システムの信頼性・保全性解析

——確率過程としての解析の立場から——

1. 序論

システムを高信頼度に保つため，つぎの手法がよく知られている．

(i)故障したユニットを修理する．(ii)システムを冗長化する．(iii)故障する前に保全方策を講じる．信頼性理論における主な目的はこのような手法を採用したとき，信頼性がいかに向上したかを調べることである．

ここでは，修理可能な単一ユニットシステム，2ユニットシステム，多重系システムの信頼解析を行ない，保全方策として，事前取替と予防保全を考え，それぞれの最適方策について論じる．

これらの問題は確率過程における再生理論やマルコフ再生理論，マルコフ決定理論の手法を使うことによって解析される．すなわち，取替問題に対しては再生理論，システムの解析や予防保全問題に対してはマルコフ再生理論，マルコフ決定理論を適用する．このように，信頼性理論は確率過程論の発展と密接な関係があり，待ち行列理論とならんで確率過程の重要な応用分野となっている．

とくに断らないかぎり，ここではつぎの記号を使う．$f(t), F(t)$：故障時間密度，分布．$1/\lambda$：分布$F(t)$の平均，$G(t)$：修理時間分布．$1/\mu$：分布$G(t)$の平均．$r(t)$：故障率，すなわち，$r(t)=f(t)/[1-F(t)]$．$M(t)$：区間$(0,t]$における再生関数．$\Phi(t)$を任意の分布としたとき，$\bar{\Phi}(t)=1-\Phi(t)$，$\Phi^*(s)$：分布$\Phi(t)$のラプラス・スチルチェス変換，$\Phi^{(n)}(t)$：$\Phi(t)$のn重たたみ込み．

2. 修理をともなうシステム

故障したならば修理可能なシステムを考える．修理終了後，システムは新品同様に動作すると仮定する．システムが単一ユニットで構成されているならば，このシステムはアップとダウンを繰り返すもっとも基本的なモデルになる．このとき，2状態をもつマルコフ再生過程［36］を形成し，これは交互再生過程［3］ともよばれている．この過程の滞在時間問題が［37］で研究されている．ここでは，これらの理論を信頼性モデルに適用し，単一ユニットシステムの信頼性の諸量，それの近似解を与える．

2ユニットシステムを解析するためには，ある点が再生点にならないため，従来のマルコフ再生理論を修正した手法を使う[27]．これは，2ユニットモデルを解析するのにもっとも適した手法になっている．

多重系システムに対しては，［1, p.151］によってそのシステムを解析するのに使われる確率過程の分類がなされ，結果がまとめられている．ここでは，待機冗長システムを簡単に紹介する．

2.1 単一ユニットシステム

動作状態と修理状態を交互に繰り返すシステムを考えよう．そのとき，動作状態を0，修理状態を1とおくならば，$(0, t]$間における平均故障数$M_{01}(t)$は，［1］からつぎの再生形方程式を$M_{01}(t)$に関して解くことによって得られる．

$$(2.1)\quad M_{01}(t)=\int_0^t[1+M_{11}(t-x)]\,dF(x),$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$(2.2)\quad M_{11}(t)=\int_0^t M_{01}(t-x)dG(x).$$

すなわち，$M_{01}(t)$ はユニットが時刻 x で故障した回数に，修理開始後$(0,\ t-x]$ 間における平均故障数の和で与えられる．(2.1)式，(2.2)式をラプラス・スチルチェス変換し，$M_{01}(t)$に関して解くことによって，

$$(2.3)\quad M_{01}^*(s)=\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)G^*(s)}$$

時刻 t で故障している確率で与えられる瞬間アンアベイラビリティは，

$$(2.4)\quad P_{01}(t)=\int_0^t[1-G(t-x)]\,dM_{01}(x)$$

で与えられるから，そのラプラス・スチルチェス変換は，

$$(2.5)\quad P_{01}^*(s)=\frac{F^*(s)[1-G^*(s)]}{1-F^*(s)G^*(s)}$$

一般に，上記の逆変換を求めることはむずかしい．しかし，充分大きい時間 t に対しては，[3]から，

$$(2.6)\quad M_{01}(t)\approx\frac{t}{1/\lambda+1/\mu}-\frac{1/\lambda}{1/\lambda+1/\mu}+\frac{1}{2}+\frac{\sigma_\lambda^2+\sigma_\mu^2}{2(1/\lambda+1/\mu)^2},$$

$$(2.7)\quad P_{01}(t)\approx\frac{1/\mu}{1/\lambda+1/\mu}.$$

ここで，σ_λ^2, σ_μ^2 は分布 $F(t), G(t)$の分散である．充分小さい時間 t に対しては，

$$(2.8)\quad M_{01}(t)\approx F(t),$$

$$(2.9)\quad P_{01}(t)\approx\int_0^t[1-G(t-x)]dF(x)$$

を計算をすれば充分であることが示される[31].

2.2 ユニットシステム

冗長システムでもっとも基本的なユニット待機冗長システムを考える．一つのユニットが故障したならば，待機中の他のユニットが動作し，故障したユニットは修理される．二つのユニットが動作不可能になったとき，システムは故障したという．そのとき，マルコフ再生過程の理論を応用することによって，はじめて故障するまでの時間分布，区間$(0,\ t]$において，システムが故障する平均回数，時刻 t でシステムが故障している確率が[17] で求められている．

その他の2ユニットモデルに対しては，相異なるユニット[18]，2ユニット並列システム[23]，2ユニット優先待機冗長システム[22]，2変数指数故障分布をもつ並列システム[24]，故障，修理時間が離散型分布に従う[10]，などのモデルが同様に解析されている．

2.3 多重系システム

多重系システムはある特別な条件，特別なモデルを除いては解析することはむずかしい．たとえば，n 個の予備ユニットをもつ待機冗長システムを考えてみよう．これは有限状態をもつマルコフ連鎖を形成し，二項モーメントの手法 [38] を使うことによって，MTTFやアベイラビリティを求めることができる．さらに，システムが故障するまでに状態 k(k は修理中のユニットの総数)を訪れる平均回数などが求められている[14]．その他の多重系システムに対して，それがどのような確率過程を形成するかが表で与えられている[1].

3. 年齢に依存した取替方策

動作中のシステムの故障はしばしば多額の費用とときには危険な状態を招くことがある．この場合，故障する前にいつシステムを取替えるかを決めることは重要な問題である．ここでは，システムの状態として動作状態と故障状態だけを考慮した場合について実際上よく使われている年齢による取替とブロック取替を扱う．

個別取替はt_0時間後に事前取替するモデルであり，単一ユニットの取替に用いられている．最適取替方策に関していままでの結果のまとめと割引率を考慮した場合，故障時間が離散型分布にしたがう場合の最適方策について論じる．

ブロック取替はT時間間隔で取替するモデルであり，大型なシステムの保全に用いられている．ここでは，三つの方策を考え，それぞれの場合について最適方策を求める．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

3.1 年齢による取替

単一ユニットが故障取替のほか，動作開始から t_0 時間無故障で動作すれば事前取替を行なう取替問題を考える．$t_0(0<t_0\leq\infty)$ は事前取替時間とよばれる．ユニットが時刻 0 で動作すると仮定し，X_k を各ユニットの故障時間としたとき，各再生の間隔時間は $Z_k=\min\{X_k, t_0\}(k=1,2,\cdots)$ にしたがう再生過程を形成する．

再生理論を応用することによって，単位時間当りの期待費用は，

$$C(t_0)=\frac{\text{取替からつぎの取替までの期待費用}}{\text{取替からつぎの取替までの平均間隔時間}}$$

で与えられる．よって，[1] から，

$$(3.1)\quad C(t_0)=\frac{c_1P_r\{X_k\leq t_0\}+c_2P_r\{X_k>t_0\}}{E\{Z_k\}}=\frac{c_1F(t_0)+c_2\bar{F}(t_0)}{\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt}$$

ここに，c_1，c_2 は故障取替，事前取替費用をあらわし，$c_1>c_2$ と仮定する．そのとき，最適取替方策に関してつぎの結果が得られる[35]．

(i) 故障率の極限 $r(\infty)=\lim_{t\to\infty}r(t)$ が存在し，$r(\infty)>K$ ならば，$C(\infty)>C(t_0)$ なるある有限な t_0 が存在する．ここで，$K=\lambda c_1/(c_1-c_2)$．

(ii) 故障率 $r(t)$ が連続な単調増加関数で，$r(\infty)>K$ ならば，$C(t_0)$ を最小にする最適事前取替時間 t_0^* は次式の解として一意的に定まる．

$$(3.2)\quad r(t_0)\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt-F(t_0)=\frac{c_2}{c_1-c_2}$$

(iii) 故障率 $r(t)$ が連続な単調増加関数で，$r(\infty)>K$ ならば，$r(t_0)=K$ を満たす有限な解 $\bar{t}_0$ が存在し，$t_0^*<\bar{t}_0$ である．

(i)は有限な事前取替時間が存在するための充分条件を示し，(iii)は t_0^* の上限を与えている．式(3.2)は取替問題や予防保全問題の最適方策を求める際，もっとも基本的な式となっている．

将来の取替費用を現在の費用に換算するため，割引率 α を考慮するならば，全期待費用は [5] から，

$$(3.3)\quad C(\alpha\,;t_0)=\frac{c_1\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}dF(t)+c_2e^{-\alpha t_0}\bar{F}(t_0)}{\alpha\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt}$$

前の結果において，K を，

$$K(\alpha)=\frac{c_1F^*(\alpha)+c_2[1-F^*(\alpha)]}{(c_1-c_2)[1-F^*(\alpha)]/\alpha}$$

と置き換え，(3.2)式を，

$$(3.4)\quad r(t_0)\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt-\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}dF(t)=\frac{c_2}{c_1-c_2}$$

と書き換えることによって，同様な結果を得る．

最後に，故障時間が離散型分布 $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ にしたがう場合を考えてみよう．すなわち，ユニットは動作開始から n_0 サイクル無故障で動作すれば事前取替するモデルである．このとき，サイクル当りの期待費用は (3.2) 式を離散型に書き直すことによって，

$$(3.5)\quad C(n_0)=\frac{c_1\sum_{j=1}^{n_0}p_j+c_2\sum_{j=n_0+1}^{\infty}p_j}{\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=i}^{\infty}p_j}$$

となり，前の結果がつぎのように書き換えられる[29]．

(i) 故障率 $r_\infty=\lim_{n\to\infty}r_n$ が存在し，$r_\infty>K$ ならば，$C(\infty)>C(n_0)$ なるある有限な n_0 が存在する．ここで，$r_n=p_n/\sum_{j=n}^{\infty}p_j$．

(ii) 故障率 r_n が単調増加関数で，$r_\infty>K$ ならば，$C(n_0)$ を最小にする最適事前取替時間 n_0^* が次式の解として一意的に定まる．

$$(3.6)\quad h(n_0)\geqq\frac{c_2}{c_1-c_2},\quad h(n_0-1)<\frac{c_2}{c_1-c_2}$$

ここで，$h(0)=0$,

$$h(n)=r_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{\infty}p_j-\sum_{j=1}^{\infty}p_j\,(n=1,2,\cdots).$$

(iii) 故障率 r_n が単調増加関数で，$r_\infty>K$ ならば，$r_{n_0+1}\geq K$ を満たす最小の $\bar{n}_0$ が存在し，$n_0^*\leq\bar{n}_0$ である．

3.2 ブロック取替

ユニットが自己の年齢に関係なく時間間隔 KT $(K=1,2,\cdots)$ で定期取替を行なう方策を考える．この場合，各再生の間隔時間が一定である再生過程を形成する．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ユニットが定期取替時間間隔内で故障した場合の処置方法によってつぎの三つの方策を考える[1].

1. 故障したユニットはすぐに新しいユニットに取替える．この場合単位時間当りの期待費用は,

(3.7) $C_1(T)=$

$$\frac{c_1\times[(0,\ T]\text{ 間における平均故障数}]+c_2}{T}$$

$$=\frac{c_1M(T)+c_2}{T}$$

ここで，c_1，c_2 は故障取替，定期取替の費用.

2. 故障したユニットは定期取替時間がくるまで放置され，その時間がきたときのみ取替えるとする．単位時間当りの期待費用は,

(3.8) $$C_2(T)=\frac{c_1\times[\text{平均ダウンタイム}]+c_2}{T}$$

$$=\frac{c_1\int_0^T F(t)dt+c_2}{T}$$

ここで，c_1 は故障してから定期取替で発見されるまでの損失費用，c_2 は定期取替費用.

3. 故障したユニットは小修理のみを行なう．単位時間当りの期待費用は,

(3.9) $C_3(T)=$

$$\frac{c_1\times[(0,\ T)\text{間における平均小修理回数}]+c_2}{T}$$

$$=\frac{c_1\int_0^T r(t)dt+c_2}{T}$$

ここで，c_1，c_2 は小修理の費用，定期取替の費用.

一般に，これらの結果は,

(3.10) $$C_i(T)=\frac{c_1\int_0^T\varphi(t)dt+c_2}{T}$$

と書くことができる．さらに，有限な取替時間が $C_i(T)$ を最小にする必要条件は，それがつぎの式を満たすことである.

(3.11) $$\int_0^T td\phi(t)=c_2/c_1.$$

もし，将来の費用を現在に換算するために割引率 α を考慮するならば，全期待費用は,

(3.12) $$C_i(\alpha;T)=\frac{c_1\int_0^T e^{-\alpha t}\phi(t)dt+c_2e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}}$$

さらに，n 個のユニットをもつシステムを考え，時刻 KT で一斉取替するとするならば期待費用は方策1，2，3に対応して $\phi(t)$ を $nM(t)$，$F^{(n)}(t)$，$nr(t)$ と置くことによって得られる.

4. 年齢に依存した保全方策

故障前にシステムの予防保全をするため，点検，オーバホール，必要ならば修理する方策を考える．この場合，システムは動作，予防保全または修理を順次繰り返すため，有限状態をもつマルコフ再生過程を形成し，その理論からいろいろな信頼性の諸量を求めることができる.

ここでは，最適方策を決定する目的関数として，アベイラビリティ，期待利得，区間信頼度を採用する．さらに，間欠使用モデルや多重系システムの予防保全方策についても簡単に述べる.

4.1 単一ユニットの予防保全

単一ユニットが故障修理のほか，動作開始から t_0 時間無故障で動作すれば予防保全を行なう問題を考える．$t_0(0<t_0\leq\infty)$ を予防保全時間とよぼう.

(1) アベイラビリティ

定常アベイラビリティはよく知られているように,

$$\frac{\text{平均動作時間}}{\text{平均動作時間}+\text{平均ダウンタイム}}$$

で与えられる．この場合の平均動作時間は3.1節で求めたように $\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt$ であるから，定常アベイラビリティは,

(4.1) $A(t_0)=$

$$\frac{\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt}{\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt+(1/\mu_1)F(t_0)+(1/\mu_2)\bar{F}(t_0)}$$

ここで，$1/\mu_1$，$1/\mu_2$ は平均修理時間，予防保全に要する平均時間をあらわし，$1/\mu_1>1/\mu_2$ と仮定する．上式において，$1/\mu_i$ を c_i と置き換えること

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

によって，$A(t_0)$を最大にする最適方策は(3.1)式で与えた$C(t_0)$を最小にする問題に帰着できることが容易に示される[2]．さらに，故障時間が離散型分布にしたがう場合の最適方策も［26］で議論されている．

(2) 期待利得

ユニットがある物を生産するため動作している場合を考え，e_0を生産によって得られる単位時間当りの利益，e_1，e_2を修理，予防保全による単位時間当りの利益とする．e_1とe_2は主に保全費用であるから負であり，$e_0>e_2>e_1$と仮定する．このとき，単位時間当りの期待利得は［15］から，

(4.2) $C(t_0)=$

$$\frac{e_0\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt+(e_1/\mu_1)F(t_0)+(e_2/\mu_2)\bar{F}(t_0)}{\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt+(1/\mu_1)F(t_0)+(1/\mu_2)\bar{F}(t_0)}$$

とくに，$1/\mu_1=1/\mu_2=1/\mu$のとき，故障率$r(t)$が連続な単調増加関数で，$r(\infty)>K_1$，$r(0)<k_1$ならば，$C(t_0)$を最大にする最適予防保全時間t_0^*が次式の解として一意的に定まる．

(4.3) $$r(t_0)\left[\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt+1/\mu\right]-F(t_0)=\frac{e_0-e_1}{e_2-e_1},$$

$$k_1=\frac{e_0-e_2}{(e_2-e_1)/\mu},\ K_1=\frac{e_0-e_1}{(e_2-e_1)(1/\lambda+1/\mu)}.$$

(3) 区間信頼度

区間信頼度$R(x,T)$はある時刻Tからx時間無故障で動作する確率として定義される．予防保全を考慮したとき，区間信頼度$R(x,\ T;t_0)$はつぎの方程式で与えられる[11]．

(4.4) $$R(x,T;t_0)=\bar{F}(T+x)\bar{A}(T)+\int_0^T\bar{F}(T+x-u)\bar{A}(u)dM(u).$$

ここで，$A(t)=0(t<t_0)$，$A(t)=1(t\geq t_0)$であり，$dM(u)$は時刻uで修理または予防保全が終了する確率である．この式において，$T\to\infty$としたときの区間信頼度は再生理論におけるブラックウェルの定理から，

(4.5) $$R(x;t_0)=\lim_{T\to\infty}R(x,T;t_0)$$

$$=\frac{\int_x^{t_0+x}\bar{F}(t)dt}{\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt+(1/\mu_1)F(t_0)+(1/\mu_2)\bar{F}(t_0)}$$

とくに，$1/\mu_1=1/\mu_2=1/\mu$のとき，故障率$H(t)=[F(t+x)-F(t)]/\bar{F}(t)$が連続な単調増加関数で$H(\infty)>K_2$ならば，$R(x;t_0)$を最大にする$t_0^*$が次式の解として一意的に定まる．

(4.6) $$H(t_0)\left[\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt+1/\mu\right]-\int_0^{t_0}[\bar{F}(t)-\bar{F}(t+x)]dt=1/\mu,$$

$$K_2=\frac{\int_0^x\bar{F}(t)dt+1/\mu}{1/\lambda+1/\mu}.$$

もし，Tが一定でなく指数分布$(1-e^{-\alpha t})$にしたがうならば，区間信頼度は，

(4.7) $R(x,\alpha;t_0)$

$$=\frac{\alpha e^{\alpha x}\int_x^{t_0+x}e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt}{\alpha G^*(\alpha)\int_0^{t_0}e^{-\alpha t}\bar{F}(t)dt+1-G^*(\alpha)}$$

さらに，費用を導入した場合や離散型の場合も［12］で議論されている．

(5) 間欠使用モデル

ユニットが確率$p(=\gamma/(\theta+\gamma))$で使用が要求されるとする．そのとき，失望時間までの平均時間は［34］から，

(4.8) $$T(t_0)=\frac{1}{\theta}+\frac{\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt-1/(\theta+\gamma)}{1-pG_1^*(\theta)F(t_0)-pG_2^*(\theta)\bar{F}(t_0)}$$

もし，$\lambda<(\theta+\gamma)$，故障率$r(t)$が連続な単調増加関数で，$r(\infty)>K_4$ならば，$T(t_0)$を最大にするt_0^*は次式の解として一意的に定まる．

(4.9) $$r(t_0)\left[\int_0^{t_0}\bar{F}(t)dt-\frac{1}{\theta+\gamma}\right]-F(t_0)=\frac{1-pG_1^*(\theta)}{p[G_2^*(\theta)-G_1^*(\theta)]},$$

$$K_4=\frac{1-pG_1^*(\theta)}{p[G_2^*(\theta)-G_1^*(\theta)][1/\lambda-1/(\theta+\gamma)]}.$$

4.2 多重系システム

2ユニット待機冗長システムに対する予防保全

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

には，二つの方策が考えられている．一つは予防保全時間に達したとき，予備ユニットが保全中であれば終了するまで延期するという方策であり，他方は予備ユニットに関係なく時間がくれば予防保全するという方策である．前者のモデルに対して，MTTF，アベイラビリティ，単位時間当りの期待費用，を最大または最小にする最適方策が議論されている[20, 21, 28]．前者と後者の MTTF の比較が［6］でされている．さらに，2ユニット優先冗長システムは［33］で扱われている．

多数ユニットをもつシステムの予防保全問題を論じることは非常にむずかしい．[25]では，一つの主ユニットと予備ユニットをもつシステムを考え，単位時間当りの期待費用を最小にする主ユニットの最適予防保全時間を求めている．

5. 状態に依存した取替，保全方策

前節までに取扱われているシステムはその状態としては動作状態と故障状態の2種だけが仮定されていたが，本節では，システムは多くの状態をもつものとする．たとえば，n 個のユニットから構成される並列システムを考え，システムの状態を故障ユニットの数に対応させると，システムは $n+1$ 個の状態をとることになる．いま各ユニットは独立に故障し，その故障時間は平均 $1/\lambda$ の指数分布にしたがうとする．このときシステムの故障時間分布は，

$$[1-\exp(-\lambda t)]^n$$

で与えられるが，この分布が IFR であることは容易にわかる．また，n ユニット冷予備システムの故障時間は，各ユニットが指数故障をする場合には，よく知られているように，アーラン分布をするが，この分布も IFR となる．したがって，このようなシステムの保全問題を考える場合，システムの特性をあらわすものとして，その年齢だけを採用すれば，前節までの保全方策は充分な意味をもっている．しかしながら，年齢保全政策における予防保全時刻においても，n 個すべてのユニットが動作可能な場合もあり，そのときには当然ながら保全は行なう必要がないことになる．このことは，もし，あまり大きくない費用で状態の観測，識別が可能ならば，保全政策は年齢だけでなく観測された状態にも依存した形で決められるべきであろうことを示している．このような情況を反映しているモデルの一つがマルコフ的劣化システムである．このモデルはシステムに対する情報をよりよく利用している点では年齢だけを考慮したモデルよりすぐれているように思われる．しかしながら，実際問題への応用という面では，つぎのような欠点をもっている．すなわち，充分有効に利用しうるほどの情報を得るには多くの費用を要することが多い，システムの状態の観測，遷移確率の推定など，必ずしも正確でない，保全計画は状態に依存する結果予防保全時期が不定期になり計画がたてにくい，とくに保全対象となるシステムが複数の場合などモデルが複雑になり解析が面倒である，など．最近のマルコフ的劣化システムの研究はこれらの欠点を少しずつではあるが除く方向に進んでいるが，年齢取替とか，ブロック取替にかわって実用に供されるにはまだ大きな障害となっている．近い将来充分実用化されるほど簡潔な形で解決されることを期待して，またその一助とするために，ここ15年間ほどの研究の概略を述べることにする．離散時間のモデルについては［7］に紹介されているので，ここでは連続時間のモデルについての研究を紹介する．

離散時間のマルコフ的劣化モデルについてはかなり多くの研究がなされているが，連続時間のモデルについての論文は数えるほどしかないように思われる．これは状態が時間的に連続に変化してもその観測が日に1回とか月に1回とかの定間隔で行なうのであれば離散的なモデルに帰着すること，また離散的なほうが数学的に取扱いやすいこと，がその主たる原因であるが，もともと状態が離散時間で変化することは少ないのであり，連続時間のまま保全方策が論じられれば，それにこし

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

たことはないと思われる．

連続時間のマルコフ的劣化システムの基本モデルは，はじめ［4］で与えられ，つぎのようなものである．

1. システムは$0, 1, \cdots, n, n+1$の状態をとり，これらの状態は保全のないときは $n+1$ を吸収状態とする連続時間のマルコフ過程をなす．0は新品の状態，$n+1$ は故障状態に対応する．
2. システムの故障は常時発見可能であり，故障すれば，ただちに新品と取替えられる．
3. システムの状態は観測によらねばわからず，定時間間隔 T で観測される．
4. システムが観測により，状態 $m, m+1, \cdots, n$ にあることがわかると予防的に取替えられる．すなわちシステムはControl Limit Rule(CLR)の下で予防取替が行なわれる．状態mはcontrol limit とよばれている．
5. 保全のないとき，時刻 t で i にあるシステムが時刻 $t+dt$ で j にある確率は，$\lambda_{ij}dt$ である．ただし，$\lambda_{ii}=0$.

システムの状態遷移確率を $P_{ij}(t)$とすると，これは一般には次式を解くことにより得られる．

$$(5.1)\quad P_{ij}(t)=\delta_{ij}\exp(-\lambda_i t)+(1-\delta_{ij})\sum_{k=0}^{n}\int_0^t \lambda_{ik}\exp(-\lambda_i x)P_{kj}(t-x)dx,$$

$$(5.2)\quad P_{n+1,\,j}(t)=\delta_{n+1,\,j}$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，であり，

$$(5.3)\quad \lambda_i\equiv\sum_{j=0}^{n+1}\lambda_{i,\,j}$$

式(5.1)，(5.2)は，λ_{ij} がある特殊な形をしているときには解きうる．劣化システムでは，状態の番号は，それが大きくなるほど劣化の程度が大きいという解釈をするのが普通であり，その意味では，$i>j$ に対しては，$\lambda_{ij}=0$ とすることが多い．この中でもとくにシステムは突然故障することはあるが，劣化は一段階しか進まないという場合には，$\alpha_i=\lambda_{i,\,n+1}$，$\beta_i=\lambda_{i,\,i+1}$ とおいて，式(5.1)，(5.2)から，

$$(5.4)\quad P_{ij}(t)=\beta_i\beta_{i+1}\cdots\beta_{j-1}\sum_{k=i}^{j}\exp(-\lambda_k t)/\prod_{h=i,\,\neq k}^{j}(-\lambda_k+\lambda_h)$$

$$(5.5)\quad P_{i,\,n+1}(t)=\sum_{j=i}^{n}\alpha_k\int_0^t P_{ij}(x)dx$$

が得られる．ただし，上式は，すべての i，j に対し$\lambda_i\neq\lambda_j$の場合である．またとくに，すべての i，j に対し，$\lambda_i=\lambda_j$，$\alpha_i=0$ のときには，よく知られているように，$P_{i,\,n+1}(t)$はアーラン型になる．

［4］では式(5.1)で与えられるシステムに対し，時刻 t までの予防取替，故障取替の期待数，$U_p(t)$，$U_f(t)$，および年齢 x のシステムがその後 t 時間故障せずに動作する確率 $R(t, x)$が求められている．予防取替，故障取替，観測の1回当りの費用を c_p，c_f，c_I とすると，保全政策の目標は，

$$(5.6)\quad C(t)=c_pU_p(t)+c_fU_f(t)+c_I[t/T]$$

あるいは単位時間当りの期待コスト，

$$(5.7)\quad \lim_{t\to\infty}C(t)/t$$

を最小にするように，T，m を決定することである．

先の基本モデルにおいては，システムは定間隔で観測されているが，実際には，種々の原因から前もって決められた時刻に観測できない場合もある．たとえば複数の機器が1人の保全要員により管理されている場合，ある機器の予定された観測時刻に他の機器の修理中であるときは，観測は修理完了後なされる．その結果，観測時間間隔はゆらぎ，確率的になることがある［9］．問題は最適な予防保全を行なうべき状態を決めることであるが，その遷移確率が式(5.4)，(5.5)で与えられるようなシステムに対し，取替コストの他に，故障による損失を考慮した場合について，CLR の最適性がセミマルコフ決定過程を利用して証明されている．ただし，システムの劣化は故障しやすくなるというように定義される．すなわち，$i<j$ のとき $\alpha_i<\alpha_j$，と仮定されている．このモデルは，観測時間間隔の分布を単位分布にとると定時刻観測のモデルになり，ある意味で先のモデルの拡張

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

にもなっている．

以上の二つのモデルでは，つぎの観測時期は現在の状態にまったく依存しない形で決められている．しかしながら，一般的には，状態が悪くなれば，つぎの観測はなるべく早く行なう，と考えるのが自然であろう．その意味で，現在観測された状態に対し保全をしないときは，つぎの観測時期を状態に依存して決めるというモデルが考えられる[1]．システムはCLRの下で予防取替がなされる．control limitをmとする．システムが状態iに観測されたならば，$m \leq i \leq n$のときは予防取替を，$i=n+1$のときは故障取替を施こし，$i<m$のときは取替は行なわずに，x_i時間後に観測を行なう．問題は1サイクル当りの期待費用を最小にするようにmおよびx_iの組を決めることである．mを固定したときに，最適なx_iを求める方法を示す．

$C_i(x)$をシステムが状態$i\,(<m)$に観測されたとき，つぎの観測をx時間後に行ない，その後最適な行動をとったときのつぎの取替までの期待費用とする．$C_{m-1}(x)$がつぎの式を満たすことは容易にわかる．

$$
(5.8)\quad C_{m-1}(x)=c_p\sum_{j=m}^{n}P_{m-1,\,j}(x)+c_fP_{m-1,\,n+1}(x)+P_{m-1,\,m-1}(x)C_{m-1}(x)+C_I
$$

x_iで最適なxの値を示すとすると，式(5.8)からx_{m-1}は次式で与えられる．

$$
(5.9)\quad C_{m-1}(x_{m-1})=\min_x[\{c_p+c_I+(c_f-c_p)P_{m-1,\,n+1}(x)\}/(1-P_{m-1,\,m-1}(x))]
$$

またx_iは一般に，

$$
(5.10)\quad C_i(x_i)=\min_x[\{c_p\sum_{j=m}^{n}P_{i,\,j}(x)+c_fP_{i,\,n+1}(x)+\sum_{j=i+1}^{m-1}C_j(x_j)P_{i,\,j}(x)+c_I\}/(1-P_{i,\,i}(x))]
$$

で与えられる．

mを0からnまで変えることにより，最適なmと，観測時間の系列が求められる．

上のモデルでは，保全政策の評価規準は1サイクル当りの期待費用であるが，この意味での最適な政策は必ずしも長時間にわたる単位時間当りの期待費用を最小にするものではない．1サイクル当りの費用は少なくても，その長さも小さくなれば単位時間当りの費用は大きくなる場合もある．一般には，評価規準としては，1サイクル当りよりも，単位時間当りの期待費用を採用するほうが好ましく思われる．以下では，この場合について考える[8]．問題は，セミマルコフ決定過程を使うことにより解かれるが，ここでは[1]の定式化とよく似た方法を述べる．予防，故障取替には平均的にT_p, T_fの時間を要することとする．観測により状態iにシステムが存在することがわかったときにとられる決定をD_iで示し，$D_i=I(x)$は予防取替は行なわずにつぎの観測をx時間後に行なうという決定を，$D_i=M$は，予防取替を行なうという決定をあらわすことにする．問題は各iに対し，最適なD_iを選ぶことである．

$$
(5.11)\quad v_i(u)=\begin{cases}[c_fP_{i,n+1}(x)+c_I\{1-P_{i,n+1}(x)\}+\sum_{j=i+1}^{n}P_{ij}(x)v_j(u)-u\{\int_0^x(-P_{i,\,n+1}(t))dt+T_fP_{i,n+1}(x)\}]/\{1-P_{i,i}(x)\} & D_i=I(x)\text{のとき}\\ c_pT_p-uT_p & D_i=M\text{のとき}\end{cases}
$$

を定義する．最適なD_iはつぎのアルゴリズムにより与えられることが示される．

1. あるuに対し，$v_0(u)$を最小にするD_iの組を求める．これは，まず$v_n(u)$を最小にするD_nを求め，つぎのそのときの$v_n(u)$を使い$v_{n-1}(u)$を最小にするD_{n-1}を求める．以下同様にして，$D_{n-2}, D_{n-3}, \cdots, D_0$を求めることにより得られる．
2. つぎにuを変えることにより$v_0(u)$の最小値が0になるようなuを求める．このときのD_iの組が最適な政策を与える．

上のアルゴリズムを使い，つぎの形をしている

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

最適な政策が存在することが示される．

i） $i=0,1,\cdots,h-1$ に対し，$D_i=I(\infty)$ すなわち，観測はせずに故障したときだけ取替を行なう．

ii） $i=h,\cdots,m-1$ に対し，$D_i=I(x_i)$ ($x_i<\infty$)．ここで x_i は i に関し非増加である．

iii） $i=m,\cdots,n$ に対し，$D_i=M$．すなわち，ＣＬＲが成り立つ．

以上，マルコフ的劣化システムの保全問題について，これまでの研究の主なところを概観した．

むすび

ここでは，われわれが再生理論，マルコフ再生理論，マルコフ決定過程理論を使って，システム解析をした研究の概観を述べた．しかし，現実のシステムはより以上に複雑であろうし，とくに保全問題を論じる場合，そのモデルに応じていろいろな条件が必要になってくると思われる．ここで得られた手法や結果を直接に適用するのでなく，これらを参考にして現実の問題に取り組み，ある程度現実の問題の理想化も必要であろう．

理論面では，単なるシステムの解析の問題は出つくした感があり，確率過程論において新しい理論があらわれない限り大幅な進歩はないように思われる．これからは現実のモデルをいかに従来の手法で解析するかが問題となるであろう．保全問題に関しては，現実がより複雑であるしまた多様な保全が多方面から要求されているので，未だ多くの問題が残っているように思われる．たとえば，現実には一つの方策よりもいくつかの方策を組み合せた方策が必要になってくるであろう．ここで論じた方策以外にも，故障の発見が不確かな場合の点検方策[1]．予備ユニットの発注方策[30]，故障したユニットの修理限界方策［19］が考えられている．さらに，ユニットの故障が独立でない場合[32]，予防保全が不完全な場合，定期的な予防保全を行なう場合など理論的に興味ある問題も残っている．

参考文献

[1] Barlow, R. E. and Proschan, F. : *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley, New York, 1965.

[2] Barlow, R. E. and Hunter, L. C. : Optimum Preventive Maintenance Policies. *Operations Research*, Vol. 8, No. 1(1960), 90-100.

[3] Cox, D. R. : *Renewal Theory*. Methuen, London, 1962.

[4] Flehinger, B. J. : A Markovian Model for the Analysis of the Effects of Marginal Testing on System Reliability. *Ann. Math. Statist.*, Vol. 33(1962), 754-766.

[5] Fox, B. : Age Replacement with Discounting. *Operations Research*, Vol. 14, No. 3(1966), 533-537.

[6] Gnedenko, B. V., Dinic, M. and Nasser, Yu. : The Reliability of a Redundant System with Renewal and Preventive Maintenance. *Engineering Cybernetics*, Vol. 13, No. 1(1975), 53-57.

[7] 鳩山由紀夫：信頼性の数学(３)，オペレーションズ・リサーチ，**23巻**，第１号(1978)，44-49.

[8] Mine, H. and Kawai, H. : An Optimal Inspection and Replacement Policy. *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-24, No. 5(1975), 305-309.

[9] Mine, H. and Kawai, H. : Marginal Checking of a Markovian Degradation Unit When Checking Interval is Probabilistic. *J. of Operations Research of Japan*, Vol. 19, No. 2 (1976). 158-173.

[10] Mine, H. and Nakagawa, T. : Stochastic Behavior of Two-Unit Redundant Systems Which Operate at Discrete Times. *Microelectronics and Reliability*, Vol. 15, No. 6(1976), 551-554.

[11] Mine, H. and Nakagawa, T. : Interval Reliability and Optimum Maintenance Policy. *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-26, No. 2 (1977), 131-133.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

[12] Mine, H. and Nakagawa, T. : A Summary of Optimum Preventive Maintenance Policies Maximizing Interval Reliability. *J. of Operations Research of Japan*, Vol. 21, No. 2(1978), 205-217.

[13] Morse, P. M. : *Queues, Inventories, and Maintenance*. John Wiley, New York, 1958.

[14] Nakagawa, T. : The Expected Number of Visits to State k before a Total System Failure of a Complex System with Repair. *Operations Research*, Vol. 22, No. 1(1974) 1,08-116.

[15] Nakagawa, T. : Optimum Preventive and Repair Limit Policies Maximizing the Expected Earning Rate. *R. A. I. R. O. Recherche opérationnelle*, Vol. 11, No. 1(1977), 103-108.

[16] Nakagawa, T. : Optimum Preventive Maintenance Policies for Repairable Systems. *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-26, No. 3(1977), 168-173.

[17] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Stochastic Behavior of a Two-Unit Standby Redundant System. *INFOR*, Vol. 12, No. 1(1974), 66-70.

[18] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Stochastic Behavior of a Two-Dissimilar Standby Redundant System with Repair Maintenance. *Microelectronics and Reliability*, Vol. 13, No. 2 (1974), 143-148.

[19] Nakagawa, T. and Osaki, S. : The Optimum Repair Limit Replacement. *Operational Research Q.*, Vol. 25, No. 2(1974), 311-317.

[20] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Optimum Preventive Maintenance Policies for a 2-Unit Redundant System. *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-23, No. 2(1974), 86-91.

[21] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Optimum Preventive Maintenance Policies Maximizing the Mean Time to the First System Failure for a Two-Unit Standby Redundant System. *J. of Optimization Theory and Applications*, Vol. 14, No. 1(1974), 115-129.

[22] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Stochastic Behavior of a Two-Unit Priority Standby Redundant System with Repair. *Microelectronics and Reliability*, Vol. 14, No. 3(1975), 309-313.

[23] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Stochastic Behavior of Two-Unit Paralleled Redundant Systems with Repair Maintenance. *Microelectronics and Reliability*, Vol. 14, No. 6(1975), 457-461.

[24] 中川覃夫, 尾崎俊治 : 2変数指数故障分布を持つ2ユニット並列冗長システム, 電子通信学会論文誌 D, **58—D**, 7(1975), 430-431.

[25] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Reliability Analysis of a One-Unit System with Unrepairable Spare Units and its Optimization. *Operational Research Q.*, Vol. 27, No. 1(1976), 101-110.

[26] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Analysis of a Repairable System Which Operates at Discrete Times. *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-25, No. 2(1976), 110-112.

[27] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Markov Renewal Processes with Some Non-Regeneration Points and their Applications to Reliability Theory. *Microelectronics and Reliability*, Vol. 15, No. 6(1976), 633-636.

[28] Nakagawa, T. and Osaki, S. : A Summary of Optimum Preventive Maintenance Policies for a Two-Unit Standby Redundant System. *Zeitschrift für Operations Research*, Vol. 20, No. 5(1976), 171-187.

[29] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Discrete Time Age Replacement Policies. *Operations Research Q.*, Vol. 28, No. 4(1977), 881-885.

[30] Nakagawa, T. and Osaki, S. : Optimum Ordering Policies with Lead Time for an Operating Unit. *R. A. I. R. O. Recherche opérationnelle*, Vol. 13, No. 3(1978), 325-335.

[31] Nakagawa, T. and Yasui, K. : Approximate

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

Calculation of System Availability. *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-26, No. 2(1977), 133-134.

[32] Ohi, F., Kodama, M. and Nishida, T. : M+1-out-of-N : G System with Correlated Failure and Single Repair Facility. *J. of Operations Research of Japan*, Vol. 21, No. 1(1978), 96-107.

[33] 尾崎俊治，中川覃夫：2ユニット優先待機冗長システムの最適予防保全政策．システムと制御 **17**, 7(1973), 455-457.

[34] 尾崎俊治，中川覃夫：間欠的に使用されるシステムの最適予防保全政策．電子通信学会論文誌D，**56～D**, 9(1973), 533～534.

[35] Osaki, S. and Nakagawa, T. : A Note on Age Replacement. *IEEE Tr. on Reliability*, Vol. R-24, No. 1(1975), 92-94.

[36] Pyke, R. : Markov Renewal Processes with Finitely Many States. *Ann. Math. Statist.*, Vol. 32(1961), 1243-1259.

[37] Takács, L. : On Certain Sojourn Time Problems in the Theory of Stochastic Processes, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar*, Vol. 8(1957), 169-191.

[38] Takács, L. : *Introduction to the Theory of Queues*. Oxford University Press, New York, 1962.

なかがわ・としお　1942年生
名城大学　理工学部　数学科
かわい・はじめ　1946年生
京都大学　工学部　数理工学科

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.