賭けの数理－Ⅳ

竹内　啓

1. ブライマンのルール

有利な賭けの場合に，ブライマンのルール，すなわち t 期における所持金額を X_t とするとき，$\log X_t$ を最大にするような賭け方が，所持金額の増加率を最大にするという意味で最適であることを前号にのべた．今度はそれが具体的にどんな形になるかをくわしく調べよう．

一番簡単な場合として1から p までの番号の“くじ”があり，そのうちの1つが“当り”となり，他は“外れ”となるものとしよう．i 番のくじが“当る”確率を p_i，そのときの賞金を r_i とする．くじの価格はすべて1とする．これはちょうど競馬で単勝式の馬券を買う場合に当る．いま所持金を X_0 とするとき $\pi_i X_0$，$i=1,\cdots,p$ をそれぞれ i 番目のくじを買う額とすれば，ブライマンのルールを求めるには，

$$E(\log X_1)=\sum_{i=1}^{p} p_i \log(\pi_0+\pi_i r_i)+\log X_0$$
$$=M+\log X_0(\text{とおく})$$

を最大にするように π_i を定めればよい．いま賭けは有利と仮定したから，

$$\max_i r_i p_i>1$$

である．そこで M を

$$\pi_i\geqq 0 \qquad \sum_{i=0}^{p}\pi_i=1$$

の条件の下で最大にする．

ラグランジュ乗数を μ_i および λ として，ラグランジュ形式

$$\phi=M+\sum\mu_i\pi_i-\lambda\sum\pi_i$$

をつくり，π_i で微分すれば，

$$\frac{\partial\phi}{\partial\pi_i}=\frac{\partial M}{\partial\pi_i}+\mu_i-\lambda$$

$$\begin{cases} =\sum_i \dfrac{p_i}{\pi_0+\pi_i r_i}+\mu_0-\lambda=0,\ i=0 & (1)\\ =\dfrac{p_i r_i}{\pi_0+\pi_i r_i}+\mu_i-\lambda=0,\ i=1,2,\cdots,p & (2)\end{cases}$$

となる．そうして $\sum\pi_i=1$，$\pi_i\geqq 0$，$\mu_i\geqq 0$ かつ $\pi_i\mu_i=0$ とならねばならない．M は π_i に関して凹関数となっているから，上記の条件を満たすことが π_i が M を条件つきで最大にするための必要十分条件になる．

2. 解の形

ところで $\pi_0>0$ ならば $\mu_0=0$ であるから，(1)より，

$$\sum_i \frac{p_i}{\pi_0+\pi_i r_i}=\lambda$$

一方(2)より，

$$\sum\frac{p_i}{\pi_0+\pi_i r_i}=\sum\frac{1}{r_i}(\lambda-\mu_i)\leqq\left(\sum\frac{1}{r_i}\right)\lambda \tag{3}$$

となるから，

$$\sum\frac{1}{r_i}\geqq 1$$

でなければならない．すなわち，

$$\sum\frac{1}{r_i}<1 \quad \text{ならば} \quad \pi_0=0$$

このとき，$p_i/\pi_i+\mu_i-\lambda=0$

であるから $\pi_i>0$．したがって $\mu_i=0$，$p_i/\pi_i=\lambda$ となり $\sum p_i=1$，$\sum\pi_i=1$ だから結局，

$$\pi_i=p_i \tag{4}$$

となる．$\sum 1/r_i=1$ のときも $\pi_0=0$，$\pi_i=p_i$ は解である．さらに $\pi_0>0$ とすると(3)の等号が成り立たねばならないから $\mu_i=0$，

$$\frac{p_i r_i}{\pi_0+\pi_i r_i}=\lambda \qquad \pi_i=\frac{p_i}{\lambda}-\frac{\pi_0}{r_i}$$

$\sum\pi_i=\sum p_i=1$ より $\lambda=1$ であるから結局，

$$\pi_i=p_i-\pi_0/r_i \qquad i=1,\cdots,p \tag{5}$$

を得る．そうして π_0 は $0\leqq\pi_0\leqq\min p_i r_i$ の範囲の任意の値をとることができる．

$\sum 1/r_i>1$ のときは(3)式において不等号が成立するから，いくつかの i について $\pi_i=0$，そのような i に対して，$p_i r_i\leqq\lambda\pi_0$ となる．したがって $\pi_0>0$．

いま $\pi_i=0$ となるような i の集合を I，その余集合を J とあらわすと，

$$j\in J \text{のとき，} \pi_j=p_j/\lambda-\pi_0/r_j$$

となる．したがって $\sum_{j\in J}\pi_j+\pi_0=1$ だから，

$$\left(\sum_{j\in J}\frac{1}{r_j}\right)\pi_0+(1-\pi_0)=\left(\sum_{j\in J}p_j\right)/\lambda \tag{6}$$

を得る．他方 $\pi_0>0$ より $\mu_0=0$．したがって(1)より，

$$\lambda=\sum_i\frac{p_i}{\pi_0+\pi_i r_i}=\sum_{i\in I}\frac{p_i}{\pi_0}+\left(\sum_{j\in J}\frac{1}{r_j}\right)\lambda$$

となるから，つぎの式を得る．

$$\left(\sum_{j\in J}\frac{1}{r_j}\right)\pi_0=\pi_0-(\sum_{i\in I}p_i)/\lambda=\pi_0-(1-\sum_{j\in J}p_j)/\lambda$$

これを(6)に代入すれば，

$$(1-1/\lambda)+\sum_{j\in J}p_j/\lambda=\sum_{j\in J}p_j/\lambda.\ \text{ゆえに}\ \lambda=1$$

となる．したがって結局すべての i に対して，

$$\pi_i=\max(0,\ p_i-\pi_0/r_i) \tag{7}$$

とあらわすことができる．ここで π_0 は条件

$$\sum_{i\in I}\frac{p_i}{\pi_0}+\sum_{j\in J}\left(\frac{1}{r_j}\right)=1 \tag{8}$$

から定められる．

3. 解の性質

(4)，(5)，(7)で与えられる解は，いくつかの興味深い性質をもっている．まず第一に $\max p_i r_i>1$ であることは仮定されているが(実はもしすべての i について $p_i r_i\leqq 1$ ならば $\pi_0=1$ が解となること，すなわち何も賭けないのがよいということが示される)，しかし $\pi_i>0$ となるすべての i について $p_i r_i>1$ となるとは限らないのである．実際 $\sum 1/r_i<1$ ならば(4)で示されるように $\pi_i=p_i$ であって，賭け金の配分比率は r_i には依存しないことになる．つまり r_i がどんなに小さくても，それとは関係なく確率に比例して“くじ”を買うべきだということになる．このことは一見おかしいことのように思われるが，実は $\pi_0=0$ ならば，

$$E(\log X_1)=\sum p_i\log(\pi_i r_i)+\log X_0$$
$$=\sum p_i\log\pi_i+\sum p_i\log r_i+\log X_0$$

となって，$E(\log X_1)$を最大にするには単に $\sum p_i\log\pi_i$ を最大にすればよいことがわかる．

また $\sum 1/r_i=1$ のときには $\pi_i=1/r_i$ とすれば，得る金額がつねに1となるから，それは全く賭けをしないことと同じになる．このことから解が一義的でない理由が明らかになる．

実は $\sum 1/r_i=1$ という条件はつぎのように考えることができる．たとえば競馬などの場合に，主催者が“ピンハネ”することなく，賭け金が全額配当されるとすると，i 番目の券の売れた比率が q_i ならば $r_i=1/q_i$ となる．そうしてこのとき $\sum 1/r_i=\sum q_i=1$ となる．したがって $\sum 1/r_i=1$ という条件は，第三者が“ピンハネ”しない状況をあらわしている．このとき $\max p_i r_i>1$ という条件は少なくとも1つの i について $p_i\neq q_i$ となること，すなわち確率と“人気”とが比例しない場合を意味している．そのときには，“人気”には無関係に“確率”のみに比例して賭けをするのがよいということになる．

$\sum 1/r_i>1$ ならば“ピンハネ”率を c とすると，

$r_i=(1-c)/q_i$ であるから，

$$\sum q_i=(1-c)\sum 1/r_i=1$$

となり，$c=1-(\sum 1/r_i)^{-1}$ となる．このときもし，

$$\max_i p_i r_i=\max_i(1-c)p_i/q_i\leqq 1$$

ならば賭けはしないほうがよい．もし上記の式で逆向きの不等式が成立するならば，賭けるべき額は(7)で与えられることになる．この場合 $\pi_0<1$ だから $p_i r_i=\pi_0+\varepsilon<1$ でも $\pi_i>0$ となることがあり得る．すなわち不利な“くじ”でも買わねばならない場合がある．

4. 一つの数値例

つぎのような5通りの“くじ”がある場合を想定しよう．

p_i	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3
r_i	9	6	5	4	3.5

この場合，

$$\sum 1/r_i=1277/1260>1$$

だから，上記の第3の場合になり $\pi_0>0$．いま $\pi_4=0$，その他の $\pi_i>0$ と仮定してみると(8)より，

$$0.2/\pi_0+\sum_{j\neq 4}1/r_j=1$$

より $\pi_0=0.2\times\dfrac{1260}{298}=\dfrac{126}{149}=0.8456$

これを(7)に代入すれば，

$$\pi_1=0.0060,\ \pi_2=0.0591,\ \pi_3=0.0308,\ \pi_4=0,$$
$$\pi_5=0.0584$$

となって，確かに最初の π_4 のみが0という仮定と一致するから，これが答になる．

この場合もっとも不利な4番目のくじ($p_4r_4=0.8$)は買わないことになるが，本来不利な1番目のくじ($p_1r_1=0.9$)もわずか(全体の0.6%)ではあるが買うことになる．有利な2番と5番のくじが買われるのは当然であるが，かなり有利な2番($p_2r_2=1.2$)と，わずかに有利な5番($p_5r_5=1.05$)をほぼ同じだけ買うというのも，ちょっと意外であるかもしれない．

なおこの場合 $\pi_0=8.46\%$ でかなり大きく，つまり賭けの額は小さくなる．これは当然であって，この場合には少なくとも，

$$\pi_0\geqq\min_i p_i r_i=0.8$$

とならねばならないのである．なおこのとき，

$$M=\sum p_i\log(\pi_0+\pi_i r_i)$$
$$=\sum_{i\in I}p_i\log p_i r_i+\sum_{j\in J}p_j\log\pi_0$$
$$=0.007$$

となるから，所持金額は1回の賭けにつき平均0.7%ずつ増加することになる．

前回までの訂正

(Ⅰ) p.467 左下12行目　(2.7)(2.10)を満たす……
⟶ (2.10)(2.7)を満たす……

(Ⅲ) p.587 左上15行目　(半)マルチンゲール
⟶優マルチンゲール