高信頼性システムの最適設計
—数理計画法の立場から—

1. まえがき

最適という言葉がエンジニアリングの一真髄として認められるようになってからすでに久しい．信頼性の分野では，従来，部品の品質向上，管理の改善に努力が払われてきたが，システム的に各部品，ユニットの総合的な構成法をどのように与えれば信頼性を効果的に向上させ得るかという考え方が，人工衛星関連技術の要請とともに現実の形をとるようになった．また今日では，プラントシステムが複雑，大規模となるにつれて，安全性の面からも信頼性を一つの評価基準として含めた形でのトレードオフが重要視されるようになり，ここに標題のような一つの研究分野の定着をみるに至った．

この分野の問題は，定式化されるとほとんどすべて数理計画法適用の対象となり，既成の手法を動員することによって解けることもあったが，問題の多くが整数変数を含む非線形となるために独自の解決を迫られる場合が多かった．そのために，Moskowitz-Mclean[22]，Bellman-Dreyfus[3]，三根[16] 以来，種々の定式化と解法が数多く提案されてきた．提案された解法の多くは，とくにヒューリスティックな接近，あるいは近似解法の範疇で種々の工夫をこらし，アルゴリズムの改善に小刻みの進歩をもたらしたが，今日では手法の種類が過大となってそれらの比較，評価がきわめてむずかしい状況となった．本稿は，このような現状について，できれば一種の交通整理の一助となるように，著者らの経験にもとづいて該分野のサーベイを行なう．

従来の文献では，非線形全整数計画問題としてとりあげるものが圧倒的に多く，1956年以来，100編を超え，解法の種類は数十に達する．本稿においてもこの種の問題の解説に重点をおくこととする．

2. 信頼性システム

一つのシステムはいくつかのサブシステムから構成され，各サブシステムはまたいくつかのユニットから構成されると考える．サブシステムの構成の仕方により，信頼性システムは直列システム(図1)と非直列システム(図2)とに大別される．直列システムでは，どの一つのサブシステムが故障しても，システム全体の故障となる．

直列システムを取り扱った最適化問題は，一般的には変数分離可能な問題（目的関数，制約条件式ともに一変数関数の和または積であらわされる問題）となるが，非直列システムの場合は変数分離不可能となる，たとえば[38]．

高信頼性システムの設計に際して考慮すべき葛藤する目標（評価基準）としては，(i)信頼度，アベイラビリティ，リスク等信頼性に関する目標，

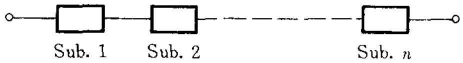

図 1　直列システム

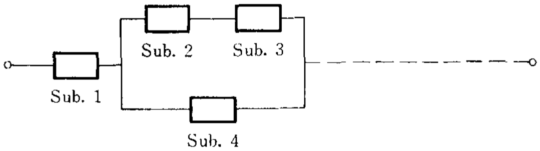

図 2　非直列システムの例

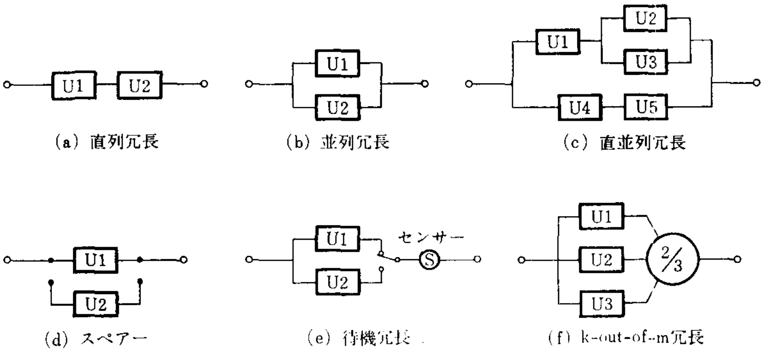

図 3 冗長方式

(ii) 設計費，部品等の購入費，制作費等経済上の目標，(iii)納期等の時間的目標，(iv)その仕事に携わることが可能な人員上の目標，(v)重量，寸法等に関する目標，等がある．これらの目標のうち一つあるいは複数個を目的関数，他のいくつかを制約条件式として多くの最適化問題が生じる．

サブシステムの信頼性を向上させる方策としては，(i)いくつかのユニットを用いる冗長方式の採用（たとえば，図 3），(ii) 高信頼性部品の使用，(iii)ディレーティング（部品を定格値以下で使用すること），(iv)環境ストレスに対する強化処置等がある．

3. 最適化問題

高信頼性システムの最適設計問題は，1956年以来種々の定式化がなされてきた．数理計画法の立場から問題を分類する．

(1) 単一目的計画問題

主要な目標の一つを目的関数とし，他のいくつかの目標を制約条件として定式化された問題である．その中には，(i)故障率あるいは故障確率等の連続量を変数とした非線形実数計画問題，たとえば[13, 28, 34, 35, 38, 41]，(ii)連続量とともに各サブシステムに対する冗長ユニット数および種々の構成案に割り付けられた番号等の離散量を変数とした非線形混合整数計画問題，たとえば[6, 10, 15, 26, 40]，(iii)離散量のみを変数とした非線形全整数計画問題，たとえば[3〜5, 12, 16, 17, 21〜23, 32, 37, 42]．

実際のシステム設計への応用を試みた文献としては，人工衛星設計を取り扱った(iii)に属する[42]と，原子炉への適用を試みた(iii)に属する[5]，(ii)に属する[6]がある．

(2) 多目的計画問題

実際のシステム設計に際して，設計技術者が本来欲しているものは，与えられた決定領域において単に一つの目標を最適化するための技術ではなく，たとえば信頼度，重量，コスト等複数の目標間においてもっともよくバランスしたシステム構成を得るための技術である．このための一方法が多目的計画である．

この問題には単一目的の場合と同様に，(i)非線形実数計画問題[29]，(ii) 非線形混合整数計画問題[11, 30]，(iii) 非線形全整数計画問題[25]がある．(i)，(ii)に属する問題と(iii)に属する問題には，パレート最適解の個数が一般的にはそれぞれ無限と有限という本質的な差異を有することに注意する必要がある．

4. 最適化手法

4.1 単一目的計画問題

(i) 非線形実数計画問題解法

解法としては，幾何計画法（Geometric Programming Method）[35]，二次計画法（Quadratic Programming Method）[13]，動的計画法（Dynamic Programming Method），たとえば[28]，未定乗数法たとえば[41]，SUMT（Sequential Unconstrained Minimization Technique），たとえば[38]，GLF 法（Generalized Lagrangian Function Method）[14, 27]，GRG 法（Generalized Reduced Gradient Method）[14]等が現在使われている．その他一般に非線形計画法の分野で開発された手

法を用いることができる．

一般的にいって，与えられた問題が凸計画問題の場合には，GRG法またはGLF法がもっとも有効であると思われるが，その他の場合には動的計画法を用いるのが無難である．

(ii) 非線形混合整数計画問題

現在効果的であると思われる手法は，実数変数を離散化して動的計画法を適用する方法 [15,26] と整数変数をまず実数変数と見なし GLF 法を用いて解き，得られた実数解のうち整数変数に対応する解を整数に丸めて固定し，再び実数変数部分のみを変数として GLF 法によって解く方法[10] である．その他の近似解法が [6,40] において用いられている．

(iii) 非線形全整数計画問題

改めて第5節で詳説する．

4.2 多目的計画問題

諸分野にあらわれる一般の実数変数の多目的計画問題の解法としては，現在すでに20種以上の手法が提案されている．とくに高信頼性システムの設計への適用という面から，どの手法が利用可能であり，また，もっとも適しているかについての議論が必要であると感じられる．坂和ら[29]は最近多目的の信頼性問題に SWT 法 (Surrogate Worth Trade-off Method) を適用した．

多目的の混合整数計画問題の解法として提案された手法は現在ないが，坂和 [30] および稲垣ら[11]は，整数条件を省きそれぞれSWT法および ICO 法 (Interactive Coordinate-wise Optimization Method) を用いて実数のパレート解を求めその本来整数の部分を丸めるという操作により混合整数の多目的信頼性問題を解いた．

仲川ら[25]は，多目的全整数計画問題のパレート解が一般的には有限個数であることに着目し，分岐限定法 (Branch-and-bound Method) にもとづいた手法を提案し，信頼性問題への適用を試みた．

5. 非線形全整数計画問題の解法

5.1 厳密解法

0—1アルゴリズム法：普通変数(非0—1)問題を線形の0—1問題に変換し，既存のアルゴリズム(切除平面法，陰的列挙法等)を適用して解く方法，たとえば[9,37]．この方法は，変換された問題が原問題と比較してきわめて大規模な問題になることと，原問題の特殊性がまったく利用できないという2点から見て，あまり効率のよい手法ではない．

辞書式列挙法：Lawler-Bell のアルゴリズムあるいはそれを改良した手法，たとえば[21,32]．この手法は，大ざっぱにいって，目的関数の単調性にのみ注目した手法であるといえる．[21]の6例題について著者らが検討した結果[24]によれば，これらは，実行可能性のみを考慮し他の推測手法 (Fathoming Techniqne) をまったく用いることなく分岐限定法を適用して簡単に実行可能解を列挙できる問題であるが，[21]において，6例題すべてにつき実行可能解の個数以上の解を列挙していることは，本手法の有効性に疑義のあることを示すものである．

動的計画法：たとえば [3]．この手法は制約条件式が1個の時には，計算効率がきわめてよいが，それが3個以上の問題に対しては実際上適用困難である．

分岐限定法にもとづく手法：普通変数のままで分岐限定法を適用する手法，たとえば[24]．この手法の最大の利点は，問題の特殊性を充分考慮した効率のよい解法の開発が可能である点にある．実績として30変数3制約の並列冗長配分問題（たとえば0—1線形計画問題に変換した場合300変数33制約以上の大規模な問題に相当）が，109秒 (FACOM 230/75) で解かれた例[24]があり，また最近は，離散型動的計画法を分岐限定法の一種と見なすことにより従来の動的計画法よりすぐれたアルゴリズムが開発されつつあるので，今後は

分岐限定法がもっとも有望であるといえる．

5.2 近似解法

近似解法は，1)最適解を得ることがむずかしい大規模問題を処理する場合，2)厳密解法のためのよい初期値を得る場合に利用される．解法の良否を判定する基準としては，1)解を得るのに必要な計算時間，2)得られた解の質，に加えて，3)適用範囲の広さを挙げるのが妥当であろう．計算時間については，提案されている約30種の手法のほとんどが，50変数程度のかなり大規模な問題を大型計算機の利用により長くとも数分程度で解き得る能力をもっている．それに，もともとシステムが大規模となれば，計算に要する費用は全費用に対して問題とならないので 1) の基準はあまり重要と考えられない．そこで，ここでは 2) および 3) を比較の基準として議論する．

近似解法適用の対象とされてきた問題の主なものは以下の４問題である．

(P_a)：単一あるいは複数の線形制約条件式のもとで，直列システム全体の信頼度Rを最大にするように，各サブシステムiに対するユニット（故障確率q_i）の並列冗長数x_iを決定する問題：

$$\text{maximize} \quad R(\boldsymbol{x})=\textstyle\prod_{i=1}^{n}(1-q_i^{x_i})$$
$$\text{subject to} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i \le b_j \ (j=1,\cdots,m)$$
$$x_i \ge 1 \ \text{integer.}$$

(P_b)：与えられた信頼度$R\min$以上で，コストCを最小にする並列冗長ユニット数を決定する問題：

$$\text{minimize} \quad C(\boldsymbol{x})=\textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$$
$$\text{subject to} \quad \textstyle\prod_{i=1}^{n}(1-q_i^{x_i}) \ge R\min$$
$$x_i \ge 1 \ \text{integer.}$$

(P_c)：非線形制約条件式のもとでの並列冗長配分問題：

$$\text{maximize} \quad R(\boldsymbol{x})=\textstyle\prod_{i=1}^{n}(1-q_i^{x_i})$$
$$\text{subject to} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} g_{ji}(x_i) \le b_j \ (j=1,\cdots,m)$$
$$x_i \ge 1 \ \text{integer.}$$

ここで$g_{ji}(x_i)$は単調増加関数である．

(P_d)：非線形制約条件式のもとで，直列システムの信頼度を最大にするように各サブシステムに対してあらかじめ準備された構成案（冗長の場合を含む）の中から最適な構成案を選択する問題：

$$\text{maximize} \quad R(\boldsymbol{x})=\textstyle\prod_{i=1}^{n} R_i(x_i)$$
$$\text{subject to} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} g_{ji}(x_i) \le b_j \ (j=1,\cdots,m)$$
$$x_i \ge 1 \ \text{integer.}$$

ここで$R_i(x_i)$は単調増加関数とする．

(i) 前進法

ある初期（暫定）解$\boldsymbol{x}^b$(一般的には，$=(1,1,\cdots,1)$)から出発しある感度S_iを考え，暫定解$\boldsymbol{x}$において，どの制約条件式も乱すことなく＋１増加可能で感度の値がもっとも大きい変数x_i^*に１を加える操作を，すべての変数が＋１増加不可能となるまで(停止条件)繰り返す手法を前進法とよぶことにする．この手法の基本的な考えは，三根[16]によって最初に発表された．

a) 三根[16]の手法：問題 (P_a) の制約条件式が１個の場合に適用された．感度としては，

$$S_i=\frac{1}{a_i}\ln\left(\frac{1-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}}\right),\quad S_i^*=\max_{i\in L}\ \{S_i\}$$

を用いた．ここでLは＋１増加可能な添字集合をあらわす．

b) Barlow ら[2]の手法：三根の手法を複数制約条件式の場合に拡張した手法である．各制約条件に対して重みλ_j($\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=1$) を想定することとし，三根の感度$S_i$における$a_i$のかわりに$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{ji}$を採用していくつかの$\lambda_j$の値に対する解を得，それらのうちで最善の解を選ぶことにしている．この手法は，制約条件式数が増加するとき指数関数的に計算時間が増加する．

c) 佐々木の手法，たとえば[31]：(P_a) に適用された．

$$S_i=q_i^{x_i},\quad S_i^*=\max_{i\in L}\{S_i\}$$

前進法で得られた解を修正する手法も合せて提案されているが，大規模な問題に対してはかなりの計算時間を必要とする．

d) Ghareら[8, 36]の手法：(P_a)に適用された．

$$S_{ji}=\frac{b'_j}{a_{ji}}\ln\left(\frac{1-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}}\right),\quad S_i^*=\min_{j}\ \max_{i\in L}\{S_{ji}\}$$

ここで$b'_j=b_j-\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i$である．実際の計算プログラム[36]においては，$S_i^*$を max・min と誤

ってプログラムされており，筆者らの計算経験によれば，理論にしたがって作製したプログラムより，誤ったプログラムのほうがはるかによい解を与える．なお，解の修正手法も提案されている．

e) Sharmaら[33]の手法：佐々木[31]の手法を非線形制約条件式の場合 (P_c) に適用したものである．用いられた感度は佐々木と同じである．

f) Misra[18]の手法：(P_a)に適用された．鎌田(姫路工大)の検討によれば，[18]のフローチャートには誤りがあり，複数制約条件式の問題に対しては，多くの場合計算は停止しない．もし，[18]の基本的な考え方を生かし修正するならば，感度

$$S_i=\frac{1}{a_{ji}}\left(\frac{q_i^{x_i}-q_i^{x_i+1}}{1-q_i^{x_i}}\right),\quad S_i^*=\max_{i\in L}\{S_i\}$$

を用い，各々の制約条件式jに対する解の中から，最善のものを採用するとよい．(後述の表1のfはこのようにして算出されたものである．)

g) Aggarwalら[1]の手法：(P_c)に適用した．

$$S_i=\frac{q_i^{x_i}-q_i^{x_i+1}}{\prod_{j=1}^{m}(g_{ji}(x_i+1)-g_{ji}(x_i))},$$

$$S_i^*=\max_{i\in L}\{S_i\}$$

この手法は，S_iの分母に問題があり，アクティブでない(省いても最適解に変化のない)制約条件式を強く考慮することが多く，一般的に制約条件式数が増加するにつれて得られる解は悪くなる．

h) 仲川ら[23]の手法：(P_d)に適用された．

$$S_i=\ln\left(\frac{R_i(x_i+1)}{R_i(x_i)}\right)\cdot[(1-\alpha)\cdot\max_{k\in L}\{\Delta x_k\}+\alpha\cdot\Delta x_i]$$

$$S_i^*=\max_{i\in L}\{S_i\}$$

ここで　$\Delta x_i=\min_j\{b'_j/(g_{ji}(x_i+1)-g_{ji}(x_i))\}$．

いくつかのαの値に対して解き，得られた解の中で最善のものを最終的に解とする．

(P_a) に属する例題140個をランダムに作製し，これらをa)，c)～h)の各手法によって解いた結果を**表1**に示す (初期解としては$x^b=(1,1,\cdots,1)$を採用した)．解の質をあらわす指標としては，正解率(20問中最適解が得られた問題の数)／20，と相対誤差

$$(R(x^{opt})-R(x^*))/(1-R(x^{opt}))$$

x^{opt}：最適解

x^*　：各手法により得られた解

を採用した．同表は手法の評価に関して充分客観性のある資料とみられるが，もちろん，例題の特異性によって手法の優劣に異同が生じることはあろう．解の質および適用範囲の広さから見て，現在のところ，h)の手法がすぐれている．

(ii) 実数解法

整数条件を省いて実数解を求め，整数解に変換する手法を実数解法とよぶことにする．この種の手法の最大の弱点は，実数解から整数解に変換する操作にあり，普通，実数解を丸めて整数解としているが，解の質に問題が残る．現在のところ，三根[16]が行なったように，実数解の小数部分を切り捨て整数解とし，前進法の初期解として用いるのが妥当であろう．

a) Moskowitzら[22]の手法：Lagrangeの未定乗数法を用いて，問題 (P_b) の実数解を近似式の形で求めた．

b)三根[16]の手法：Lagrangeの未定乗数法を用いて，制約条件式が1個の場合の (P_a) の実数解を近似式の形で求めた．

c) Federowiczら[7]の手法：幾何計画法を用いて1制約条件式の場合の (P_a) の実数解の近似式(三根の近似式と同じ)を求め，複数制約条件式の場合に拡張した．

d) Misra [19]の手法：(P_a) の実数解を求めるためにLagrangeの未定乗数法による方法と最大原理による方法 (正確な実数解を求めるために両手法ともNewton法を用いている) の2種類を提案したが，最大原理を用いて導かれた結果の式は，未定乗数法によって得られた式とまったく同じである．

e) Misraら[20]の手法：正確な解を求めるためにNewton法を用いた以外は，ほとんどFederowiczらの手法と同じである．

上記のことからわかるように，問題(P_a)，(P_b)

表 1

		5×3	8×3	10×1	10×3	10×8	20×1	50×1
		問題の規模 (n×m)						
a)	A			0.03082			0.00310	0.00107
	M			0.61649			0.06210	0.02133
	O			13/20			11/20	9/20
c)*, e)	A	0.00549	0.06266	0.03430	0.02995	0.03829	0.08185	0.05169
	M	0.10976	1.25326	0.68594	0.59902	0.76579	1.63696	1.03389
	O	19/20	10/20	12/20	12/20	13/20	0/20	0/20
d)**	A	0.02102	0.02598	0.03082	0.02942	0.01183	0.00227	0.00107
	M	0.42043	0.51962	0.61649	0.58845	0.23653	0.04541	0.02133
	O	18/20	16/20	13/20	12/20	14/20	13/20	9/20
f)	A	0.00410	0.01808	0.03082	0.06192	0.00417	0.00310	0.00107
	M	0.08207	0.36159	0.61649	1.23834	0.08334	0.06210	0.02133
	O	18/20	16/20	13/20	8/20	17/20	11/20	9/20
g)	A	0.22623	0.55135	0.03082	0.61009	3.53407	0.00310	0.00107
	M	1.10876	3.25551	0.61649	2.15883	10.23024	0.06210	0.02133
	O	7/20	2/20	13/20	2/20	0/20	11/20	9/20
h)	A	0.00000	0.00000	0.00025	0.00010	0.00010	0.00020	0.00006
	M	0.00000	0.00000	0.00504	0.00206	0.00206	0.00395	0.00116
	O	20/20	20/20	19/20	19/20	19/20	18/20	17/20

A：平均相対誤差　M：最大相対誤差　O：正解率

*　修正手法を含まない　**　[36] のプログラムを用いた（修正手法も含む）

を解くためには，幾何計画法および最大原理を用いる必要はまったくなく，Lagrange の未定乗数法で充分である．また，(P_a)に関しては，省くと最適解に変化をもたらすアクティブな制約条件式はほとんどの場合一つであるし，三根の近似式はかなりよい近似値を与えるので，各制約条件式に対してこの近似式を用い解を求め，その中でもっとも低い信頼度のものを求める解とすれば充分である．

前進法，実数解法以外にも種々の手法が提案されているが，評価のむずかしいものが多くここでは割愛する．

6. あとがき

本稿は，数理計画法の適用という観点からまとめたために，実際の応用事例についての説明を省略した結果になったことを心残りに感じる．それらについては，文献[5, 6, 42]等を参照されたい．なお，該分野のサーベイに有用な報文として他に文献[4, 17, 39]等がある．

また本稿を草するにあたっては150余編の論文を準備したが，紙面の都合上，参考文献として掲げるのは42編に止まった．その選択に際しては多分に著者らの主観が入ったことと思われるが，この点大方のご了解を得たい．

信頼性分野の多目的問題は今後の重要な研究課題である．実数変数の場合については，社会システムの制御等のために，多目的問題の解法に関してすでに幾多の成果が挙げられており，多分それらの技法を単に借用すれば足りるであろうが，混合整数の場合と全整数の場合の問題について，将来信頼性分野独自の定式化と解法が要請されることとなろう．

参考文献

[1] Aggarwal, K. K., Gupta, J. S. and Misra, K. B. : A New Heuristic Criterion for Solving a Redundancy Optimization problem. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-24, No. 1(1975), 86-87.

[2] Barlow, R. E. and Proschan, F. : *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley & Sons, Inc., 1965.

[3] Bellman, R. E. and Dreyfus, S. E. : Dynamic Programming and Reliability of Multicomponent

Devices. *JORSA*, Vol. 6(1958), 200-206.

[4] Bien, D.D. : Optimal Allocation of Redundancy among Subsystems Connected in Series. *NASA TN* D-7164(1973).

[5] Burdick, G. R., Rasmuson. D. M. and Derby, S. L. : A Risk-Based Approach to Advanced Reactor Design. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-26, No. 3(1977), 198-202.

[6] Campbell, J. R. and Gaddy, J. L. : Methodology for Simultaneous Optimization with Reliability : Nuclear PWR Example. *AIChE J.*, Vol. 22, No. 6(1976), 1050-1055.

[7] Federowicz, A. J. and Mazumdar, M. : Use of Geometric Programming to Maximize Reliability Achieved by Redundancy. *JORSA*, Vol. 16(1968), 948-954.

[8] Ghare, P. M. and Taylor, R. E. : Optimal Redundancy for Reliability in Series System. *JORSA*, Vol. 17(1969), 838-847.

[9] Hyun, K. N. (Gen, M.) : Reliability Optimization by 0-1 Programming for a System with Several Failure Modes. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-24(1975), 206-210.

[10] Inagaki, T., Inoue, K. and Akashi, H. : Optimal Reliability Allocation under Preventive Maintenance Schedule. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-27, No. 1(1978), 39-40.

[11] ——, —— and ——: Interactive Optimization of System Reliability under Multiple Objectives. submitted for publication in IEEE Trans. Reliability.

[12] Inoue, K., Gandhi, S. L. and Henley, E. J. : Optimal Reliability Design of Process Systems. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-23, No. 1(1974), 29-33.

[13] Kapur, K. C. : Reliability Bounds in Probabilistic Design. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-24, No. 3(1975), 193-195.

[14] Kuo, W. : Optimization Techniques for Systems Reliability with Redundancy. M. S. Thesis, Kansas State University (1977).

[15] Lambert, B. K., Walvekar, A. G. and Hirmas, J. P. : Optimal Redundancy and Availability Allocation in Multistage Systems. *IEEE Trans, Rel.*, Vol. R-20, No. 3(1971) 182-185.

[16] Mine, H. : Reliability of Physical System : *IRE Trans. on Circuit Theory*, Vol. CT-6, Special Supple., (1959), 138-151.

[17] Messinger, M. and Shooman, M. : Technique for Optimal Spares Allocation : A Tutorial Review. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-19, No. 4 (1970).

[18] Misra, K. B. : A Simple Approach for Constrained Redundancy Optimization Problems. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-21, No. 1(1972), 30-34.

[19] —— : Reliability Optimization of a Series-Parallel System. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-21, No. 4(1972), 230-238.

[20] —— and Sharma, J. : A New Geometric Programming Formulation for a Reliability Problem. *Inter. J. of Control*, Vol. 18, No. 3 (1973), 497-503.

[21] ——: Optimal Reliability Design of a System Containing Mixed Redundancies. *IEEE Trans. PAS*, Vol. PAS-94, No. 3(1975), 983-993.

[22] Moskowitz, F. and McLean, J. B. : Some Reliability Aspects of System Design. *IRE Trans. Reliability and Quality Control*, Vol. PGRQC-8(1956), 7-35.

[23] Nakagawa, Y. and Nakashima, K. : A Heuristic Method for Determining Optimal Reliability Allocation. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-26, No. 3(1977), 156-161.

[24] ——, —— and Hattori, Y. : Optimal Reliability Allocation by Branch-and-Bound Technique. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-27, No. 1(1978), 31-38.

[25] Nakagawa, Y. and Hattori, Y. : Design of Reliability System with Multiple Criteria and Integer Variables : Multiobjective Integer Programming. submitted for publication in IEEE Trans. Reliability.

[26] Nakashima, K and Yamato, K. : Optimal Design of a Series-Parallel System with Time-Dependent Reliability. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-26, No. 2(1977), 119-120.

[27] Pierre, D. A. and Lowe, M. J. : Mathematical Programming via Augmented Lagrangians-An Introduction with Computer Programs. Addison-Wesley, 1975.

[28] Rivard, J. B. : Risk Minimization by Optimum Allocation of Resources Available for Risk Reduction. *Nuclear Safety*, Vol. 12, No. 4

(1971), 305-309.

[29] Sakawa, M. and Arata, K. : Multiobjective Optimization of System Reliability by the Surrogate Worth Trade-off Method. submitted for publication in IEEE Trans. Reliability.

[30] Sakawa, M. : Multiobjective Reliability and Redundancy Optimization of a Series-Parallel System by the Surrogate Worth Trade-off Method, to appear in Microelectronics and Reliability.

[31] Sasaki, M. : A Simplified Method of Obtaining Highest System Reliability. *Proc. Eighth National Symposium on Reliability and Quality Control*. (1962), 489-502.

[32] Sasaki, M., Kaburaki, S. and Yanagi, S.: System Availability and Optimal Spare Units. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-26, No. 3(1977), 182-188.

[33] Sharma, J. and Venkateswaran, K. V. : A Direct Method for Maximizing the System Reliability. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-20, No. 4 (1971), 256-259.

[34] Shershin, A. C. : Mathematical Optimization Techniques for the Simultaneous Apportionment of Reliability and Maintainability. *JORSA*, Vol. 18(1970), 95-106.

[35] Taraman, S.I. and Kapur, K.C.: Optimization Considerations in Design Reliability by Stress-Strength Interference Theory. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-24, No. 2(1975), 136-138.

[36] Taylor, R. E. : Optimal Resource Allocation for Reliability in Series System. Virginia Polytechnic Institute, PhD Dissertation (1970).

[37] Tillman, F. A. : Optimization by Integer Programming of Constrained Reliability Problems with Several Modes of Failure. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-18, No. 2(1969), 47-53.

[38] ——, Hwang, C. L., Fan, L. T. and Lai, K. C. :Optimal Reliability of a Complex System. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-19, No. 3(1970), 95-100.

[39] ——, Hwang, C. L., and Kuo, W. : Optimization Techniques for System Reliability with Redundancy-A Review. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-26, No. 3(1977), 148-155.

[40] ——, —— and —— : Determining Component Reliability and Redundancy for Optimum System Reliability. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-26, No. 3 (1977), 162-165.

[41] Timsans, E. A., McNichols, R. J. and Berry, S. L. : Availability Allocation Using a Family of Hyperbolic Cost Functions. *IEEE Trans. Rel.*, Vol. R-24, No. 4(1975), 333-335.

[42] 鳥山，福島，中嶋，柴田：人工衛星の信頼度と重量の最適化．三菱電機技報，Vol. 49, No. 2 (1975), 114-116.

なかがわ・ゆうじ　1949年生
京都大学　原子エネルギー研究所

はっとり・よしお　1926年生
京都大学　原子エネルギー研究所