでよい．

(ii)　一般の問題に対して (1.3) のような表現を求めることは不可能であっても，それと近い関係にある問題（第3節参照）に対しては，このことは必ずしも不可能ではない．

(iii)　(i), (ii) で得られた知見を分枝限定法の効率化に役立てることができる．

などの事実によって，このようなアプローチは十分に現実的でありうるのである．

ここで co X_I の表現における最小セットを規定するファセット (facet) の概念を定義しておこう．ある超平面

$$H_\pi=\{x \mid \sum_{j=1}^{n}\pi_j x_j=\pi_0\} \qquad (1.5)$$

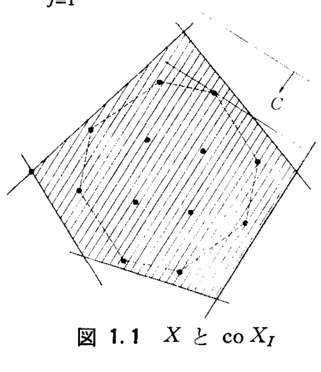

図 1.1　X と co X_I

* 脚注：本稿では本来 c^tx と書くべきところも便宜上転置記号を省いて cx などと書く．

が，

(i) X_I のすべての点をその片側に含み，

(ii) X_I の点を少なくとも co X_I の次元と同じ個数だけ含むとき，H_π は co X_I のファセットであるという．X_I は仮定 (β) により有限集合であるから，co X_I のファセットは有限個しか存在しないが，逆に co X_I はこれらのファセットによって(1.3)のように表現される．たとえば，図1.1において co X_I は8個のファセットをもち，co X_I はそれらに対応する点線で示した8本の不等式によって規定される．

以下の記述の便宜のため，ここで2，3の記法を用意しよう．$A\in R^{m\times n}$のある基底($m\times m$の正則な部分行列) B に対して $A=[B,N]$ と分割すると，(IP) は，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & c^Bx^B+c^Nx^N\\ \text{条　件} & Bx^B+Nx^N=b\\ & x^B, x^N\text{は非負整数}\end{array}\right\}\qquad(1.6)$$

と書ける．ここで x^B, x^N はそれぞれ B, N に対応する x の部分ベクトルである．(1.6)で x^B を x^N について解いて $x^B=B^{-1}b-B^{-1}Nx^N$ と表わせば，(1.6)は，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & c_BB^{-1}b+(c^N-c^BB^{-1}N)x^N\\ \text{条　件} & x^B=B^{-1}b-B^{-1}Nx^N\\ & x^B, x^N\text{は非負整数}\end{array}\right\}\qquad(1.7)$$

と等価である．以下を通じてこれを，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & \bar{c}^Nx^N(\bar{c}^N=c^N-c^BB^{-1}N)\\ \text{条　件} & x^B=\bar{b}-\bar{A}x^N(\bar{b}=B^{-1}b, \bar{A}=B^{-1}N)\\ & x^B, x^N\text{は非負整数}\end{array}\right\}\qquad(1.8)$$

と書き，B に関する基準表現とよぶ．また x^B および x^N の成分の添字集合をそれぞれ I, J で，$\bar{A}$ の成分を $\bar{a}_{ij}$, $i\in I, j\in J$ で表わす．

(1.8) 式で x^N を独立変数，x^B をそれによって決まる従属変数と考え x^B を除去すれば，(1.8)の制約式は，

$$\bar{A}x^N\leq\bar{b}, x^N\geq 0\ ;\ x^N, \bar{b}-\bar{A}x^N\ \text{は整数}$$

と表わすことができる．そこで R^{n-m} 次元空間の集合

$$X_I{}^N=\{x^N\in R^{n-m}\,|\,\bar{A}x^N\leq\bar{b}, x^N\geq 0\ ;\ x^N, \bar{b}-\bar{A}x^N\ \text{は整数}\}$$

を定義すれば，X_I はより低次元空間の集合 $X_I{}^N$ によって完全に表現することができる．また簡単な考察から分かるように，co $X_I{}^N$ に関する表現(1.3)が求まれば，co X_I に関する表現(1.3)が得られるし，また co $X_I{}^N$ のファセットは co X_I のファセットとなる．

2. 切除平面法 (Cutting Plane Method)

巷間切除平面法とよばれる方法は数多いが，ここではつぎの枠組に入るものを取り上げよう．

切除平面法 (プロトタイプ)

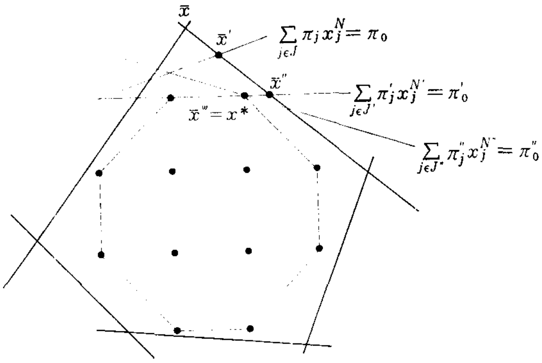

図 2.1

ステップ 1 線形計画問題

$$\text{最小化}\quad cx,\ x\in X\qquad(2.1)$$

を解き，その最適基底を B とし最適解を $\bar{x}\equiv(\bar{x}^B, \bar{x}^N)=(\bar{b},0)$ とする．

ステップ 2 $\bar{b}$ が整数ベクトルなら終了．そうでない場合は，

(i) $X_I{}^N$ (したがって X^I) のすべての点を含み

(ii) $x^N=0$ (すなわち $\bar{x}$) を含まない

半空間

$$H_\pi{}^+=\{x^N\,|\,\sum_{j\in J}\pi_jx_j{}^N\geq\pi_0\}\qquad(2.2)$$

を生成し，$X:=X\cap H_\pi{}^+$とおいてステップ1にもどる．

図2.1に示したとおり，このアルゴリズムは(IP) の連続問題 (整数制約条件を外した線形計画問題) の最適解 $\bar{x}$ を出発点として，(i), (ii) を満たす不等式を追加して $\bar{x}$ を含む X の一部を切り取り (図2.1のようにそれはたまたま X_Iのファセットとなる場合もある)，その結果得られる線形計画問題を解くというプロセスを繰り返しながら，その最適解の列 $\bar{x}', \bar{x}'', \cdots$を次第に($IP$) の最適解 x^* に近づけてゆこうとするわけである．条件(i)により，不等式を追加しても実行可能格子点集合 X_I の点が取り除かれることはないから，

切除平面法において，ある k に対して線形計画問題の最適解 $\bar{x}^k$が整数解となれば，$\bar{x}^k$は(IP)の最適解である

ことが分かる．条件(i), (ii)を満たす超平面

$$H_\pi=\{x^N\,|\,\sum_{j\in J}\pi_jx_j{}^N=\pi_0\}\qquad(2.3)$$

を妥当なカット (valid cut)，もしくは単にカット (cut) とよぶ．また(i)のみを満たす不等式を X_I に対する妥当な不等式 (valid inequality) という．上の説明から明らかなとおり，われわれは X_Iの点を取り除かない範囲で，なるべく多くの領域を切り取るカットを生成して，アルゴリズムの効率を高めたいわけであるが，ここで問題となるのは，これらをいかに少ない手間で生成し，いかに

して有限回収束(有限回の反復で (IP) の最適解を得ること) を保証するかである.

（イ） 代数的カット

(IP) の連続問題の最適基底に対応する基準表現(1.8)において, $\bar{b}$ が整数ベクトルでない場合, x^N は現在の値(すなわち0)とは異なる値をとらなければならない. ところが x^N の非負整数条件を考慮すると, $\sum_{j\in J} x_j{}^N$ は少なくとも1以上でなくてはならない. よって,

$$\sum_{j\in J} x_j{}^N \geq 1 \tag{2.4}$$

は妥当なカットとなる. これは Dantzig [18] によるものでカット生成の手続きはいちじるしく簡単であるが, 反復が進むにつれてカットは次第に浅くなり, これにもとづくアルゴリズムが最適解 x^* へ収束する保証は得られない [39].

一方, Gomory [23] は, Dantzig と同様に変数の整数条件のみを用いて, 制約式に代数的操作を施して妥当なカットの公式を導き, それを用いたアルゴリズムの有限収束性を証明した.

いまある $i\in I$ に対して $\bar{b}_i$ が整数でないものとし, ガウス記号 [ ] を用いて,

$$\left.\begin{aligned} \bar{b}_i &= [\bar{b}_i]+\beta_i, \quad 0<\beta_i<1 \\ \bar{a}_{ij} &= [\bar{a}_{ij}]+\alpha_{ij}, \quad 0\leq\alpha_{ij}<1 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

とおけば, $x^B=\bar{b}-\bar{A}x^N$ の第 i 行は

$$x_i{}^B=[\bar{b}_i]+\beta_i-\sum_{j\in J}([\bar{a}_{ij}]+\alpha_{ij})x_j{}^N \tag{2.6}$$

と書かれる. これより $x_i{}^B$ が整数であるためには, $\beta_i-\sum_{j\in J}\alpha_{ij}x_j{}^N$ が整数値をとること, すなわち,

$$\sum_{j\in J}\alpha_{ij}x_j{}^N \equiv \beta_i \pmod 1 \tag{2.7}$$

となることが必要である. ここで $\alpha_{ij}\geq 0, x_j{}^N\geq 0$ より左辺が非負であることを考慮すれば, $\sum_{j\in J}\alpha_{ij}x_j{}^N$ は $\beta_i, \beta_i+1, \beta_i+2, \cdots$, のいずれかの値をとらなければならないから, 不等式

$$\sum_{j\in J}\alpha_{ij}x_j{}^N \geq \beta_i \tag{2.8}$$

は条件(i)を満たすことが分かる. また $\beta_i>0$, $\bar{x}^N=0$ を考慮すれば上の不等式は条件(ii)を満たすことも分かる.

この Gomory カットはカット生成が容易で, 有限収束性を満たすすぐれたものであり, 構造的アプローチの基礎を与えるものとなったが, 一般的な問題を解く実用的アルゴリズムとしては,

(i) 最適解が得られるまで X_I の点が1つも求まらないこと

(ii) 反復回数に上限が存在しない

などの欠陥をもっている. 事実, 小数法 (fractional algorithm) とよばれるこのアルゴリズム (およびその改良法) をもとにしていくつかのコードが作られたが, 一般的に言ってその結果は思わしいものでなく, 数値実験も小規模な問題に限られた. 因みに, このアルゴリズムがそのままの形でもっともうまく働くのは, (1.2)式で定義した集合 X の端点の多くが整数端点であるような場合であり, そのような条件を満たす集合分割問題や集合被覆問題 (これらの問題については後に詳しく取り上げる) に対しては, かなりのサイズのものまで解くことができることが示されている. 少し古くなるが, たとえばCDCの Martinは $(m,n)=(150,\ 7000)$ の集合被覆問題を1969年当時の高速機CDC 3600を用いて約40分で解いたと報告している. また, Toregas ら [40] は $(m,n)=(50,\ 100)$ 程度の上記の問題に対しては, ほとんどの場合たかだか1本のカットを追加するだけで最適解が得られると報告している (ただし, これはデータに依存するところが大きく切除平面法はあまり有効でないとする報告もある. 上記の結果は, もっともうまくゆく場合と解釈すべきであろう).

やや脱線になるが, ここで x^B の整数条件のかわりにその非負条件を用いた代数的カットについてふれておこう.

$x_i{}^B\geq 0$ を考慮すると基準表現(1.8)から, $\sum_{j\in J}\bar{a}_{ij}x_j{}^N\leq\bar{b}_i$ が導かれる. この両辺を適当な正数で割って得られる不等式

$$\sum_{j\in J}(\bar{a}_{ij}/\lambda)x_j{}^N\leq\bar{b}_i/\lambda \tag{2.9}$$

で $x_j{}^N\geq 0$ を考慮すると, 左辺をより小さく見積もった不等式 $\sum_{j\in J}[\bar{a}_{ij}/\lambda]x_j{}^N\leq\bar{b}_i/\lambda$ が得られる. さらにこの不等式の左辺が整数であることから, 結局われわれはつぎのような妥当な不等式

$$\sum_{j\in J}[\bar{a}_{ij}/\lambda]x_j{}^N\leq[\bar{b}_i/\lambda] \tag{2.10}$$

を得る. Gomory の全整数法 (all-integer algorithm) [24] は双対実行可能な全整数タブローで $\bar{b}_i<0$ となる行に対してカット(2.10)を追加し, 掃出し要素がつねに -1 になるように $\lambda>0$ をうまく決定し, タブローの全整数性を保ちつつ双対シンプレックス法によって最適解 x^* に達しようとするアルゴリズムである. また Young [44]らによる実行可能整数格子点をたどる方法も, その基本として Gomory カットを用いている.

（ロ） 幾何学的カット

Balas [1] は幾何学的考察にもとづき交差カット(intersection cut) とよばれるカットを導入したが, その基本となるのはつぎのような考え方である(図2.2参照).

(IP) の連続問題の最適解を $\bar{x}$ としたとき, x^B に対応する m 次元空間において, 内部に $\bar{b}\in R^m$ を含み, $X_I{}^N$ のいかなる点をも含まない閉凸集合を $S\subset R^m$ としたとき, S と半直線 $x_i{}^B=\bar{b}_i-\sum_{j\in J}\bar{a}_{ij}x_j{}^N, x_j{}^N\geq 0,$

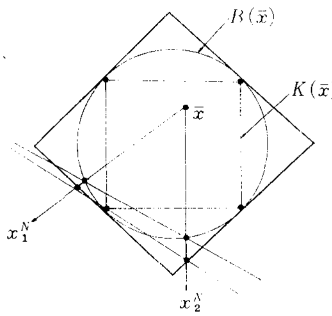

図 2.2 交差カット

$j\in J$との交点によって決まる超平面は妥当なカットとなる.

このようなSとしては, $\bar{x}$にもっとも近い 2^m 個の整数格子を頂点とする立方体 $K(\bar{x})$に外接する球 $B(\bar{x})$や, $K(\bar{x})$に外接するもう1つの立方体 $K'(\bar{x})$など(図2.2参照) がカットの係数を計算するうえで便利である. またSとして適当な凸集合を選ぶことによって Gomory のカットそのものも得られることが示されているが, $K(\bar{x})$や$K'(\bar{x})$にもとづくカットを用いたアルゴリズムは一般に x^* への収束が保証されない. 有限収束性を得るためには現在のところ交差カットに Gomory と同様に代数的操作を施す必要があるが, これらのアプローチの主たる眼目は有限収束性よりもむしろ, 局所的な情報を利用していかに深いカットを得るかに置かれている.

さて, 一般にSは大きければ大きいほどより多くのムダな領域を切り取る強いカットが生成されるわけであるが, Balas [3] は上記のような性質をもつ最大の凸集合が$W\equiv B(\bar{x})\cap\{x^B|x^B=\bar{b}-\bar{A}x^N, x^N\geq 0\}$に対するouter polar

$$W^0=\{x|xy\leq \max_{u\in W}\|u\|^2,\quad \forall y\in W\} \tag{2.11}$$

となることを示した. しかし, 深いカットを得ようとすれば一般により多くの計算が必要であり, W^0 を用いてカットを求めるには, その1つ1つの係数について, 1つの線形計画問題を解かなければならないのが難点である.

(ハ) 論理的カット

Balas [4, 5, 8] は交差カットによって得られた知見

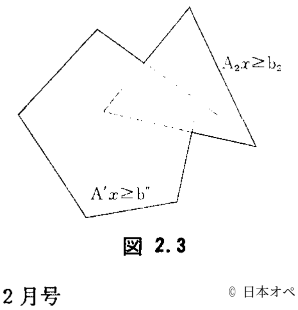

図 2.3

をもとに, つぎで定義される離接計画問題 (disjunctive programming problem)

$$\left.\begin{array}{l}\text{最小化}\quad cx, x\in \bigvee_{l=1}^{k} W_l \quad (\bigvee_{l=1}^{k}\text{は論理和を表わす})\\ W_l=\{x\in R^n|x\geq 0,\ A^lx\geq b^l\}\ (A^l\in R^{m\times n})\end{array}\right\} \tag{2.12}$$

を考察し, co X_I のすべてのファセットを得ることができる公式を導いた. 離接計画問題は整数計画問題だけでなく, 非凸型2次計画問題や論理的条件が付加された線形計画問題などをカバーする統一的フレームワークを提供するものであって, 現在各方面の注目を集めている.

さて, 離接計画問題に対しては, つぎの事実が成立することが Farkas の定理を用いて証明される [8]:

$\sum_{j\in J}\pi_jx_j^N\geq\pi_0$ が $\bigvee_{l=1}^{k} W_l$ に対する妥当な不等式となるための必要十分条件は $W_l\neq\phi$ を満たす l の集合 Q に対して

$$\pi\geq\theta^lA^l,\ \pi_0\leq\theta^lb^l,\quad \forall l\in Q \tag{2.13}$$

を満たす $\theta^l\in R^m$ が存在することである

そこで以下, この事実を 0-1 整数計画問題

$$\left.\begin{array}{l}\text{最小化}\quad cx,\ x\in S\\ S=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\,|\,Ax=b, x_j=0\\ \qquad\qquad\text{または}\ 1, j=1,\cdots,n\}\end{array}\right\} \tag{2.14}$$

に適用した Balas の結果 [8] について述べよう.

定義から明らかなとおりSは有限集合だから, それらを x^j, $j=1,\cdots, L$ とおき, $Ax=b$ のある基底Bに関する基準表現 ((1.8)式参照) を用いて,

$$W_l=\{x|x_i^B=\bar{b}_i-\sum_{j\in J}\bar{a}_{ij}x_j^N,\ \forall i\in I;\ x=x^l\},\quad l=1,\cdots,L \tag{2.15}$$

とおくと, (2.14)は離接計画問題(2.12)として定式化される. そこでこの W_l に対して上で得られた結果を適用すると,

$\theta_j: S\rightarrow R^1$ $j=1,\cdots,n$ を適当に与えたとき

$$\left.\begin{array}{l}\pi_j\geq\sup_{x\in S}\{\theta_j(x)-\sum_{i\in I}\bar{a}_{ij}\theta_i(x)\},\ j\in J\\ \pi_0\leq\inf_{x\in S}\{\sum_{j\in J}x_j\theta_j(x)+\sum_{i\in I}(x_i-\bar{b}_i)\theta_i(x)\}\end{array}\right\} \tag{2.16}$$

ならば $\sum_{j\in J}\pi_jx_j^N\geq\pi_0$ はSに関する妥当な不等式となる. また θ_j, $j=1,\cdots,n$ を適当に選ぶことによって, これらの妥当な不等式の集合は co$S$ を生成する

ことが示される. もちろん(2.16)の右辺を求めるのはそれ自体むずかしい問題であって, このままの形で用いることには無理があるが, Sをより大きな集合$\bar{S}$におきかえて sup および inf をとったものを $\bar{\pi}_j$, $j\in J$, $\bar{\pi}_0$ とおけば $\sum_{j\in J}\bar{\pi}_jx_j^N\geq\bar{\pi}_0$ も妥当な不等式となる. この離接カット (disjunctive cut) は, 代数的カットや交差カットと違って π_j の中に負のものを含む場合があり, カットが次第に平行に近づき切り取る領域が小さくなる現象を

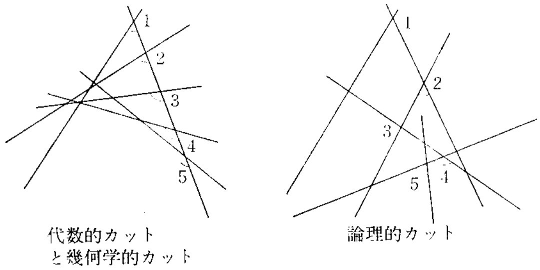

図 2.4

ある程度防止できるのが特徴である（**図2.4**参照）．

また，[11]では離接計画法の立場から，与えられた任意の妥当なカット（たとえば Gomory カット）を強化する方法が提案されているが，古くからある多くの改良法の中でこの方法はもっともすぐれているように思われるので関心のある読者は文献を参照されたい．

3. コーナー多面体と群論的アプローチ

Gomory [25] は (IP) の連続問題の最適基底 B に関する基準表現 (1.8) において，基底変数 x^B の非負条件 $x^B \geq 0$ を外して得られる問題：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{最小化} & \bar{c}^N x^N \\ \text{条 件} & x^B = \bar{b} - \bar{A} x^N \\ & x^B \text{は整数，} x^N \text{は非負整数} \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

は (IP) に比べていちじるしく簡単な構造をもち，より少ない手間で最適解が求まることを示した．ここではまずつぎの2つの事実に注意しよう．

(i) Bは連続問題の最適基底だから$\bar{c}^N \geq 0$である．

(ii) $\bar{b}, \bar{A}$ の成分 $\bar{b}_i, \bar{a}_{ij}$ はいずれも $D \equiv |\det B|$ を分母とする分数で表わされる（A, b の成分はすべて整数であることを仮定していることに注意）

問題 (3.1) の制約領域

$$C_B = \{x = (x^B, x^N) \mid x^B = \bar{b} - \bar{A} x^N, x^B \text{は整数}, x^N \text{は非負整数}\} \quad (3.2)$$

を図示したのが**図3.1**である．C^B は $\bar{x}^B$ を頂点とし $x_j{}^N$ 軸$(j \in J)$が定める錐の内部にある整数格子点の集合を表わしており，C_B の凸包 coC_B は B に関するコーナー多面体 (corner polyhedron) とよばれる．図3.1から分かるように，coC_B は $\bar{x}^B$ の近傍での co$X_I{}^N$ の近似になっていることに注意されたい．(3.1) の制約条件を成分ごとに書けば，

$$x_i{}^B = \bar{b}_i - \sum_{j \in J} \bar{a}_{ij} x_j{}^N \quad i \in I \quad (3.3)$$

となるが $\bar{b}_i$ が整数でないような添字を I' とし

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{a}_{ij} = [\bar{a}_{ij}] + \alpha_{ij} & 0 \leq \alpha_{ij} < 1 & j \in J \\ \bar{b}_i = [\bar{b}_i] + \beta_i & 0 < \beta_i < 1 & i \in I \end{array}\right\} \quad (3.4)$$

とすると，(3.2) は Gomory カットの項で述べたのと同じ理由で，

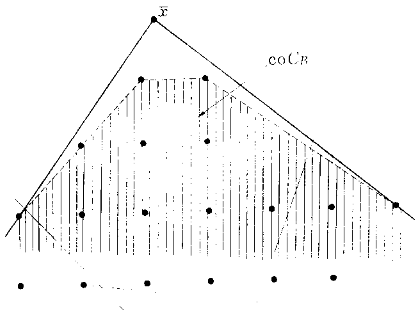

図 3.1 コーナー多面体

$$\left.\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{j \in J} \bar{c}_j{}^N x_j{}^N \\ \text{条 件} & \sum_{j \in J} \alpha_{ij} x_j{}^N \equiv \beta_i (\mathrm{mod}\ 1) \quad i \in I' \\ & x_j{}^N \text{は非負整数，} \quad \forall j \in J \end{array}\right\} \quad (3.5)$$

と書くことができる．

さてここで $\alpha_j = (\alpha_{ij})_{i \in I'}$, $\beta = (\beta_i)_{i \in I'}$ とおくと，

α_j, $j \in J$, β は mod 1 の加法に関して D もしくはその約数を位数とする加群を構成し，(3.5) は加群の位数に等しい数のノードをもつネットワーク上の最短路問題となる

ことが示される．証明はむずかしくないが，ここでは数値例でその内容を感覚的に理解していただこう．

例
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ \text{条 件} & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ は非負整数} \end{array}\right.$$

この連続問題の最適基底を B とすると

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = |\det B| = 5, \quad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = B^{-1}N = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 14/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^N = c^N - c^B B^{-1} N = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

となって，$\alpha_3, \alpha_4, \beta$ は mod 1 の加法に関してつぎの5つの元（$D=5$ に注意）

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \alpha_4, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \alpha_3,$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}, \quad g_4 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \beta$$

からなる加群の要素とみなすことができる．またこのとき(3.5)は**図 3.2** のネットワーク上での g_0 から $\beta = g_4$ にいたる最短路問題となり，その解は $g_0 \to g_1 \to g_2 \to g_3 \to g_4$ となる．したがって (3.5) の最適解は $x_3 = 0$, $x_4 = 4$ となる．

上で述べたような事実から，(3.5) は群最小化問題

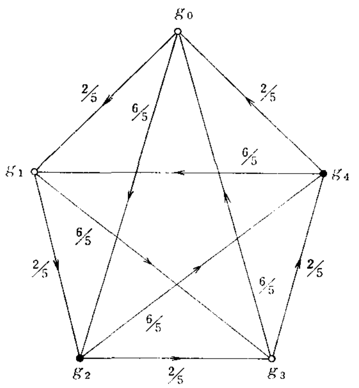

図 3.2

(group minimization problem) とよばれる．最短路問題に対しては，ダイナミックプログラミングによる方法や，Dijkstra によるアルゴリズムがあるが，ネットワークのもつ対称性を考慮すれば一般の場合より数倍速いアルゴリズムを構成することができる [17, 30, 33]. 事実，この問題をとくための計算量は，Dに関して1次のオーダーで増加し，$D\leq 5000$程度まではさほどの困難なく解かれることが報告されている [30].

さて，このようにして求まった群最小化問題の最適解を $\hat{x}^N$ としたとき，

$$\hat{x}^B=\bar{b}-\bar{A}\hat{x}^N\geq 0 \tag{3.6}$$

が成立していれば，$\hat{x}=(\hat{x}^B,\hat{x}^N)$は$(IP)$の最適解となる．たとえば，[31] では25例のうち19例が (3.6) を満たしたとの結果が報告されている．また，Gomory [27] は(3.6)が成り立つための1つの十分条件を与えているが，この条件はきわめて精度の悪いものであり，それを満たさなくても(3.6)が成立することは稀ではない．(ただし，0-1 整数計画問題の場合は Gomory の十分条件が決して満たされることはない [2]).

一方$\hat{x}^B\geq 0$が満たされない場合はどのような対策が考えられるであろうか．Gorry-Shapiro [31] は，このようなことをも想定して，$\sum_{j\in J} x_j{}^N=K$としたとき$K=0$を原始ノードとし，Kをインデクスとしてあらゆる可能なx^Nを数え上げる分枝限定法を提案している．この場合，解かれるべき副問題はいずれも群最小化問題：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{最小化} & z(\tilde{x}^N)=\min\sum_{j\in J'}\bar{c}_j{}^N x_j{}^N\\ \text{条　件} & \sum_{j\in J'}\alpha_{ij}x_j{}^N\equiv\beta'\ (\mathrm{mod}\ 1)\\ & x_j{}^N\text{は非負整数},\ j\in J'\end{array}\right\} \tag{3.7}$$

である．因みに，この方法は $(m,n)=(176,\ 3385)$ といった大きな問題に適用されて成功を収めており [30]，構造的アプローチと分枝限定法のハイブリッドアルゴリズムの典型として，重要な位置を占めている．

なお，上のアルゴリズムでもっとも時間がかかるのは(IP)の連続問題を解いて最適基底解を求める部分であり，それ以外の部分には相対的にわずかな時間しかかからないといわれている．

4. フェイス構造

論理カットの項で述べたとおり，理論的には公式(2.17)によって0-1計画問題(2.14)の実行可能格子点集合の凸包を得ることができるわけであるが，どのようなθ_iを選べばファセットが得られるかは明らかにされていない．そこでこの節では，特殊な問題の構造を利用して$\mathrm{co}\,X_I$ のファセットを求める研究の一端を，コーナー多面体とナップサック多面体を例にとって紹介しよう．

(イ) コーナー多面体

コーナー多面体（3節参照）は，$m=1$の場合，$0\leq\alpha_j<1,\ j\in J\,;\ 0<\beta<1$ に対して，

$$T=\{x^N\,|\sum_{j\in J}\alpha_j x_j{}^N\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ 1),\ x_j{}^N\text{は非負整数}\} \tag{4.1}$$

と書かれる．Gomory [27] は，

$\sum_{j\in J}\pi_j x_j{}^N\geq\pi_0$ が $\mathrm{co}\,T$ のファセットとなるための必要十分条件は，つぎのシステム

$$\left.\begin{array}{l}\pi_i+\pi_j\geq\pi_k,\ \ \alpha_i+\alpha_j\equiv\alpha_k\ (\neq 0)\text{のとき}\\ \pi_i+\pi_l=1,\ \ \alpha_i+\alpha_l\equiv 0\text{のとき}\\ \pi_j\geq 0,\ \ \forall j\in J\\ \pi_0\geq 1\end{array}\right\} \tag{4.2}$$

の実行可能基底解となることである

ことを示し，これを用いて，いくつかのケースについて具体的にすべてのファセットを計算した [27]．また，一般の m 制約問題への拡張 [36]，グループの陽表的表現を必要としないアプローチ [16]，混合整数計画問題への拡張 [28] などが，72年から74年にかけて集中的に発表されたが，現在この問題の研究はやや下火となっているようである．

(ロ) ナップサック多面体

一方最近もっとも盛んに研究されているのは，ナップサック多面体や集合分割多面体などのファセット構造である．ここで使われるのはグラフ理論的考察にもとづくファセットの生成法と，それをもとに別のファセットを生成する，いわゆる持上げ (lifting) の技術である．これらの方法を使うことによって$\mathrm{co}\,X_I$ のすべてのファセットが求まるというわけではないが，いくつかの興味ある事実が示されており，これによって整数計画法もかなり数学的奥行きを増したように思われる．

そこで，以下整数多面体の中で，一見，もっとも簡単な構造をもつナップサック多面体：

$$K=\mathrm{co}\{x\in R^n\,|\sum_{j=1}^{n}a_j x_j\leq a_0,\ x_j=0\text{ または }1,$$

$$j=0,\cdots,n\} \quad (4.3)$$

に関する結果について述べよう．ここで a_j, $j=0,\cdots,n$ はすべて正整数であるものとする（この名前は a_0 をナップサックの容量，a_j を品物 j の重量，x_j をナップサックに入れるべき品物 j の個数と考えることに由来する）．これに対して得られた基本的な結果は，

$\sum_{j\in S} a_j > a_0$, $\sum_{j\in S'} a_j \leq a_0 \quad \forall S' \subsetneqq S \subset \{1,2,\cdots,n\}$
のとき
$\sum_{j\in S} x_j \leq |S|-1$
は K のファセットとなる

というものであったが［10］，グラフ理論的考察にもとづくさまざまな一般化が研究されている．とくに最近注目されているのは，上のように簡単に求まるファセット

$$\sum_{j\in S} \pi_j x_j \leq \pi_0 \quad S\subset\{1,2,\cdots,n\} \quad (4.4)$$

をもとにして，ダイナミックプログラミングを用いて

$$\sum_{j\in S} \pi_j x_j + \sum_{j\notin S} \pi_j x_j \leq \pi_0 \quad (4.5)$$

を求めるファセットの持上げの方法である．これについては，［6, 12］に詳しい結果が示されているので関心のある読者は参照されたい．

これらの研究はあくまで整数多面体の数学的構造を調べるのが目的であって，そのもとになる整数計画問題を解くための研究というわけではない（たとえばナップサック問題はファセット構造などと関係なく効率的に解く方法が存在している）が，整数計画法の基礎理論として今後も多くの研究が行なわれるものと思われる．ただし整数多面体の研究はきわめて困難なものであり，このようなアプローチにあまり多くを期待することは無理であろうとする見解が有力である［20］．

参考文献

［1］ Balas, E., "Intersection Cuts-A New Type of Cutting Planes for Integer Programming", *Operations Research*, **19**, pp. 19-39 (1970).

［2］ ——, "A Note on the Group Theoretic Approach to Integer Programming and the 0-1 Case," MSRR 249, GSIA, Carnegie-Mellon University (1971).

［3］ ——, "Integer Programming and Convex Analysis: Intersection Cuts from Outer Polars," *Math. Prog.* **2**, pp. 330-382 (1972).

［4］ ——, "Disjunctive Programming: Cutting Planes from Logical Conditions," in *Nonlinear Programming*, **2** (O. L. Mangasarian, R.R. Meyer and S. M. Robinson eds.), Academic Press (1975).

［5］ ——, "Disjunctive Programming: Properties of the Convex Hull of Feasible Points," MSRR 348, GSIA, Carnegie-Mellon University (1974).

［6］ ——, "Facets of the Knapsack Palytope," *Math. Prog.* **8**, pp. 146-164 (1975).

［7］ ——, "Some Valid Inequalities for the Set Partitioning Problem," MSRR 368, GSIA, Carnegie-Mellon University (1975).

［8］ ——, "Disjunctive Programming," MSRR 415, GSIA, Carnegie-Mellon University (1977).

［9］ ——, V. J. Bowman, F. Glover and D. Sommer, "An Intersection Cut from the Dual of the Unit Hypercube," *Operations Rosearch.* **19**, pp. 40-44 (1941).

［10］ ——, and R. Jeroslow, "Canonical Cuts on the Unit Hypercube," *SIAM J. Appl. Math.* **23**, pp. 61-69 (1972).

［11］ ——, and ——, "Strengthening Cuts for Mixed Integer Programs," MSRR 359, GSIA, Carnegie-Mellon University (1975).

［12］ ——, and E. Zemel, "Facets of the Knapsack Polytope from Minimal Covers," *SIAM. J. Appl. Math.* **34**, pp. 119-148 (1978).

［13］ Bell, D. E. and M. L. Fisher, "Improved Integer Programming Bounds using Intersection of Corner Polyhedra," *Math. Prog.* **8**, pp. 345-368 (1975).

［14］ Bradley, G. H., P. L. Hammer and L. Wolsey, "Coefficient Reduction for Inequalities in 0-1 Variables," *Math. Prog.* **7**, pp. 263-282 (1974).

［15］ Burdet, C. A., "Enumerative Inequalities in Integer Programming," *Math. Prog.* **2**, pp. 32-64 (1972).

［16］ ——, and E. L. Johnson, "A Subadditive Approach to the Group Problom of Integer Programming," *Math. Prog. Study*, **2**, pp. 51-71 (1974).

［17］ Chen, D. S. and S. Zionts, "Comparison of Some Algorithms for Solving the Group Theoretic Integer Programming Problem," *Operations Research.* **24**, pp. 1120-1128 (1976).

［18］ Dantzig, G. B., "Note on Solving Linear Programs in Integers," *Naval Research Logistic Quarterly.* **6**, pp. 75-76 (1976).

［19］ Garfinkel, R. S. and G.L. Nemhauser, *Integer Programming*, John Wiley & Sons, 1972.

［20］ Geoffrion, A. M. and R. E. Marsten, "Integer

Programming : A Framework and the State-of-the-Art Survey," *Management Science*, **18**, pp. 465-491 (1972).
[21] Glover, F., "Cut Search Methods in Integer Programming," *Math. Prog.* **3**, pp. 86-100 (1972).
[22] ——, "Convexity Cut and Cut Search," *Operations Research*, **21**, pp. 123-134 (1973).
[23] Gomory, R. E., "An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs," in *Recent Advances in Mathematical Programming* (R. L. Graves and P. Wolfe eds.), McGraw-Hill (1963).
[24] ——, "All-Integer Integer Programming Algorithm," in *Industrial Scheduling* (Muth and Thompson eds.) Prentice-Hall (1963).
[25] ——, "On the Relation Between Integer and Noninteger Solutions to Linear Programs," *Proceedings of the National Academy of Science*, **53**, pp. 260-265 (1965).
[26] ——, "Faces of Integer Polyhedron," *Proceedings of the National Academy of Science*. **57**, pp. 16-18 (1967).
[27] ——, "Some Polyhedra Related to Combinatorial Problems," *J. of Linear Algebra and Its Applications*, **2**, pp. 451-558 (1969).
[28] ——, and E. L. Johnson, "Some Continuous Functions Related to Corner Polyhedra," *Math. Prog.* **3**, pp. 23-85 (1972).
[29] ——, and ——, "Some Continuous Functions Related to Corner Polyhedra II," *Math. Prog.* **3**, pp. 359-389 (1972).
[30] Gorry, G. A., W. D. Northup and J. F. Shapiro, "Computational Experience with a Group Theoretic Integer Programming Algorithm," *Math. Prog.* **4**, pp. 171-192 (1973).
[31] Gorry, G. A. and J. F. Shapiro, "An Adaptive Group Theoretic Algorithm for Integer Programming Problems," *Management Science*, **17**, pp. 285-306 (1971).
[32] Hammer, P. L., E. L. Johnson and U. N. Peled, "The Role of Master Polytopes in the Unit Cube," *SIAM J. Appl. Math.* **32**, pp. 711-716 (1977).
[33] Hu, T.C., *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley (1969).
[34] Jeroslow, R., "A Cutting Plane Game and Its Algorithms," CORE Discussion Paper, 7724 (1977).
[35] ——, "On Defining Sets of Vertices of the Hypercube by Linear Inequalities," *Discrete Mathematics*, **11**, pp. 119-124 (1975).
[36] Johnson, E. L., "On the Group Problem for Mixed Integer Programming," *Math. Prog. Study*, **2**, pp. 137-179 (1974).
[37] Padberg, M. W., "On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra," *Math. Prog.* **5**, pp. 119-125 (1973).
[38] ——, "A Note on Zero-One Programming," *Operations Research*, **23**, pp. 833-837 (1975).
[39] Salkin, H.M., *Integer Programming*, Addison-Wesley (1975).
[40] Toregas, C., R. Swain, C. Revelle and L. Bergman, "The Location of Emergency Service Facilities," *Operations Research*, **19**, pp. 1363-1373 (1971).
[41] Wolsey, L. A., "Faces for a Linear Inequality in 0-1 Variables," *Math. Prog.* **8**, pp. 165-178 (1975).
[42] ——, „Facets and Strong Valid Inequalities for Integer Programs," *Operations Research*. **24**, pp. 367-372 (1976).
[43] ——, "Valid Inequalities and Superadditivity for 0-1 Integer Programs," *Math. of OR*. **2**, pp. 66-77 (1977).
[44] Young, R. D., "A Simplified Primal (all-Integer) Integer Programming Algorithm," *Operations Research*, **16**, pp. 750-782 (1968).

（こんの・ひろし　筑波大学）

・研・究・部・会・報・告・

ゲーム理論とその応用

この部会は毎週金曜日東京工大鈴木光男研究室にて行なっています．以下は最近の話題です．

伊東洋三氏（専修大）フォードとGMの競争戦略
中込正樹氏（東大）寡占市場のコア
金子　守氏（筑波大）公共経済における比例均衡と投票ゲームのコア
伊東洋三氏（専修大）情報の遅れのある微分ゲーム
是枝正啓氏（長崎大）ある皿洗いゲームの交渉解
この他に東工大の学生による報告もあります．