ブロック・デザインと符号

1. まえがき

やさしい解説をかくようにとのことでしたが，この種の理論はガロア体や有限群にもとづいているので，それらの知識を前提としないと，筋の通った話は困難である．すると，ガロア体や有限群の話からはじめなければならないが，これを説明していると，それだけで一つの解説になってしまう．しかも，本誌の多くの読者にとっては，ガロア体や有限群はけっしてやさしい話ではないのである．そこで，思い切って，つぎの立場をとることにした．それは，ガロア体や有限群の知識はまったく要求しないかわりに，数学的な話も止めてしまうというものである．つまり，具体的な例をあげながら，話の筋道をつけていくもので，これなら何とかできそうである．幸い，似た内容の解説を本誌にかいたことがある[12]ので，それへの橋渡し的な役割を果たすことになり，記事の重複も避けられる．

このようなわけで，この解説では，ガロア体や有限群をまったく知らない読者を対象として，ブロック・デザインと符号の概念をごく初歩的に説明してある．軽い気持で読んでもらいたい．

2. BIBD と Steiner システム

2.1 ブロック・デザインとは

v 種類の品物 $V_0, V_1, V_2, \cdots, V_{v-1}$ があるとし，これから何個かの品物を選び出すことを考えてみる．たとえば，V_0 と V_1 を選び出せば，

$$B_0=\{V_0, V_1\}$$

であるし，V_0 と V_2 と V_4 を選び出せば，

$$B_1=\{V_0, V_2, V_4\}$$

である．この B_0 や B_1 をブロックとよび，それに含まれている品物の個数をブロックの大きさと名づける．したがって，B_0 は大きさ2のブロックであり，B_1 は大きさ3のブロックである．すると，ブロック・デザインというのは，この B_0 や B_1 を作るようにして，一般に何個かのブロックを作り出し，それらのブロックの間に，v 個の品物に関して何らかのバランスをもたせたものである．

ところで，バランスをもたせるといっても，そのもたせ方にはいろいろある．このため，いろいろのタイプのブロック・デザインが定義されることになるが，もっとも重要で，またよく研究されているのは，t デザインとバランス・デザインである．そして，あとで説明する符号と密接な関係をもってくるのは，前者の t デザインのほうである．

このため，バランス・デザインの話は文献にゆずり（たとえば，[14]），以下では，もっぱら t デザインの話をする．

2.2 t デザイン

b 個のブロック $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_{b-1}$ を勝手に作り，そのバランスを考えてみる．まず，各ブロックに含まれている品物の個数が同じであれば，それは一つのバランスである．つまり，各ブロックの大きさを同じとするわけで，その値を普通は k と書く．このとき，$k=v$ とすると，v 種類のすべての品物がどのブロックにも含まれてしまって，当り前の結果しか出てこない．このため，$k<v$ と決めておこう．

つぎに，特定の品物 V_i に注意してみると，一般に，これを含むブロックと，含まないブロック

とがある．この含むほうのブロックの個数を，V_t の繰り返し数と名づける．すると，どの品物に対しても，その繰り返し数が同じであれば，これも一つのバランスである．このときの繰り返し数を，普通は r とかく．

つぎに，t を $2\leqq t\leqq k$ の範囲で勝手な整数にとり，特定の t 個の品物 $V_{t_1}, V_{t_2}, \cdots, V_{t_t}$ を選んでおく．そして，これらのすべてを含んでいるブロックの個数を調べてみる．すると，品物の選び方によっては，そのようなブロックは1個もないかもしれないが，とにかく，個数が求められる．この値を，$V_{t_1}, V_{t_2}, \cdots, V_{t_t}$ の会合数と名づける．すると，t 個の品物をどのように選んでも，その会合数がすべて同じで，しかもその値が正であれば，これはかなりのバランスである．このときの会合数を，普通はギリシャ文字の λ であらわす．

以上で，3つのバランスを説明したが，これらを同時に満たすものが t デザインである．3つの条件を要約すると，

(i) 各ブロックの大きさは，つねに一定値 k ($k<v$) である．

(ii) 各品物の繰り返し数は，つねに一定値 r ($r<b$) である．

(iii) t 個 ($2\leqq t\leqq k$) の品物の会合数は，品物の選び方に関係なく，つねに一定値 λ ($1\leqq\lambda<r$) である．

となる．

2.3 t デザインの基本的な性質

t デザインには，その特徴を指定するパラメータとして，v, b, r, k, λ, t の6つがある．しかし，これらの間には，前のバランスの条件によって，2つの関係が成り立っている．これを求めてみよう．

まず，すべてのブロックに含まれている品物の延べ数を，2通りの方法で数えてみる．品物の種類は v 通りで，それぞれの種類が r 個のブロックに含まれているから，品物の延べ数は vr のはずである．一方，ブロックの個数は b 個で，各ブロックに k 個ずつの品物が含まれているから，品物の延べ数は bk でもある．したがって，

$$vr=bk \tag{1}$$

の関係を得る．

つぎに，t 個の品物を同時に含むブロックの延べ数を，やはり2通りの方法で数えてみる．v 種類の品物から t 種類を選ぶ仕方は ${}_vC_t$ 通りで，それぞれについて，t 個の品物が λ 個のブロックに含まれているから，その延べ数は $\lambda\cdot{}_vC_t$ 個である．一方，各ブロックに含まれている k 個の品物から v 個を選ぶ仕方は ${}_kC_v$ 通りで，ブロックの個数は b 個であるから，その延べ数は $b\cdot{}_kC_t$ 個でもある．したがって，

$$\lambda\cdot{}_vC_t=b\cdot{}_kC_t \tag{2}$$

の関係を得る．

式(1)，(2)によって，勝手に選べる t デザインのパラメータは4個となる．これを v, k, λ, t とし，t デザインを $D_t(v, k, \lambda)$ とあらわすのが普通である．

ところで，t デザインは式(1)，(2)を満たすが，この両式を満たす v, b, r, k, λ, t のすべての組合せについて，いつでも t デザインが作れるとは限らない．むしろ，その逆に，t デザインの絶対に存在しない組合せで，式(1)，(2)を満たす v, b, r, k, λ, t が見つかっているのである．そして，t デザインが存在する場合でも，それを具体的に作り出すことは，一般に，数学上の大変むずかしい問題となっている．

2.4 BIBD とその具体的な作り方の例

t デザインにおいて，とくに $t=2$ のときを釣り合い不完備型のブロック・デザインとよび，英語の Balanced Incomplete Block Design の頭文字をとって，BIBD と略称している．BIBD は，実験計画法の分野で有効に活用されることがわかっている [7] ため，その作り方や性質がとくによく研究されている[5]．式(2)で，$t=2$ とおくと，

$$\lambda v(v-1)=bk(k-1) \tag{3}$$

となるから，これと式(1)がパラメータの間の関

係を与えることになる．そして，BIBD がとくによく出てくるため，$D_2(v, k, \lambda)$の添字を略して，単に$D(v, k, \lambda)$と書くことにしている．

BIBD に対しては，いろいろの作り方が考えられている[5],[11]．しかし，その作り方の多くは数学的で，予備知識なしに説明するのは困難である．このため，なぜそうなるかの説明は省略し，もっとも簡単に作れる BIBD の実例だけを示すことにしよう．

すべての整数を2で割ると，その余りは0か1である．いま，どの整数も2で割った余りで書くことにすると，和の計算は，

$$\begin{array}{ll} 0+0=0, & 0+1=1 \\ 1+0=1, & 1+1=0 \end{array} \qquad (4)$$

となる．そこで，この0と1を要素とする3次元のベクトルを考え，どの要素も0であるベクトルだけを除くと，その他は，

$$P_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ P_5=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

の7個である．ところで，式(4)の計算で，2つのベクトルの和を作ってみると，たとえば，

$$\begin{aligned} P_0+P_1&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=P_3 \\ P_0+P_3&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=P_1 \\ P_1+P_3&=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=P_0 \end{aligned} \qquad (5)$$

のように，3つのベクトルが組になっている．調べてみると，組になっている3つのベクトルは，ベクトルの添字だけで示すと，

$\{0,\ 1,\ 3\}$, $\{0,\ 2,\ 5\}$, $\{0,\ 4,\ 6\}$
$\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 5,\ 6\}$, $\{2,\ 3,\ 6\}$
$\{3,\ 4,\ 5\}$

の7組である．そこで，この添字を7種類の品物$V_0, V_1, \cdots, V_7$の添字と見直し，各組を大きさ3のブロックと見て，

$$\begin{array}{ll} B_0=\{0,\ 1,\ 3\}, & B_1=\{0,\ 2,\ 5\} \\ B_2=\{0,\ 4,\ 6\}, & B_3=\{1,\ 2,\ 4\} \\ B_4=\{1,\ 5,\ 6\}, & B_5=\{2,\ 3,\ 6\} \\ B_6=\{3,\ 4,\ 5\}, & \end{array} \qquad (6)$$

の7個のブロックを作れば，これは，

$v=7$，$k=3$，$\lambda=1$

の BIBD $D(7,\ 3,\ 1)$となる．ただし，添字のiだけで，品物V_iを示すことにした．

つぎに，すべての整数を3で割ると，その余りは0か1か2である．そこで，どの整数も3で割った余りでかくと，和と積の計算は，

$$\begin{array}{l} 0+0=1+2=2+1=0 \\ 0+1=1+0=2+2=1 \\ 0+2=2+0=1+1=2 \\ 1\times 1=2\times 2=1 \\ 1\times 2=2\times 1=2 \end{array} \qquad (7)$$

となる．ここで，この0と1と2を要素とする3次元のベクトルを考え，どの要素も0であるベクトルを除くと，その他のベクトルは26個である．この各ベクトルに2を掛けると，たとえば，

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\times 2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\times 2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

のように，2つのベクトルが組を作っている．そこで，この2つを同じとみて，一方のベクトルで代表することにすれば，13個の代表として，

$$P_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ P_5=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ P_7=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$P_8=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ P_9=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ P_{10}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ P_{11}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$P_{12}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

を得る．ところで，式(7)の計算を使って，2つのベクトルP_iとP_jに対して，

P_i+P_j，$P_i+P_j\times 2$

を作ってみると，式(5)と同じ形で，今度は4つのベクトルが組を作っている．そして，その組を具体的に調べてみると，

$$
\begin{aligned}
&B_0=\{0,\ 1,\ 3,\ 7\}, && B_1=\{0,\ 2,\ 5,\ 8\}\\
&B_2=\{0,\ 4,\ 6,\ 12\}, && B_3=\{0,\ 9,\ 10,\ 11\}\\
&B_4=\{1,\ 2,\ 4,\ 9\}, && B_5=\{1,\ 5,\ 6,\ 11\}\\
&B_6=\{1,\ 8,\ 10,\ 12\}, && B_7=\{2,\ 3,\ 6,\ 10\}\\
&B_8=\{2,\ 7,\ 11,\ 12\}, && B_9=\{3,\ 4,\ 8,\ 11\}\\
&B_{10}=\{3,\ 5,\ 9,\ 12\}, && B_{11}=\{4,\ 5,\ 7,\ 10\}\\
&B_{12}=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\} && \qquad (8)
\end{aligned}
$$

の13個のブロックを得る．これは，

$$v=13,\quad k=4,\quad \lambda=1$$

の BIBD $D(13,\ 4,\ 1)$である．式(8)を読者自身で求めてみると，これの構造がよくわかるであろう．

なお，この方法からは，$v=b$ の BIBD しか作れないが，少し工夫すると，それ以外のものもできる．たとえば，

$$
\begin{aligned}
&B_0=\{0,\ 1,\ 2\}, && B_1=\{3,\ 4,\ 8\}\\
&B_2=\{5,\ 6,\ 7\}, && B_3=\{0,\ 3,\ 7\}\\
&B_4=\{1,\ 4,\ 5\}, && B_5=\{2,\ 6,\ 8\}\\
&B_6=\{0,\ 4,\ 6\}, && B_7=\{1,\ 7,\ 8\} \qquad (9)\\
&B_8=\{2,\ 3,\ 5\}, && B_9=\{0,\ 5,\ 8\}\\
&B_{10}=\{1,\ 3,\ 6\}, && B_{11}=\{2,\ 4,\ 7\}
\end{aligned}
$$

がその例で，これは，

$$v=9,\quad k=3,\quad \lambda=1,\quad b=12,\quad r=4$$

の BIBD $D(9,\ 3,\ 1)$となっている．

2.5 Steiner システムとその具体的な作り方の例

$\lambda=1$ の t デザインをとくに Steiner システムとよび，3つの独立なパラメータ $t,\ v,\ k$ を使って，普通は $S(t,\ v,\ k)$ と書く．19世紀の幾何学者 J. Steiner が，この種の問題を4次曲線の2重接線の研究で取り扱ったことから，この名称がある[8]．式(2)で，$\lambda=1$とおくと，

$$v(v-1)\cdots(v-t+1)=bk(k-1)\cdots(k-t+1) \qquad (10)$$

となるから，これと式(1)がパラメータの間の関係を与えている．

ところで，2.4節で作った BIBD では，式(6)と式(8)のどちらをとっても，$\lambda=1$となっている．これは，$\lambda>1$ の BIBD を作ると，ブロックの個数bが多くなって，そのすべてを示すのが煩らわしいためもあったが，まさに Steiner システムの一つの作り方を示したことにもなっている．しかし，これでかたづけたのでは簡単すぎるので，もう一つの作り方を示そう．

$t=3$，$k=4$ とした Steiner システムで，とくに $v=2^m$ の場合を考えてみる．$m=2$とすると，$v=k$ となって，自明な Steiner システムとなるが，あえてこれを書くと，

$$B_0=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

の一つのブロックだけとなる．いま，B_0 に含まれる2つの数に着目し，それが0と1であれば，

$$\{0,\ 1,\ 0',\ 1'\},\quad \{0,\ 1,\ 2',\ 3'\}$$

を作るというようにして，6通りの組合せについて，

$$
\begin{aligned}
&\{0,\ 1,\ 0',\ 1'\}, && \{0,\ 1,\ 2',\ 3'\}\\
&\{0,\ 0',\ 2,\ 2'\}, && \{0,\ 1',\ 2,\ 3'\}\\
&\{0,\ 0',\ 3',\ 3\}, && \{0,\ 1',\ 2',\ 3\}\\
&\{1',\ 1,\ 2,\ 2'\}, && \{0',\ 1,\ 2,\ 3'\}\\
&\{1',\ 1,\ 3',\ 3\}, && \{0',\ 1,\ 2',\ 3\}\\
&\{2',\ 3',\ 2,\ 3\}, && \{0',\ 1',\ 2,\ 3\}
\end{aligned}
$$

を作ってみる．これに，

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\},\quad \{0',\ 1',\ 2',\ 3'\}$$

を加えれば，これらは $t=3$，$k=4$，$v=8$ に対する Steiner システムとなっている．$0'$，$1'$，$2'$，$3'$をそれぞれ 4，5，6，7に書き直し，ブロックに含まれている数字の順序を変えれば，

$$
\begin{aligned}
&B_0=\{0,\ 1,\ 4,\ 5\}, && B_1=\{0,\ 1,\ 6,\ 7\}\\
&B_2=\{0,\ 2,\ 4,\ 6\}, && B_3=\{0,\ 2,\ 5,\ 7\}\\
&B_4=\{0,\ 3,\ 4,\ 7\}, && B_5=\{0,\ 3,\ 5,\ 6\}\\
&B_6=\{1,\ 2,\ 5,\ 6\}, && B_7=\{1,\ 2,\ 4,\ 7\}\\
&B_8=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}, && B_9=\{1,\ 3,\ 4,\ 6\}\\
&B_{10}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}, && B_{11}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}\\
&B_{12}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}, && B_{13}=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}
\end{aligned}
$$

となって，普通のブロックの表現に戻る．

上の作り方に注意すると$v=16$に対するSteinerシステムも直ちに得られる．そして，この方法は，$v=2^m$ に対する Steiner システムを，$v=2^{m+1}$ に対する Steiner システムに拡大するとき，そのまま使えるのである[4]．その方法というのは，まず前者の各ブロック

$\{a, b, c, d\}$

に対応させて，後者に2つのブロック

$\{a, b, c, d\}$, $\{a', b', c', d'\}$

を作っておく，つぎに，前者の 2^m 個の数字から2個を選ぶすべての組合せについて，それがαとβの数字のときは，それを含む前者の各ブロック

$\{\alpha, \beta, a, b\}$

に対応させて，後者に2つのブロック

$\{\alpha, \beta, \alpha', \beta'\}$, $\{\alpha, \beta, a', b'\}$

を作るというものである．これだけの操作で，システムの拡大は完成である．

なお，上に求めた $v=8$ の Steiner システムは，$v=8$, $k=4$, $\lambda=3$ の BIBD にもなっていることを，念のために注意しておこう．

3. tデザインと重み一定符号

3.1 誤り訂正符号とは

これまでのtデザインの話とは無関係に，まず符号の説明をしよう．映画に出てくるインディアンは，よくノロシをあげて，敵の来襲を知らせている．これは，ノロシをあげることを1，あげないことを0とすれば，1か0の信号を送るということで，もっとも簡単な符号の例である．いま，ノロシの合図を2回にすれば，送れる信号は，

00, 01, 10, 11

の4通りとなり，3回にすれば，

$$\left.\begin{array}{l} 000,\ 001,\ 010,\ 011 \\ 100,\ 101,\ 110,\ 111 \end{array}\right\} \qquad (11)$$

の8通りとなる．

符号理論では，式(10)のおのおのの信号を符号語とよび，対象とする符号語の全体を符号と名づける．したがって，式(11)は8個の符号語から構成される（2進）符号である．ここに，2進というのは，2進数字にもとづいた符号のことで，3進数字にもとづけば3進符号となる．しかし，以下では2進符号だけを扱うので，とくに2進と断らないことにする．

いま，途中の径路に雑音があって，1が0に変わり，0が1に変わることもありうるとしよう．すると，式(11)の8個の符号語を使ったのでは，雑音による誤りを検出できない．そこで，符号語の数を減らして，1を偶数個だけ含むもの

$$000,\ 011,\ 101,\ 110 \qquad (12)$$

に限定すれば，1カ所の誤りで1が奇数個となるから，雑音を受けたことが検出できる．このような符号を誤り検出符号とよんでいる．

式(12)の符号では，001を受けても，もとの符号語を知ることができない．000, 011, 101 のどれからも，1カ所の誤りで001が出てくるからである．つまり，誤り検出符号では，誤りを検出できても，訂正はできないのである．

ところが，つぎの8個の符号語

$$\left.\begin{array}{l} 000000,\ 001011,\ 010101,\ 011110 \\ 100110,\ 101101,\ 110011,\ 111000 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

から構成される符号では，誤りが1箇所だけのときは，どの符号語のどの場所が誤っても，もとの符号語に訂正できる．その理由は，このなかの1つの符号語を別の符号語に変えようとすると，1と0の交換を，少なくとも3カ所でする必要があるからである．たとえば，001011と010101では4カ所，001011と011110では3カ所で，この数を2つの符号語の間の Hamming 距離，または単に距離という．そして，2つの符号語のすべての組合せについて，その間の距離を求めたとき，その最小値を符号の距離とよぶ．すると，距離が3の符号では1カ所の誤りが訂正でき，距離が5の符号では2カ所の誤りが訂正できる．このような符号を誤り訂正符号とよんでいる．

こう考えてくると，誤り訂正符号がもっともす

ぐれているようであるが，これには符号語の犠牲があることを忘れてはならない．式(13)の符号語の長さ（2進のケタ数）は6で，$64(=2^6)$個の符号語があるはずなのに，わずか8個しか利用していないのである．そこで，符号理論の大きな関心は，誤り訂正機能を充分に保ちながら，なるべく多くの符号語を含むような符号を捜すことに向けられてくる[1]，[9]．

3.2 tデザインと重み一定符号の関係

符号語に含まれている1の個数を，その符号語の重みという．したがって，0101010の重みは3で，1010101の重みは4である．また，ある符号を構成するすべての符号語の重みが等しいとき，その符号を重み一定符号とよぶ．7個の符号語

$$\begin{array}{l}1101000,\ 1010010,\ 1000101,\ 0110100\\ 0100011,\ 0011001,\ 0001110\end{array} \tag{14}$$

から構成される符号は，長さ7，重み3の重み一定符号である．

重みが等しい2つの符号語の間の距離は，つねに偶数である．たとえば，1110000と1010100の間の距離は2で，1110000と0000111の間の距離は6である．これは，一つの符号語の1の位置にもう一つの符号語の0が対応すれば，別の位置でかならず逆の対応が起きているからである．

重み一定符号は，ある種の電気回路に有効に利用される[12]ため，その構成法がいろいろと研究されている．ところが，符号語をもっとも多く含む能率的な重み一定符号が，BIBDやSteinerシステムから，じつは簡単に作られるのである．

まず，Steinerシステムから説明しよう．長さn，重みm，距離$2d$の重み一定符号において，それに含まれる符号語の数を$K(n, d, m)$とあらわしておく．すると，若干の計算から，

$$K(n, d, m) \leqq {}_nC_{m-d+1}/{}_mC_{m-d+1} \tag{15}$$

の関係が得られる[12]．ところが，この式の等号を満たす重み一定符号が，Steinerシステムから，つぎの方法で作られる．たとえば，式(6)を，

$$\begin{array}{c} \\ B_0\\ B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\\ B_5\\ B_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}0&1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&1\\0&1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array} \tag{16}$$

のような行列であらわす．あるブロック(行)がその品物(列)を含んでいれば1，含まなければ0としたものである．そこで，各行を符号語とみて，7個の符号語を作れば，これが求める重み一定符号である．式(14)の重み一定符号はこうして作ったもので，距離は4である．なお，式(15)の等号を満たす重み一定符号があれば，逆の方法で，つねにSteinerシステムを作ることができる．

つぎに，BIBDの説明に移る．上に定義した符号語の数$K(n, d, m)$について，別の方法で計算すると，

$$K(n, d, m) \leqq dn/\{dn-m(n-m)\} \tag{17}$$

という関係も得られる[12]．ただし，右辺の分母が正となる場合についてである．すると，この等式を満たす重み一定符号が，BIBDから，つぎの方法で作られる．

式(16)の行列であらわされたSteinerシステムは，BIBDでもあったので，これについて説明する．今度は，各列を符号語とみて，7個の符号語

$$\begin{array}{l}1110000,\ 1001100,\ 0101010,\ 1000011,\\ 0011001,\ 0100101,\ 0010110\end{array} \tag{18}$$

を作れば，これは式(17)の等号を満たす重み一定符号である．式(16)は，たまたま正方行列であったため，式(14)と式(18)は同じような符号になったが，一般には別のタイプの符号となる．たとえば，式(9)のBIBDを利用すると，

100100100100，100010010010，100001001001
010100001010，010010100001，001010001100
001001100010，001100010001，010001010100

という符号が作られる．

BIBDから作られる重み一定符号では，どの2つの符号語の間の距離も，つねに等しいことが特徴である．そして，式(17)の等号を満たす重み一定符号は，かならずこの特徴をもってくる．このため，この重み一定符号から，逆の方法で，つねにBIBDも作れるのである．

4. あとがき

ブロック・デザインのなかのtデザインについて説明したのち，BIBDとSteinerシステムについて少し詳しく解説した．また，符号の概念を簡単に説明したのち，重み一定符号がどのような形でBIBDやSteinerシステムと関係づけられるかを述べた．これらの解析はまったく初歩的で，予備知識を要求しないかわりに，数学的な説明も行なわなかった．このお詫びとして，さらに勉強したい読者のために，若干の文献をあげておく．

ブロック・デザインに関しては，[5]が標準的な教科書であり，内容も豊富である．また，有限の立場から述べたものには，[2]と[11]がある．つぎに，一般的な符号理論の話は，[1]と[9]がくわしい．また，tデザインと重み一定符号との関係づけは，本誌への解説[12]や，もとになった論文[6]，[10]，[13]にある．なお，この種の研究は，筆者らと独立に，ソ連でもなされていた．そして，これを含む各種の研究結果が，高い立場から[3]に述べられている．これには，BIBDやSteinerシステム以外の若干のブロック・デザインに対してもいろいろの関連づけが数学的に述べられている．

参考文献

[1] Berlekamp, E. R.: *Algebraic Coding Theory*, McGraw-Hill, New York, 1968.

[2] Biggs, N.: *Finite Groups of Automorphisms*, Cambridge Univ. Press, London, 1971.

[3] Blake, I.F. and Mullin, R.C.: *An Introduction to Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, Academic Press, New York, 1976.

[4] Carmichael, R. D.: *Introduction to the Theory of Groups of Finite Order*, Dover, New York, 1956.

[5] Hall, M.: *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, 1967. (邦訳) 岩堀信子訳：組合理論，吉岡書店，1971.

[6] 池野信一，中村義作："重み一定符号，" 電子通信学会論文誌，**54A**，7 (1971)，410—417.

[7] Mann, H.B.: *Analysis and Designs of Experiments*, Dover, New York, 1950.

[8] 増山元三郎：実験計画法，岩波講座現代応用数学，岩波書店，1957.

[9] 宮川洋，岩垂好裕，今井秀樹：符号理論，昭晃堂，1973.

[10] 苗村憲二，中村義作，池野信一："重み一定符号とブロック計画，" 電子通信学会論文誌，**54A**，12 (1971)，671—678.

[11] 永尾汎：群とデザイン，岩波書店，1974.

[12] 中村義作："組合せ理論の応用(4)，" オペレーションズ・リサーチ，**22**，9 (1977)，551—556.

[13] 中村義作，池野信一，苗村憲二："重み一定符号の最良性，" 電子通信学会論文誌，**55A**，7 (1972)，354—359.

[14] Wilson, R. M.: An Existence Theory for Pairwise Balanced Designs, I and II, *J. of Combinatorial Theory*, **A13** (1972), 220—245, 246—273.

なかむら・ぎさく　1928年生
信州大学工学部情報工学科