

## 賭けの数理-Ⅱ

竹内 啓

### 1. 公平な賭けとマルチンゲール

完全に公平な賭けの場合、すなわちすべての“くじ”について、1単位の金額を賭けたときの期待値が1であるならば、第  $t$  回目の賭けの結果、賭けをする人の金額が  $X_t$  になるものとすれば、どのように賭けを行なったとしても、

$$E(X_t | X_{t-1}) = X_{t-1}$$

となる。確率変数の系  $X_1, X_2, \dots$  が上記の関係を満たすとき、これをマルチンゲールとよぶということは前回に述べた。上式から容易に、

$$E(X_t) = E(X_{t-1}) = \dots = X_0$$

となることがわかる。すなわちどのように賭けを行なっても、期待金額には変りはないことが示される。

ところがこのことは、公平な賭けの場合は損も得もないということを意味するものではないことは、すでに示したとおりであって、下手な賭け方をすれば（たとえば毎回所持金額を1つの目にだけ賭けるようなことをすれば）、

$$P_r \{ \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0 \} = 1$$

すなわち必ず「すって」しまうことは可能である。ところでマルチンゲールに関する基本定理として、つぎのことが成り立つ。

定理  $X_t, t=1, 2, \dots$  がマルチンゲールであるとき、 $\sup_t E(|X_t|) < \infty$  ならば、確率1で  $X_t$  はある確率変数  $X_\infty$  に収束する。すなわち、

$$P_r \{ \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty \} = 1$$

賭けの場合  $X_t \geq 0$  で  $E(|X_t|) = E(X_t) = X_0$  だから定理の条件は自動的に成り立つ。すなわち  $X_t$  は必ずある  $X_\infty$  に収束する。

よりくわしくいえば、このことはつぎのように表現することができる。いまある賭けの方式を定めたとする。

(それはどんなものでもよい。1回ごとに賭け方を変えてもよいし、また  $t-1$  回までの結果によって  $t$  回目の賭け方を決めてもよい。しかしとにかく賭け方のルールはあらかじめ定めておくものとする) そうするとそれに

応じて  $X_1, X_2, \dots$  の(同時) 確率分布が定まることになり、そうして  $X_1, X_2, \dots$  はマルチンゲールになる。そうすると  $X_t$  は  $t$  が大きくなると、必ずある値  $X_\infty$  に収束する。ただし「大数法則」などの場合と違って  $X_\infty$  は一般には確率変数であって、定数ではない。

### 2. 定理の証明

この定理を証明するのにつぎの不等式が用いられる。  
**補助定理(Doob)**  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  がマルチンゲールであるとす。  $a < b$  を定数とすると、確率変数  $H_n$  をつぎのように定義する。  $X_1, X_2, \dots$  の中で最初に  $a$  以下になるものを  $X_{k_1}$ 、つぎに  $X_{k_1+1}, X_{k_1+2}, \dots$  の中で最初に  $b$  以上になるものを  $X_{j_1}, X_{j_1+1}, X_{j_1+2}, \dots$  の中で最初に  $a$  以下なるものを  $X_{k_2}, X_{k_2+1}, X_{k_2+2}, \dots$  の中で最初に  $b$  以上になるもの  $X_{j_2}$  とする。このように続けて  $X_n$  までの値に  $a$  以下から  $b$  以上への変化が  $h$  回起ったとき、すなわち  $j_h \leq n < j_{h+1}$  のとき  $H_n = h$  とする。  $n < j_1$  ならば  $H_n = 0$  とする。このとき、つぎの関係が成り立つ。

$$(b-a)E(H_n) \leq E(X_n - a)^+$$

(ただし、 $(X_k - a)^+ = \max(X_k, a) - a$  である。)

**証明** 与えられた系列  $X_1, X_2, \dots$  に対して  $k_1, j_1, k_2, j_2, \dots$  を上記のように定め、またすべての  $k$  に対して  $i_k$  をつぎのように定める。

$$i_k = 0 \quad k \leq j_1 \quad k_2 < k \leq j_2, \dots$$

$$i_k = 1 \quad j_1 < k \leq k_2 \quad j_2 < k \leq k_3, \dots$$

そうすると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n i_k (X_k - X_{k-1}) &= (X_{k_2} - X_{j_1}) + (X_{k_3} - X_{j_2}) + \dots \\ &\leq (a-b)h \quad k_{h+1} \leq n \text{ のとき} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n i_k (X_k - X_{k-1}) &\leq (a-b)(h-1) + (X_n - X_{j_h}) \\ &\leq (a-b)h + (X_n - a) \quad n < k_{h+1} \text{ のとき} \end{aligned}$$

となる。(第2の式は  $h=0$  のときも成り立つことに注意しよう。)したがってこれをまとめると、

$$\sum_{k=2}^n i_k (X_k - X_{k-1}) \leq (a-b)h + (X_n - a)^+$$

となる。ここで  $i_k, h$  を  $X_1, X_2, \dots$  に依存する確率変数と考えて両辺の期待値をとると、 $i_k$  の値は  $X_1, X_2, \dots$ 、

$X_{k-1}$  のみに依存して定まるから、

$$\begin{aligned} E(i_k(X_k - X_{k-1})) \\ = E(i_k E(X_k - X_{k-1} | X_1, X_2, \dots, X_{k-1})) = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$0 \leq (a-b)E(H_n) + E(X_n - a)^+$$

これより上記の不等式が得られる。 (証終)

ところで、 $E(X_n - a)^+ \leq E|X_n| + |a|$

であるから、 $\sup_t E|X_t| = K < \infty$  ならば、すべての  $n$  に

対して、 $(b-a)E(H_n) \leq K + |a|$

となる。右辺は有限であるから、

$$P\{\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty\} = 0$$

とならなければならぬ。すなわち、任意の  $a, b$  に対

して、無限個の  $k, j$  について、

$$X_{k_1} \leq a \quad X_{k_2} \leq a, \dots$$

$$X_{j_1} \geq b \quad X_{j_2} \geq b, \dots$$

となることはない。このことを用いれば  $X_t$  が収束することはつぎのようにして証明される。すなわち  $A_a, b$  を 2つの有理数  $a < b$  に対して、

$$\liminf X_t < a < b < \limsup X_t$$

となる事象をあらわすとすれば、上記の事実より、

$$P(A_{a,b}) = 0$$

である。ところが  $X_t$  が収束しないということは、少なくとも 1つの  $A_{a,b}$  が起こることを意味する。他方このような  $A_{a,b}$  は可算個しかないから、そのうちのいずれか 1つが起こる確率が 0、すなわち  $X_t$  が収束する確率は 1 となる。

### 3. 定理の意味

マルチンゲールの収束定理の意味するところは、どんな賭け方をしても、賭け金は収束してしまう、すなわち 1回の賭けの額を無限に小さくしてゆくのでない限り、実は無限に賭けを続けることはできないということを示している。いうまでもなくこのことは  $X_t \geq 0$ 、すなわち「借金」をして賭けを続けることはできないという仮定から導かれるものである。もし無限に借金をすることが許されるならば、マルチンゲール定理は必ずしも成り立たない。たとえばつねに一定額ずつ同じ方式で賭けを続けるとすれば(所持金が足らなくなったら借金をして)

$$X_t = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t$$

という形になり、 $Y_1, Y_2, \dots$  は互いに独立に同じ分布に従う確率変数となる。公平な賭けの場合  $E(Y_t) = 0$  であるから、結局  $t$  が大きくなれば  $X_t$  はほぼ平均  $X_0$ 、分散  $t\sigma^2$  の正規分布にしたがうことになる。そうして  $t$  が大きくなれば分散が無限に大きくなるから、結局

$$E|X_t| \sim E|Y_1 + \dots + Y_t| \sim c\sqrt{t}$$

となって、 $E|X_t|$  は発散してしまう。この場合  $X_t$  が収

束しないことは明らかであろう。なお  $X_t$  が収束する場合、 $X_t \geq 0$  ならば Fatou の定理により、

**定理**  $E(X_\infty) \leq E(X_t) = X_0$

が成り立つことがわかる。すなわち極限の値の期待値は最初の所持金額を越えることはない。いいかえれば「損をすることはあっても、得をすることはない」ことになる。

さらにつぎのことも積分の一般論から直ちにいえる。

**定理** もし  $X_t$  が有界ならば  $E(X_\infty) = X_0$

すなわち  $X_t$  がある限界に達したら、必ず「賭け」をやめる(そのことは  $X_{t+1} = X_{t+2} = \dots$  となることを意味するものと考え)とすれば、期待値は最初の所持金額に一致することになる。

したがってたとえば、所持金が 0 になるか、あるいは一定額  $A$  に達するまで賭けを続けるとすれば、

$$X_\infty = 0 \quad \text{あるいは} \quad A$$

であって、どんな賭け方をしても、

$$P\{X_\infty = A\} = X_0/A$$

となる。

### 4. 不利な賭けの場合

上記の議論は、不利な賭けの場合、すなわち第  $i$  番目のくじの  $j$  の「目」が出たときの「配当」金額を  $r_{ij}$  とするとき、 $\sum_j p_j r_{ij} < 1$  となる場合にも適用できる。

このとき  $\tilde{r}_{ij}$  を、

$$\tilde{r}_{ij} \geq r_{ij} \quad \text{かつ} \quad \sum_j p_j \tilde{r}_{ij} = 1 \quad i=1, 2, \dots$$

となるように定義する。そうして  $\tilde{r}_{ij}$  を「配当」とする賭けを考えると、これは公平な賭けになる。すなわちともと賭けは公平なのに  $\tilde{r}_{ij} - r_{ij}$  だけ「胴元」が「ピンハネ」するものと考えてもよい。いまある賭け方をするとき、もし  $\tilde{r}_{ij}$  を「配当」とする公平な賭けであったら、つまり「胴元」が取ることがなかったら、得られたであろう金額を  $\tilde{X}_t$  とすると、つねに  $\tilde{X}_t \geq X_t$  となる。

$\tilde{X}_t$  はマルチンゲールになるから、すでに述べたように  $\tilde{X}_t \rightarrow \tilde{X}_\infty$  となる。ところが、

$$\tilde{X}_t - X_t$$

は単調に増加するから、これは一定の値に収束するか無限大に発散する。

$$X_t = \tilde{X}_t - (\tilde{X}_t - X_t)$$

において、 $X_t \geq 0$  であるから、 $\tilde{X}_t - X_t$  が発散することはない。したがって  $X_t$  は一定の確率変数  $X_\infty$  に収束する。すなわちつぎの定理が成り立つ。

**定理** 不利な賭けにおいて  $X_t$  はある確率変数  $X_\infty$  に確率 1 で収束する。そうして、

$$E(X_\infty) \leq X_0 \quad \text{となる。}$$