フォーラム

賭けの数理－Ⅲ

竹内　啓

1. 有利な賭けの場合

今度は「有利な賭け」の場合を考えよう．すなわち p 個の「くじ」のうちの少なくとも1つは，その期待金額が1(「くじ」の価格) より大きくなるものとする．すなわち p_j を j の「目」が出る確率，r_{ij} を目が j のときのくじ i の配当とすると，

$$\max_i \sum_j r_{ij} p_j > 1 \qquad (1)$$

このような場合でも，確実に「損」をすることは可能である．すなわち，もしどの「くじ」も完全に「はずれ」のときは配当金額が0である：

$$\min_j r_{ij} = 0 \quad i=1,2,\cdots,p$$

とすれば，所持金をつねに特定の「くじ」に全額賭けつづけるならば，いつか確実に所持金を失なってしまう．

しかしこの場合うまくやれば，所持金を無限に増加させることは可能である．以下このことを示そう．

いま所持金をつねに一定の割合 $\pi_1,\cdots,\pi_p$ でそれぞれ $1,\cdots,p$ の「くじ」に賭けるとしよう．さらに，

$$\pi_0 = 1-\pi_1-\cdots-\pi_p \geqq 0$$

とおく．このとき t 回目の賭けの後の所持金額を X_t とし，

$$Y_t = \log X_t - \log X_{t-1}$$

とおくと，Y_t は互いに独立に同じ分布にしたがうことは明らかである．そうして，

$$P_r\{Y_t = \log(\sum_i r_{ij}\pi_i + \pi_0)\} = p_j \quad j=1,2,\cdots,q$$

となる．

ここでもし，$E(Y_t)>0$ ならば，確率1で，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t > 0$$

となり，$\log X_t = \log X_0 + \sum Y_t \to \infty$ となる．

そこで(1)の条件の下で $E(Y_t)>0$ とすることができることを示す．いま，$\sum_j r_{i^*j} p_j = \mu^* > 1$ とし，$\pi_{i^*}=c$, $\pi_0 = 1-c$, $\pi_i = 0$, $i \neq i^*$ とする．このとき，$E(Y_t) = \sum p_j \log\{r_{i^*j}c + (1-c)\}$ となるから，この右辺を $\phi(c)$ とおけば，

$$\phi(0)=0 \qquad \phi'(0) = \sum p_j r_{i^*j} - 1 > 0$$

したがって充分小さい $c>0$ をとれば，$\phi(c)=E(Y_t)>0$ となる．すなわち適当な定比例配分戦略を用いれば，いくらでも所持金額を増すことができる．

2. Breiman の戦略

ところで定比例配分戦略の中では $E(\log Y_t)$ を最大にするような戦略がもっとも有利であることはいうまでもない．

すなわち π_i^* を，$\mu = \sum_j p_j \log(\sum_i r_{ij}\pi_i + \pi_0)$ を，条件 $\pi_i \geqq 0$, $\sum_{i=0} \pi_i = 1$ の下で最大にする値とする．このとき比 π_i^* を用いる定比例配分戦略をブライマンの戦略 Breiman's strategy という．

ブライマンの戦略が定比例戦略の中で最適であることは明らかであるが，その他の一般の戦略の中でも最適になることがつぎのように示される．

いま戦略として，$\pi_0 \geqq \varepsilon > 0$ となるようなもののみを考えることにしよう．すなわち少なくとも ε だけは残しておくものとする．このとき $\mu^* = \sum p_i \log(\sum r_{ij}\pi_i^* + \pi_0^*)$ とおき，$Y_t = \log X_t - \log X_{t-1}$ と定義すると，$E(Y_t | Y_1, \cdots, Y_{t-1}) \leqq \mu^*$ となる．また $\pi_0 \geqq \varepsilon > 0$ の条件の下では，

$$V(Y_t | Y_1, \cdots, Y_{t-1}) \leqq \sigma^2$$

となる σ^2 が存在する．このように条件の下で，つぎのような拡張された Kolmogoroff の不等式が証明される．

$$P_r\{\max_{k\leqq n} (\log(X_k/X_0) - \mu^*) \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

これより，ふつうの大数の強法則の証明と同様にして，

$$P_r\{\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log(X_n/X_0) - \mu^*\right) \leqq 0\} = 1$$

が証明される．

一方ブライマンのルールを用いれば，

$$\frac{1}{n}\log(X_n/X_0) \to \mu^*$$

となることは明らかである．

いいかえればブライマンの戦略を用いれば，所持金額

は $e^{\mu^* t}$ に比例して増大するが，他の戦略を用いてそれより早く所持金を増加させることはできないことになる．

3. ブライマンの定理

実はより強くつぎのことが成り立つ．同じ初期値から出発して，一方ではブライマンの戦略を用い，他方では他の任意の戦略を用いて賭をつづけるとして所持金額をそれぞれ X_t^* および X_t^0 とする．そうすると，

$$X_t^0/X_t^*$$

は一定の確率変数に確率1で収束し，かつ，

$$E\{\lim X_t^0/X_t^*\}\leqq 1$$

となる．このことを示すには，

$$R_t=X_t^0/X_t^*$$

とおくとき，

$$E(R_t|R_1,\cdots,R_{t-1})\leqq R_{t-1} \tag{2}$$

となることを用い，すでに述べた(半)マルチンゲールの性質を利用すればよい．

(2)を証明するには，まず任意の $0<\alpha<1$ について

$$E\{\log((1-\alpha)X_t^*+\alpha X_t^0)-\log X_t^*|X_1,\cdots,X_{t-1}\}\leqq 0$$

となることに注意し，$\alpha\to 0$ の極限を考えればよい．

ここで $X_t^0/X_t^*\leqq 1$ となるとは限らないことは明らかである．というのは最初適当な戦略を用いれば，ある k について $X_k^0/X_k^*>1$ となることはあり得るから，その後ブライマンの戦略を採用すれば，

$$\lim X_t^0/X_t^*>1$$

となる．

さらにブライマンはつぎのことを証明した．すなわち確率1で，

$$\sum[E\{\log(X_t^0/X_{t-1}^0)|X_{t-1}^0\}-\mu^*]>-\infty$$

となるとき，そのときに限り，

$$\lim_{t\to\infty} X_t^0/X_t^*>0$$

となる．いいかえれば，ブライマンの戦略に無限に近づくように戦略を選ばなければ，$X_t^0/X_t^*\to 0$ となることが示される．すなわちブライマンの戦略以外の戦略をとりつづけると，最適な戦略をとる場合に比べて無限に不利になる．

4. 期待効用最大の考え方

ところで一つ興味ある事実として，つぎのようなことがあげられる．いま有限回数で賭けを終るとして，T 期における期待金額を最大にするような賭け方を考える．かりに $T=1$ ならば，

$$E\{X_1\}=\sum\sum r_{ij}\pi_i p_j+\pi_0$$

を最大にする解は，

$$\sum_j r_{i^*j}p_j>\max_{i\neq i^*}\sum_j r_{ij}p_j$$

となるような i^* について $\pi_{i^*}=1$ となる．

DPの考え方を適用すると，実は任意の T に対してつねに $\pi_{i^*}=1$ とすればよいことがわかる．

しかしながら，もしここで，

$$\min_j r_{i^*j}=0$$

である(かつそれに対応する j について $p_1>0$)とすると，

$$P_r\{X_T=0\}\to 1$$

となる．

したがって期待値最大の戦略を取るとすれば，T が大きいときには確実に損をしてしまうことになる．

期待金額最大の代わりに，期待効用最大の考え方をとっても，状況は本質的に変わらない．すなわち所持金額 x に対応する効用を $u(x)$ とするとき，

$$E(u(X_T))$$

を最大にすることを考える．

そうすると，$u(x)=\log x$ のときには，

$$E(\log X_T)=E(\log X_T-\log X_{T-1})+E(\log X_{T-1}-\log X_{T-2})+\cdots+\log X_0$$

となるから，$E(\log X_t-\log X_{t-1})$ を最大にすればよいことになる．その解がブライマンの戦略になることは明らかである．

それ以外の効用関数を用いると，ブライマンの戦略とは異なる戦略が最適解として得られることになる．したがって確率1で，

$$X_T/X_T^*\to 0$$

となってしまう．

対数効用関数は，昔からしばしば用いられているが，ブライマンの戦略を導くという意味で，もっとも適切な効用関数であるということができるのは，興味ある事実である．

また期待値最大の戦略が上記のように「危険」なものであるということを考慮して，期待値とともに分散をも考慮することがある．port folio selection の理論においてはこのような考え方がとられる．すなわち，

$$V(X_T)\leqq c$$

という条件の下で $E(X_T)=\max$ となるような戦略を選ぶのである．

このような考え方は期待値と分散をどのようなウエイトで考慮すべきかに問題が残るし，また「危険」の尺度として分散をとることが適当であるかどうかという問題もある．したがってそれはあまり適切な方法とは思われない．

対数効用関数を選べば，この点で問題を簡明な形で定式化することができるという面でも有効である．

ブライマンの戦略が具体的にどんな形になるかについては，なお次号に述べる．