

## 交通網の分析手法

交通網を対象とした問題の中で、オペレーションズリサーチの分野と深い関連をもっているものに各種の輸送型問題がある。これらの問題は普通回路網を用いて定式化され、基本的な問題として最短経路問題、最大流問題、最小費用流問題などがある。

本稿で考えるのは都市内道路網における基本的な流れの問題である。道路網の例として図12の仙台市を見てみよう。図では幹線道路のみを示してある。また、市内の一部分を拡大して2万5千分の1地形図にある細街路を示したものが図13である。図13の調子で図12の範囲を見た場合には道路網の交差点数は約2,500にもものぼる。

このように、幹線道路のみではなく細街路を含めて解析を行なう場合には、対象となる回路網の規模が大きくなるため、データの作成および電算機による処理に際して大変な手間と費用がかかり、しかも、得られた結果が詳細すぎて整理にも手間がかかるということがしばしば生ずる。

以下に述べる“連続体流れ”のモデルを用いた流れの問題の定式化は、上記のような回路網を用いた定式化の問題点を解決する有効な手法の1つとなり得るものである。このモデルは回路網の密に分布した枝を通る流れを連続な流れ場で近似することを基本として導かれ、したがって、回路網のより細かい枝を含めて考えるときに、より有効となるという特長をもっている。

連続系で離散系を近似する例は他の分野にも求めることができる。材料力学の分野で“応力が材

料によって決まるある値を超えない範囲内では応力とひずみは比例する”という法則が成立することはよく知られている。この法則をミクロな視点から眺めると、物質の結晶構造という離散的な系のふるまいをひずみとか応力とかの連続量を用いてマクロに記述したものと解釈することができる。

道路網の場合にはミクロな構造に対応するのが細街路からなる回路網であり、適当な広さの範囲に分布する細街路を“束ね”て見るのがマクロな見方である。回路網内の“ミクロな流れ”はキルヒホッフの法則（連続の条件）を満たし、各枝のもつ容量とかコストとかの性質に従ってふるまう。その様子を“マクロな流れ”に反映させるように“マクロな連続の条件、容量、コスト”をうまく定義することにより、回路網を近似する連続体モデルを構成することができる。

都市間の道路や、都市内でも高速道路、幹線道路については回路網を用いて表わすほうが適当である。これらの道路を回路網で表わし、ほかの道路網を連続体で近似して、両者を複合系として解析することもできる。これについては本文では触れないので[8]を参照されたい。

### 1. 連続体流れの基本的な概念

対象とする道路網は平面グラフをなすものと仮定する。この道路網を覆う2次元の領域 $V$ を考え、 $V$ 内の流れ場で道路網の流れを表わすことにする。 $V$ の境界 $\partial V$ は充分なめらかであるとする。

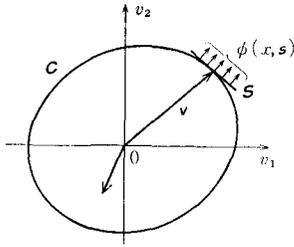


図 1 容量 C

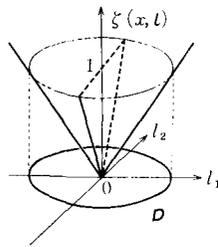


図 2 コスト phi と速度 D

また、 $V$  内の各点  $x=(x_1, x_2)'$  における流れベクトルを  $v(x)=(v_1(x), v_2(x))'$  と記す。

回路網流れの連続の条件は回路網内の各点で流入量と流出量が等しくなることである。これに対応して、流れベクトル  $v$  が満たすべき条件は  $V$  内の各点  $x$  において発散が 0 という条件である：

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad x \in V. \quad (1)$$

(1) 式は点  $x$  を囲む任意の領域において流入量と流出量が等しいという条件と等価である。

つぎに容量を定義しよう。 $V$  内の点  $x$  に置かれた単位法線ベクトル  $n$  をもつ微小長さ  $ds$  の線分  $S$  を考える。連続体に容量があることを表わすために、線分  $S$  を通過する流量には上限が存在するものとし、それを  $x$  と、線分  $S$  を表わすベクトル  $s=nds$  の関数として  $\phi(x, s)$  と表わす：

$$v(x) \cdot s \leq \phi(x, s), \quad \forall s, \quad x \in V. \quad (2)$$

$\phi$  が流量の上限として意味をもつためにつぎの 3 つの条件を要請する。

- (A)  $s \neq 0$  ならば  $\phi(x, s) > 0$ , また  $\phi(x, 0) = 0$ .
- (B) 正数  $\alpha$  と任意の  $s$  に対して  $\phi(x, \alpha s) = \alpha \phi(x, s)$ .
- (C) 任意の 2 つのベクトル  $s_1$  と  $s_2$  に対して  $\phi(x, s_1) + \phi(x, s_2) \geq \phi(x, s_1 + s_2)$ .

条件(A), (B)は流量の自然な性質を反映している。また(C)は(2)で  $n$  のすべての方向について  $\phi$  が上限(上界ではなく)となるための条件である。

(2) 式の不等式を満足するベクトル  $v$  の集合

$$C(x) = \{v | v \cdot s \leq \phi(x, s), \quad \forall s\} \quad (3)$$

を点  $x$  における容量という。 $C(x)$  がベクトル  $v$  の

原点を含む凸集合となることは  $\phi$  の性質から容易にわかる(図 1 参照)。

つぎにコストを定義しよう。 $V$  内の点  $x$  からその近くの点  $x+l$  へ“粒子”が移動するのに必要な時間(コスト)を  $x$  と  $l$  の関数として  $\varphi(x, l)$  と表わす。関数  $\varphi$  に対しても流量の上限  $\phi$  に課した 3 条件を要請する。条件(A), (B)は距離の自然な性質であり、条件(C)はよく知られた三角不等式である。これらの条件を満たす  $\varphi$  のグラフは原点を頂点とする、上に開いた凸錐である(図 2 参照)。与えられた  $\varphi$  から点  $x$  における速度集合を

$$D(x) = \{l | \varphi(x, l) \leq 1\} \quad (4)$$

と定義する。また、回路網の枝に対しては、その枝の長さを枝を通り抜けるのに必要な時間で割った商を速度ということにする。

$\varphi$  に双対な関数  $\varphi^*$  は、 $\eta$  を  $l$  の双対変数として、

$$\varphi^*(x, \eta) = \max_l \{\eta \cdot l - \varphi(x, l)\} \quad (5)$$

で定義される。前に述べた  $\varphi$  の性質を使って(5)式を計算すると次式が得られる。

$$\varphi^*(x, \eta) = 0 \quad \eta \in D^*(x), \\ +\infty \quad \eta \notin D^*(x),$$

ただし、

$$D^*(x) = \{\eta | \eta \cdot l \leq \varphi(x, l), \quad \forall l\}. \quad (6)$$

また、 $\varphi^*$  に双対な関数が再び  $\varphi$  となることから、

$$\varphi(x, l) = \max_{\eta \in D^*(x)} \eta \cdot l = \eta(x, l) \cdot l \quad (7)$$

を得る。

ここで、これまでに定義した量を平行な直線が交差してできる回路網について導いてみよう。図 3 の回路網  $G_\alpha$  は直線上を両方向に通過できるものとし、その容量と速度をすべての枝に共通に  $c$ ,

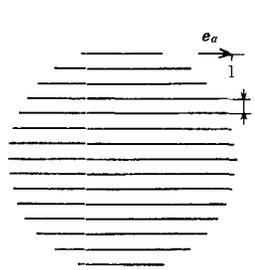


図 3 回路網  $G_\alpha$

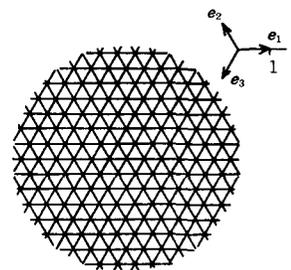


図 4 回路網 G

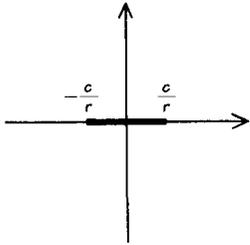


図 5 容量  $C_\alpha$

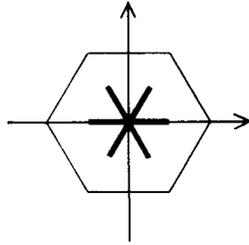


図 6 容量  $C$

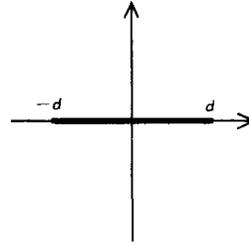


図 7 速度  $D_\alpha$

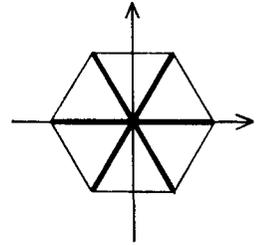


図 8 速度  $D$

$d$  と表わす. 図 4 の回路網  $G$  は  $G_\alpha$  を回転して重ね合わせたものである.

$G_\alpha$  を近似する連続体の容量は図 5 に示す

$$C_\alpha = \{v | v = \frac{\lambda c}{r} e_\alpha, -1 \leq \lambda \leq 1\} \quad (8)$$

とするのが適当であることは明らかであろう. つぎに回路網  $G$  を考える.  $G$  内に置かれた法線ベクトル  $n$  をもつ単位長さの線分  $S$  と交差する  $i$  方向 ( $i=1, 2, 3$ ) の直線の本数は, 図中の記号を用いて,  $|n \cdot e_i|/r_i$  で与えられる. そこで, 各  $i$  方向の枝の容量を  $c_i$  とすると, 線分  $S$  を通過する流量の上限は  $n$  の関数として次式のように表わされる.

$$q(n) = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{r_i} |n \cdot e_i| \quad (9)$$

この  $q(n)$  と (3) 式とから  $G$  を近似する連続体の容量

$$C = \{v | v \cdot n \leq q(n), \forall n\} \\ = \{v | v = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{c_i}{r_i} e_i, -1 \leq \lambda_i \leq 1\} \quad (10)$$

が得られる. 容量  $C$  を図 6 に示す.

回路網  $G_\alpha$  を近似する連続体の速度は図 7 に示す

$$D_\alpha = \{l | l = \lambda d e_\alpha, -1 \leq \lambda \leq 1\} \quad (11)$$

とすればよい. また, 回路網  $G$  の枝を使って点  $x$  から点  $x+l$  へ最短経路に沿ってゆくのに必要な時間  $t(l)$  は, 各  $i$  方向の枝の速度を  $d_i$  として, 次式のように表わされる.

$$t(l) = \min_{\lambda_i} \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{|\lambda_i|}{d_i} \mid l = \sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i \right\} \\ = \min_{\mu_i} \left\{ \sum_{i=1}^3 |\mu_i| \mid l = \sum_{i=1}^3 \mu_i d_i e_i \right\}. \quad (12)$$

この  $t(l)$  と (4) 式とから  $G$  を近似する連続体の

速度

$$D = \{l | t(l) \leq 1\} = \left\{ \sum_{i=1}^3 \mu_i d_i e_i \mid \sum_{i=1}^3 |\mu_i| \leq 1 \right\} \quad (13)$$

が得られる. 速度  $D$  を図 8 に示す.

ここで注意しておきたいのは, (10) 式の容量  $C$  は (8) 式の容量  $C_\alpha$  の形の集合の集合和となること, また, (13) 式の数  $D$  は (11) 式の数  $D_\alpha$  の形の集合の凸包となることである. このような関係は, 重ね合わせによって生ずる回路網とその要素となる回路網を近似するそれぞれの連続体の間に成立するものである.

## 2. 連続体流れの問題の定式化

$V$  の境界  $\partial V$  上に流入口  $P$ , 流出口  $Q$  を素となるようにとり “二端子” の最小費用流問題を定式化しよう. 境界  $\partial V$  の外向き法線ベクトルを  $n$ ,  $\partial V$  に沿う長さを  $s$  と記す.

最小費用流問題は  $V$  への流入量を指定して総費用を最小とするように流れ  $v$  を決める問題である. コストとしては 1 章で述べたものを用いる.

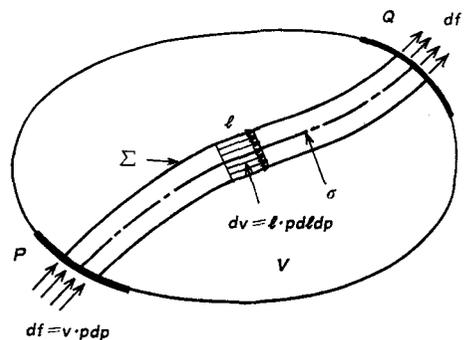


図 9  $P$  から  $Q$  への流線

$P$ から $Q$ へ向かう流れ $v$ にかかるコストはつぎのように導かれる。まず、流れ $v$ の流線はすべて $P$ 上の点から始まり $Q$ 上の点で終わることに注意しよう。それらの流線の1本を $\sigma$ とし、 $\sigma$ に沿う長さを $l$ 、接線ベクトルを $l$ と表わすと、 $\sigma$ に沿って“粒子”が移動するのに必要な時間は、(7)式より、

$$T_\sigma = \int_\sigma \eta(x, l) \cdot l \, dl \quad (14)$$

となる。つぎに $\sigma$ に平行な流線からなる微細な流管 $\Sigma$ を考え(図9参照)、 $\Sigma$ の断面(長さ $dp$ 、 $Q$ へ向かう法線ベクトル $p$ )を通過する流量を

$$df = v \cdot p \, dp$$

とすると、 $\Sigma$ 内の流れにかかるコストは

$$\begin{aligned} T_\Sigma &= T_\sigma \, df = \int_\Sigma \eta(x, v) \cdot v \cdot (l \cdot p \, dl dp) \\ &= \int_\Sigma \eta(x, v) \cdot v \, dV \end{aligned} \quad (15)$$

と表わせる。上式の変形では $\sigma$ に沿って $l$ と $v$ とが平行なことを用いた。最後に(15)式を $P$ からの流入量について積分して、流れ $v$ にかかるコスト

$$\Phi(v) = \int_P T_\sigma \, df = \int_V \eta(x, v) \cdot v \, dV \quad (16)$$

を得る。

制約条件は、 $P$ からの流入量を $\theta$ として、

$$-\int_P v \cdot n \, ds = \int_Q v \cdot n \, ds = \theta. \quad (17)$$

また境界上 $\partial V - (P \cup Q)$ における連続の条件

$$v \cdot n = 0, \quad (18)$$

および $V$ 内での連続の条件と容量制約の条件

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (19)$$

$$v \in C(x), \quad (20)$$

である。条件(17)~(20)の下で(16)を最小化するのが最小費用流問題 $P_C$ である。目的関数も条件の式も凸であるから、これは凸計画問題である。

問題 $P_C$ の双対問題は、つぎの制約条件

$$\eta_i = -\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \quad V \text{ 内}, \quad (21)$$

$$\zeta = Z_P \quad P \text{ 上}, \quad (22)$$

$$\zeta = 0 \quad Q \text{ 上}, \quad (23)$$

の下で、目的関数

$$\Psi(Z_P, \zeta, \eta) = -\int_V \phi(x, \eta) \, dV + \theta Z_P \quad (24)$$

を最大化するように $Z_P$ 、 $\zeta$ および $\eta$ を決める問題である。ここで、 $\phi$ は $\eta(x, v) \cdot v$ の双対関数

$$\phi(x, \eta) = \max\{v \cdot \eta - \eta(x, v) \cdot v \mid v \in C(x)\} \quad (25)$$

であり、スカラー $Z_P$ 、スカラー関数 $\zeta$ はそれぞれ(17)式、(18)式と(19)式に対するラグランジュ乗数である。回路網問題の用語にならって $\zeta$ をポテンシャル、 $\eta$ を圧とよぶ。(24)式を $\theta$ で微分して、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = Z_P$$

を得ることから、入口ポテンシャル $Z_P$ は流入量 $\theta$ の変化に対する総費用の変化の割合、言い換えると、流入量が $\theta$ の混雑時における最短経路の長さ(時間)を表わしている。 $\tilde{v}$ を $P_C$ の解、 $\tilde{\eta}$ を $D_C$ の解とすると、両者の間には相補条件が成立する：

$$\phi(x, \tilde{\eta}) + \eta(x, \tilde{v}) \cdot \tilde{v} = \tilde{v} \cdot \tilde{\eta}. \quad (26)$$

最短経路問題および最大流問題についても上と同様にして定式化することができる。

### 3. 連続体流れの問題の数値解法

前章で定式化した最小費用流問題を取り上げ、その数値解法を導く。

問題 $P_C$ と $D_C$ を比較すると、前者がベクトル関数を変数とするのに対して、後者はスカラー関数を変数とし、しかも制約条件が扱いやすい形をしていることがわかる。そこで、問題 $D_C$ の離散化問題を導くことにしよう。

まず領域 $V$ を図10に示すように三角形(要素とよぶ)に分割する。要素の数を $L$ 、節点の数を $M$ として、それぞれ $A_e, e=1, \dots, L, j, j=1, \dots, M$ と表わす。

ポテンシャル $\zeta$ の近似関数を $\zeta^a$ と表わし、各要素内で3つの節点における値 $\zeta_j$ から定まる $x$ の1次式(したがって連続)となる関数とする(図11参照)。また、流れ $v$ の近似関数を $v^a$ と表わし、各要素内で一定値をとる区分的定数関数とする。流れ $v^a$ の容量、コストは各要素 $A_e$ 内で一様であ

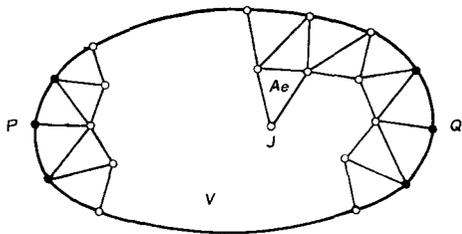


図10 領域  $V$  の分割

表1 データ作成にかかった時間。  
作業は筆者が3日間行った。

作	業	時 間
前 処 理	要素分割, 線引きなど	1 時間
データの 読み取り	交差点数 (約2,500点)	2 時間30分
	要素境界と交差する 枝の容量, 速度 (約770本)	4 時間30分
データの検査		3 時間10分

ると仮定し, それぞれ  $C_e$ ,  $\eta_e(v^a) \cdot v^a$  と表わす。

まず  $\zeta^a$  を  $D_G$  の制約条件 (21), (22) および (23)

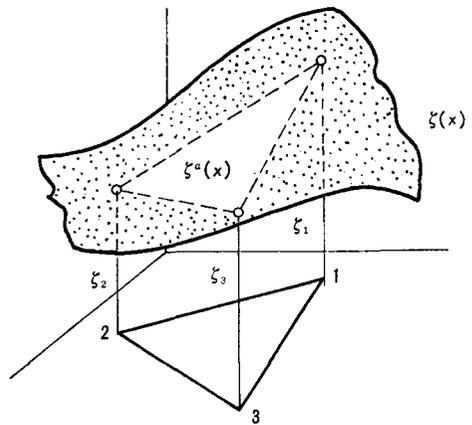


図11  $\zeta$  の近似関数  $\zeta^a$

に代入して, つぎの離散化問題の制約条件を得る。

$$\eta_e^a = -\frac{\partial S^a}{\partial x_e} \quad V \text{ 内}, \quad (27)$$

$$\zeta_j^a = Z_p \quad \text{節点 } j \text{ が } P \text{ 上}, \quad (28)$$

$$\zeta_j^a = 0 \quad \text{節点 } j \text{ が } Q \text{ 上}, \quad (29)$$

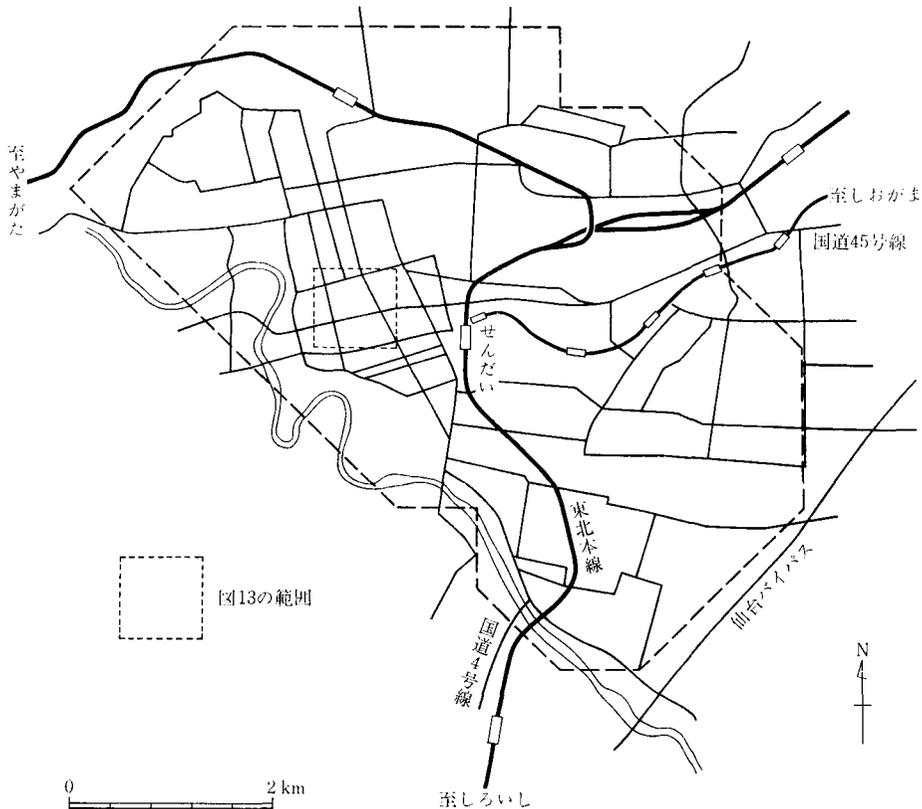


図12 仙台市の道路網

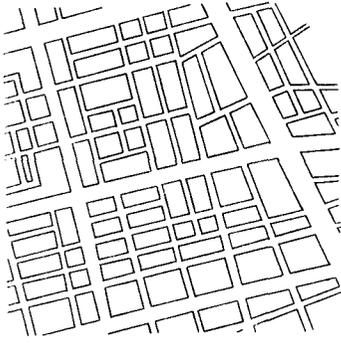


図13 仙台市街の一部

つぎに、1つの要素内で  $v^a$ ,  $\eta^a$  が一定、容量、コストが一樣なことを使うと、(25)は要素  $A_e$  内で、

$$\psi_e(\eta^a) = \max \{ v^a \cdot \eta^a - \eta_e(v^a) \cdot v^a \mid v^a \in C_e \}, \quad (30)$$

と表わすことができるので、目的関数(24)を

$$\psi(Z_P, \zeta^a, \eta^a) = - \sum_{e=1}^L \psi_e(\eta^a) \Delta e + \theta Z_P, \quad (31)$$

のように積分を和の形に直すことができる。ここで  $\Delta e$  は要素  $A_e$  の面積を表わす。

この離散化問題は  $M$  個の変数  $\zeta_i$  と目的関数の計算に必要な  $2L$  個の変数  $v^a$  からなり、凹な目的関数(31)を最大化する問題である。4章の計算例では Wolfe[10]のアルゴリズムを用いて解いた。

ここで、離散化問題の要素内の容量とコストを、対象とする道路網から計算する方法の基本的な考え方について述べる。

先に1章で平行な直線からなる回路網を近似する連続体の容量とコストを、回路網内に置いた線分  $S$  を通過する流れを考えることにより導いた。一般の回路網に対しても同様に考えればよいが、たとえば容量の計算では、線分  $S$  を置く場所によ

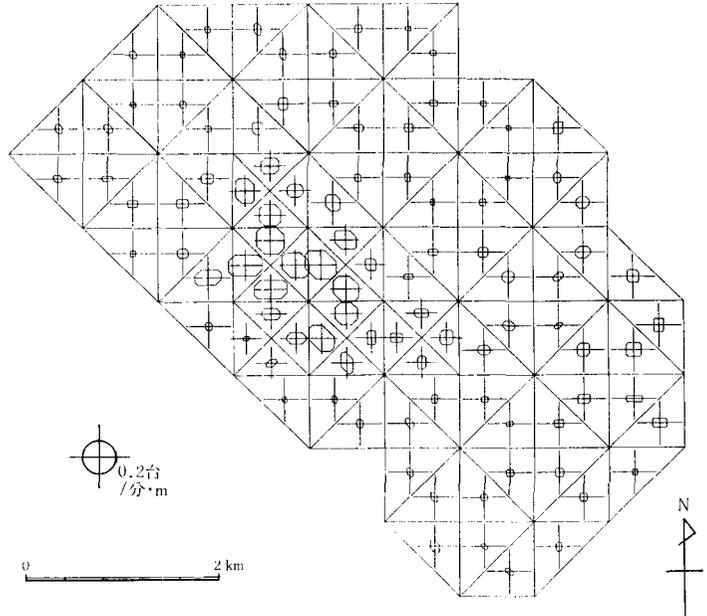


図14 各要素の容量

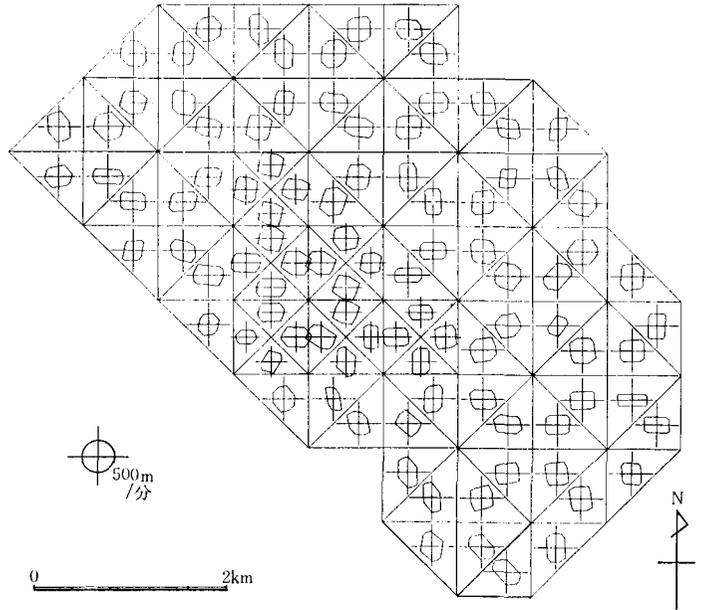
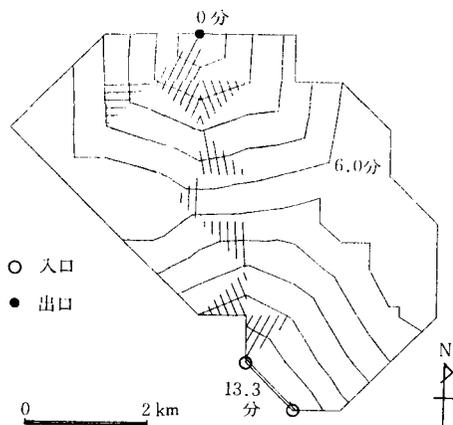


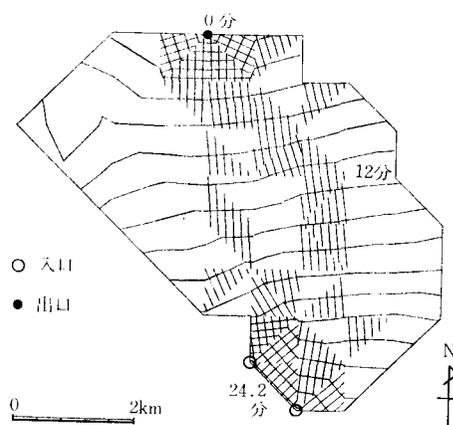
図15 各要素の速度

って交差する枝の容量の和が異なるので、 $S$  を  $V$  内で一樣に置いてその平均値をとるようにする。

これを実際に地図上に線分を置いて計算するのも1つの方法であるが、つぎのようにすると少しは手間を省くことができる。すなわち、それぞれの要素で覆われる道路網を、ランダムに直線を置き、そのうちのいくつかの枝を除いてできる回路



(a) 流入量が少ない場合



(b) 流入量が多い場合

図16 最小費用流——南から北へ——等ポテンシャル線の間隔は1.2分である。

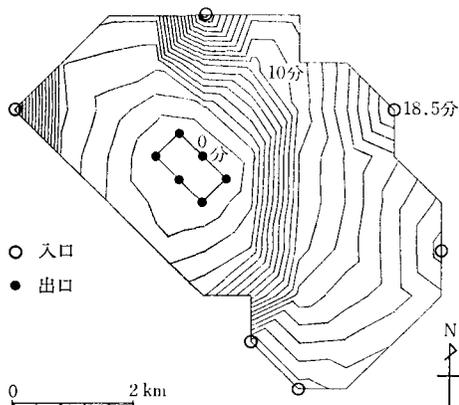


図17 最小費用流——周辺から中心部へ——  
等ポテンシャル線の間隔は1分である。

網で表わし、線分を置くかわりにランダムな直線の交点に関する積分幾何学の公式を用いる。このために必要なデータは、要素境界を横切る道路の方向、容量および速度、各要素内の3次と4次の交差点数である。詳細は〔9〕を参照されたい。

#### 4. 計算例——仙台市の道路網——

図12に示す仙台市の道路網を例題として、図中の破線で囲まれた範囲の道路網を近似する連続体流れのモデルを用いて、最小費用流問題を解いた結果を以下に示す。

モデルを構成するのに必要なデータは2万5千分の1地形図より読み取った。表1にデータ作成にかかった時間をまとめる。簡単のために、道路

の容量は幅員1mあたり1台/分、速度は500m/分とした。図14, 15はそれぞれ各要素の容量および速度を表わしている。要素の数は99、節点の数は62である。

市内を南から北へ向かう流れについて計算した結果を図16に示す。図中、折れ線は等ポテンシャル(時間)線を示し、また、条件(26)が成立している非零な流れをもつ要素を、等ポテンシャル線に垂直な方向にハッチングをして示してある。図16(a)は流入量が少なく容量制約が効いていない場合で、(b)は流れが飽和する直前まで流入量を増やした場合である。(a)と比較して、(b)ではう回する流れが多く、入口ポテンシャルが約1.8倍になっていることがわかる。

つぎに、市の周辺部から中心部へ向かう流れについて流入量を飽和する直前まで増やした場合の計算結果を図17に示す。図中の折れ線は等ポテンシャル線を示し、それらが密になっている部分が流れのネック(最小切断)となる領域に相当する。ネックとなるのは、いくつかの入口のほか、鉄道に沿った場所である。最大流量は約336台/分であり、道幅に換算すると336mとなる。

なお、この例では回路網流れの問題の解との比較を行なわなかったが、別の計算例では両者が良く一致することが示されている〔8〕,〔9〕参照。

## ま と め

ここで述べた手法は、筆者が実験中のものであり、道路網解析の手法として定着したものとは言い難い。そこで、現在までに筆者が経験した本手法の特長および問題点を述べてまとめとしたい。

本手法によれば、

- i) 対象とする回路網の規模にかかわらず、必要な解の精度に応じて分割を決めることにより解くべき問題の規模が定まること、また、
- ii) 回路網の枝が密になった場合には連続体近似の考え方がよりよく当てはまることから比較的粗い分割で精度のよい解が得られること、

そのほか、モデルの構成に際して、

- iii) 回路網を構成する場合に比較して少量のデータですむこと、

というような特長がある。

これらの特長に対して、欠点としては、

- iv) 離散系では有限個の変数で記述される問題が、連続系では変数が無限次元になるために“難しく”なること、
- v) 流れがベクトルになるために、多種流問題への展開が難しいこと ([8] 参照)、

などがある。数値解法に関する問題点として、

- vi) 回路網流れ問題に比較して、問題の形を生かした有効なアルゴリズムがないため計算時間ではそれほど得にならないこと ([8], [9] 参照)、

- vii) 対象とする回路網に応じた適切な分割の方法を示し、その解の精度への影響を評価する必要があること、

などがあり、検討を行なっている。

終りに、本稿をまとめるにあたって、このような機会を与えかつ貴重なご助言をくださった東大工学部奥平耕造助教授、平素より御指導をいただいている同伊理正夫教授に心から感謝の意を表します。また、4章の計算では東京大学大型計算機

センター HITAC 8800/8700を利用した。

## 参 考 文 献

- [1] Ekeland, I. and Temam, R.: *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [2] Hu, T. C.: *Integer Programming and Network Flows*. Addison-Wesley, Reading, 1969.
- [3] Iri, M.: *Network Flow, Transportation and Scheduling—Theory and Algorithms*. Academic Press, New York, 1969.
- [4] Iri, M.: *Theory of Flows in Continua as Approximation to Flows in Networks*. *Survey of Mathematical Programming*, Prekopa, A. (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] 腰塚武志: 都市平面の基礎的研究, 東京大学博士論文, 1977年7月.
- [6] Oden, J. T. and Reddy, J. N.: *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. Wiley-Interscience, New York, 1976.
- [7] Santalo, L. A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, London, 1976.
- [8] Taguchi, A.: Maximim Flow Problem in Discrete Continuous Compound System and its Numerical Approach. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.21, No.2 (1978), pp.245~272.
- [9] Taguchi, A.: Minimum-cost Flow Problem in Continua and its Numerical Approach, submitting to *Journal of the Operations Research Society of Japan*.
- [10] Wolfe, P.: A Method of Conjugate Subgradients for Minimizing Nondifferentiable Functions. *Mathematical Programming Study* 3 (1975), pp.145~173.

たぐち・あづま 1951年生

1974年 東京大学工学部計数工学科卒

現在 東京大学工学部計数工学科