講演

Some Topics in Search Theory*

Joseph B. Kadane

文責者まえがき

J.B. Kadane 教授は1941年 Washington D.C. に生まれ，1962年 Harvard 大学の数学科を卒業し，1966年 Stanford 大学の統計学科で Ph.D. をとり，Yale大学統計教室, Center for Naval Analysis, などを経て，現在はCarnegie-Mellon大学の統計学教室の主任教授をされている．大変な秀才で研究領域は，数理統計学およびその政治・社会・心理科学への応用，数理経済学およびその教育への応用，sequential problems, crinical trials 等々にわたり，*Econometrica, Opns. Res.*，その他の専門雑誌に多数の研究論文を発表している．

文責者の私事で恐縮であるが，1965年の夏に Stanford 大学の統計教室に滞在したとき，たまたま同教室の赤表紙の研究リポートの中で大変にすぐれた一編を読んで，ひどく感服したのであるが，それが J. B. Kadane の Stanford 在学中の論文で処女論文であったことを後に本人から聞いた．それは障害克服の問題で，それをさらに一般化したものが後の[1]になっている．その折は夏休み中のことでもあり面晤の機会はなかったのであるがこのたび，日本学術振興会の教授交換計画により，4月下旬より約3カ月間，京都大学の経済研究所に滞在され，精力的な研究・講演活動を通じて各関係分野の研究者と感銘的な交流を実現できたことは大変に嬉しいことである．

Kadane 教授のOR方面への寄与は，search theory においてよく知られているが，この他にも最近のものとして，裁判における陪審員の選定に関する研究（たとえば Roth, Kadane and DeGroot, *Opns. Res.* 25(1977), 901-919, など）がある．これは陪審員の選定過程を，検察側と弁護側とがそれぞれ所与の回数だけ忌避権を行使できるとして，双辺的多段決定過程として解析したもので，完全情報の非零和多段ゲームでもあるところから，大変におもしろい研究であると思う．氏はOR学会関西支部の定例講演会ではこの話をされ，東京での月例講演会では，search theory の最近の研究（主として[3]，[4]）について講演された．

以下はこの東京講演の要旨である．たえず聴衆の理解の程度を確かめつつ，ゆっくりと議論を進めるようすは教室における講義と変わらなかった．

講演内容

まず重要な sequential problem を二つあげる：

例 1 一つの object が n boxes のうちのどれか一つにあることがわかっていて，それを発見することが目的である．

p_k=object が box k に存在する確率

c_k=box k を探して発見できなかったときの cost

x_k=box k を探して発見できたときの cost

とする．（普通は box k を探せば，object を発見しようとしまいと cost c'_k がかかるから，c_k, x_k のかわりにそれぞれ c'_k, $-r_k+c'_k$ としている．$r_k>0$ は box k の中で object を発見したときもらえる報酬である）．簡単のために perfect detection を仮定する．object を detect するまで（あるいは，すべての box を探してしまうまで）の期待費用を最小にするような探索戦略を求めよ．

$\{1,\cdots,n\}$ の部分集合からつくった順列はすべて探索戦略をあらわす．σ_1 と σ_2 とは互いに disjoint な二つの探索戦略とする．まず σ_1 をやり，object を発見できなかったならばつぎに σ_2 をやる，という戦略を $\sigma_1\sigma_2$ であらわす．

$X(\sigma)$=戦略 σ による期待費用

$C(\sigma)$=戦略 σ によって object を発見できなかったときの条件つき期待費用

$P(\sigma)$=戦略 σ によって object を発見できる確率

とおく．box k を探す，という簡単な戦略を $\sigma_k{}^0$ であらわすと，明らかに，

* 第65回月例講演会より

$$X(\sigma_k{}^0)=p_k x_k+(1-p_k)c_k$$
$$(1.1)\quad C(\sigma_k{}^0)=c_k$$
$$P(\sigma_k{}^0)=p_k$$

になっている．一般に漸化関係

$$(1.2)\quad \begin{cases} X(\sigma_1\,\sigma_2)=X(\sigma_1)+X(\sigma_2)-P(\sigma_1)\,C(\sigma_2) \\ C(\sigma_1\,\sigma_2)=C(\sigma_1)+C(\sigma_2) \\ P(\sigma_1\,\sigma_2)=P(\sigma_1)+P(\sigma_2) \end{cases}$$

が成立する．null strategy Λ に対しては，

$$(1.3)\quad X(\Lambda)=C(\Lambda)=P(\Lambda)=0$$

としておく，

例 2 これは障害克服の問題，あるいは quiz show の問題[1] である．n 個の障害

$k=1,\cdots,n$ がある．

p_k=障害 k を克服できる確率

v_k=障害 k を克服したときもらえる報酬

とする．つぎつぎと一つずつ障害を克服していって一度失敗すれば終わりで，それまでにかち取った報酬の和を受け取る．期待利得を最大にするには，どのような順序(=戦略)で障害にあたればよいか？

$V(\sigma)$=戦略 σ による期待費用

$S(\sigma)$=戦略 σ によって process が継続する（停止しない）確率

とおくと，明らかに，

$$(1.4)\quad \begin{cases} V(\sigma_k{}^0)=-p_k\,v_k \\ S(\sigma_k{}^0)=1-p_k \end{cases}$$

$$(1.5)\quad \begin{cases} V(\sigma_1\,\sigma_2)=V(\sigma_1)+S(\sigma_1)\,V(\sigma_2) \\ S(\sigma_1\,\sigma_2)=S(\sigma_1)\,S(\sigma_2) \end{cases}$$

が成立する．null strategy に対しては，

$$(1.6)\quad V(\Lambda)=0,\ S(\Lambda)=1$$

としておく．上記の二例題をつぎのように総合することができる．いま，mをある実数として，三つの実数値関数 F, f, G が漸化関係

$$(1.7)\quad \begin{aligned} F(\sigma_1\,\sigma_2)&=F(\sigma_1)+F(\sigma_2)+G(\sigma_1)\,f(\sigma_2) \\ f(\sigma_1\,\sigma_2)&=f(\sigma_1)+(1+mG(\sigma_1))\,f(\sigma_2) \\ G(\sigma_1\,\sigma_2)&=G(\sigma_1)+(1+mG(\sigma_1))\,G(\sigma_2) \end{aligned}$$

を満足するとする．さらに null strategy に対して，

$$(1.8)\quad F(\Lambda)=f(\Lambda)=G(\Lambda)=0$$

としておく．

定理 1 (i) $m=0$のとき(1.7)−(1.8)は(1.2)−(1.3)に帰する．(ii) $m=-1$ のとき (1.7)−(1.8) は (1.5)−(1.6) に帰する．

証明 F, f, G をそれぞれ $X, -C, P$ とおけば(i)がわかり，それぞれ $V, -V, 1-S$ とおけば(ii)がわかる．(証明終)

Kadane[2] によれば，(1.7)がもしも二つの相異なる0でない $m, \tilde{m}$ を有すれば，それらは同一の問題に帰する．そこで $m=0,-1$ は本質的に異なった二つの m の値ということになる．

定理 2 F, f, G は associative である：

$$(1.9)\quad \begin{cases} F((a\,b)c)=F(a(b\,c)) \\ f((a\,b)c)=f(a(b\,c)) \\ G((a\,b)c)=G(a(b\,c)) \end{cases}$$

証明 (1.7)の反復適用によって示せる．(証明終)

戦略 a が non-null のとき

$$\phi(a)\equiv f(a)/G(a)$$

とおく．そうすると最初の基本定理

定理 3 戦略 b, c が non-null で $\phi(b)<\phi(c)$ とする．そうすると $F(acbd)<F(abcd)$，したがって戦略 $(abcd)$ は最適でない．

を得る．これは Smith(1956), Bellman(1957), Matula(1964), Kadane(1969), Rau(1971), Sidney(1975)などの sequencing problems の基本定理をもっとも一般化したものである．

さて例1において p_k, c_k, x_k をそれぞれ $p_{j,k}, c_{j,k}, x_{j,k}$ に変える．$\alpha_{j,k}$ を box k の j 回目の探索における見逃がし確率とするとき，

$$p_{j,k}=p_k\ (1-\alpha_{j,k})\prod_{l=1}^{j-1}\alpha_{l,k}$$

である．この model では探索戦略は制約をもち，それは n 本の line をもち，line k において探索 (j,k) は必ず $(j-1,k)$ に先行され，$(j+1,k)$ に先行する．以下，議論は，このような partial ordering constraint を考慮する探索理論になってゆく．

文責者あとがき

当日に教授が用意された preprint にはもう少し先があったけれども，時間の都合上からか，そこに進むことはなかった．定理1～3の証明は懇切になされた．それにしても，当日の参会者が少数で，関西支部の講演のときの1/3以下であったことは残念である．

参 考 文 献

[1] Kadane, J. B., "Quiz show problems", *J. Math. Anal. Appl.* **27** (1969), 609-623.

[2] _____, "A characterization of the Rau class of sequential problems", Unpublished mimeo, Carnegie-Mellon Univ., 1975.

[3] _____ and H. A. Simon, "Optimal problem-solving search: all or none solutions", *Artificial Intelligence* **6** (1975), 235-247.

[4] _____ and _____, "Optimal strategies for a class of constrained sequential problems", *Ann. Stat.* **5** (1977), 237-255.

（文責：大阪大学基礎工学部　坂口　実）