組合せ理論の応用について

組合せ理論とよばれるものは非常に広い分野にわたっているが，筆者には3つの分野に大別されると思われる．

第1はいわゆる順列組合せとよばれるものの延長で，ある条件に合う組合せの総数を数えるという問題である．この分野では生成関数とかポリアの定理などの基本的な方法はあるが，むろん個々の問題でさまざまな工夫が必要である．いずれにしても組合せの中での同型性の識別という問題を解決することが先決で，その一つの突破口として，置換群を利用したのがポリアの定理である[1]．

第2はいわゆる離散的最適化の問題で，スケジューリングやネットワーク問題，集積回路のレイアウト，オセロなどのゲームでの最適手の発見，などで各組合せになんらかの評価値が考えられていてその評価での最適値をもつ組合せを探し出す問題である．この分野がORにもっとも広い応用をもち，整数計画法分岐限定法などの多くの技法が考えられているが，問題の規模nに対して解を得るための手間が，nの多項式以上のオーダー，たとえばe^nとか$n!$とかになる可能性が多く，このような指数的なオーダーになる場合は大きなnに対しては現在のコンピュータを用いても不可能とみなしたほうがよいと考えられている．この分野ではＮＰ完全性の議論が基礎論的な意味で重要な働きをしている[2]．

第3の分野は構成問題とでもよばれるべき問題で，ある条件を満たす組合せ構造の性質を調べたり，その組合せ構造を実際に構成するアルゴリズムを研究したりする問題で，ディジタル情報処理の分野などに広い応用をもっている．

この特集で問題とするのは主として第3の分野で，ＯＲ学会の研究部会「組合せ理論の情報科学への応用」(昭和51，52年度)の中で取り上げられた問題のうちとくに一般向けでしかも独創的な興味ある内容をもった話題を選んでそれぞれ担当の方々にわかりやすく解説していただいたものである．

この第3の分野が一般にあまりなじみのない方が多いと思われるのでその概要を簡単に述べておきたいと思う．

1. 直交実験の構成

この第3の分野の組合せ論が実用の場に適用された最初の例は，実験計画法くわしくは要因配置実験における直交表の利用であるとみることができよう．これは周知のようにR. A. FisherやF. Yatesによって農事試験の場で創始されたものであるが，工場実験でもシミュレーションなどにも利用可能であろう．

たとえば化学反応の工場実験で，製品の品質や収率などの特性値に影響を与えるさまざまな因子が考えられる．たとえば触媒という因子に対して，既製の触媒を使う，新しく開発された触媒を使う，触媒を使わないといったような実験条件を規定するものを水準とよぶ．また反応温度という因子に対して300°，400°，500°なる水準が考えられるなど．ちょっとした実験でも考えられる因子はすぐに10や20に及ぶものである．

この場合，仮りに因子数が12で各因子が3水準であったとするとき，あらゆる水準組合せについて実験を行なう（これを仮りに完全実験とよんでおく）と，実験回数は$3^{12}=531441$となるので，とても実現できない．そうなると多くの技術者は(あまり重要でないと思われる)いくつかの因子の水準を適当に固定して実験回数を少なくしようとするが，これだと偏った情報しか得られないことになる．

このようなとき，できるだけ少ない実験回数で必要な情報を得るためにはどのような水準組合せについて実験をすればよいかということが実験計画，つまりデザインの主要な数学的問題となってくる．

必要な情報といっても，これはデータの構造式としてどのような仮定を置くかに依存するが，一般に交互作用(たとえば[6])のない構造式を仮定するときは，つぎのような条件をもつ水準組合せがよいことが知られている．

いま因子がm個あるとしてこれをF_1, …, F_mとしよう．F_iの水準数がs_i個あるとして，F_iの水準番号をx_iであらわす，x_iは1, 2, …, s_iのいずれかの番号をとるものとする．このとき1回の実験をあらわす水準組合せは$[x_1, \cdots, x_m]$と書けるわけであるが，このとき，どの因子対に対してもその中の水準番号の対が同一回実験されているような実験の集合を強さ2の直交実験とよぶ．つまり実験の集合をXとするとき，すべてのi, $j(i \neq j)$に対して，

$$\{[x_1, \cdots, x_m] \in X : x_i=\alpha,\ x_j=\beta\} \qquad (1)$$

なる集合の大きさがαやβによらず一定であるときXを強さ2の直交実験とよぶわけである．

Fisher等はこれと同等のことを直交表という記号の配列された表を用いて実現していたが，いずれにせよ，直交実験をつくることは(1)のような条件をもつ記号の配列Xを構成するという組合せ論的構成問題となる．なおすべての因子対に対して2因子交互作用が考えられる場は強さ4の直交実験(つまり，どの4つの因子の水準番号x_i, x_j, x_k, x_lに対しても(1)のような条件が成り立つ実験）が必要とされる．また一部の因子対にだけ交互作用が考えられる場合には部分的に強さ3ないしは4の直交実験が必要とされる．

2. ガロア体の導入

このような問題は，この特集のはじめの論説「組合せ理論の応用への入門」(今後[I]として引用）にあるように，各因子の水準数s_iが同一であるときはガロア体上の線形代数の問題として解くことができる．ガロア体の説明は[I]にくわしいが，実数と同一の四則演算をもつ代数系で有限集合であるもの，つまり有限体であるといえばよい．

直交実験の構成といった組合せ問題もこのように数学的表現がひとたびできると問題はきわめて取り扱いやすくなり，さまざまな発展を生むのが常である．この場合もガロア体上の射影幾何での直線が2因子交互作用に相当する概念となり，交互作用の一部が考えられるときにどのような直交実験をつくればよいかという問題にきわめて有効な手段を提供している．

現在ではガロア体上の射影幾何の点や直線を構成する効率のよい巡回的アルゴリズムがつくられているため，実験計画のデザインもコンピュータによる自動化が可能になりつつある段階であるといえよう[3]．

3. 誤り訂正コード

宇宙通信やコンピュータの設計などで誤り訂正コードの研究が重要な役割を果たしている．情報にうまいコード化をして送信したり記憶したりすると誤りが多少起こってもこれを自動的に訂正することが可能になるのである．

たとえば通信の問題を考えると，情報源から毎秒mビットの情報が出現し，送信能力が毎秒nビット$(m<n)$であるとしよう．このとき{0, 1}の

m 次元空間(これを $\{0, 1\}^m$ と書く)のベクトル t を $\{0, 1\}^n$ の適当なベクトル x にコード化し，x を送信する．受信されたベクトルは誤りを含むので，x そのものでなく $x'(\in\{0, 1\}^n)$ に変化しているが，x' から t を推定することをデコードとよぶ．

このときどのようなコード化をし，どのようなデコード方式をとれば与えられた m, n に対して正しくデコードされる確率を最大にできるか，あるいはたかだか e 個の誤りまでは訂正できるか，という問題の研究が誤り訂正コードの課題であるといえよう．

この問題も $\{0,1\}$ を大きさ2のガロア体 GF(2) (→[I])とみなして，GF(2)上の線形代数の問題として考えることによって多くの重要な課題の解決をみたのである．これはちょうど水準数が2である場合の直交実験の問題と数学的にはまったく同様の問題となるのである．したがって実験計画法の研究者の多くが同時にコード理論の研究者でもあるといえる．

両者に共通でいまだ一般的には未解決である数学的難問は最大 t-独立集合の問題というもので，これは，GF(s)(大きさ s のガロア体)上の n 次元ベクトル空間の中にベクトルの集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ があるとき，その中のどの t 個も1次独立であるとき，X を t-独立集合というが，大きさが最大である t-独立集合を求める問題である．これは実験計画の問題では，たとえば $t=3$ なら交互作用は主効果とは交絡しないという条件のもとで一定回数の実験でできるだけ多くの因子を許容できる直交実験の構成に相当し，コード問題では，たとえば $t=4$ ならたかだか2個の誤りは必ず自動的に訂正できるという条件で情報ビット数の最大なコードの構成に相当している．

4. ブロックデザイン

直交表とならんで有名な実験計画法の道具にブロックデザインなるものがある．その代表的なものがBIBDでこれらについてはこの特集の第2の論説「ブロックデザインと符号」(今後[II]と引用)にくわしい説明があるが，ここでは身近な例でBIBDの説明をしておこう．

いま7人 $\{0, 1, \cdots, 6\}$ でマージャンを7回戦やるとき，

(i) 誰もが同数回出場し

(ii) どの2人も同数回顔が合う

ような組合せをつくれという問題が与えられたとしよう．

これに対して**表1**のような組合せを考えれば，ここでは確かに誰もが4回出場しどの2人も2回ずつ顔が合っていることがわかる．表1は $\{0, 1, \cdots, 6\}$ という集合の大きさ4の部分集合が7つあってこれが条件(i)(ii)を満たしているものであるとみることができる．

表 1

0	2	3	4
1	3	4	5
2	4	5	6
3	5	6	0
4	6	0	1
5	0	1	2
6	1	2	3

一般にBIBDとは大きさ v の集合 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_v\}$ の部分集合(これをとくにブロックとよぶ) $B_l(\subseteqq\Omega)$ の系 $\boldsymbol{B}=\{B_1, \cdots, B_b\}$ があって，

$$|B_l|=k,\quad 1\leqq l\leqq b \tag{2}$$

$$|\{l: B_l\ni\omega_i, B_l\ni\omega_j, 1\leqq l\leqq b\}|=\lambda, i\neq j \tag{3}$$

なる関係を満たすものをいうのである．(3)の条件は上の例では条件(ii)に相当している．(実は条件(i)は(ii)が成り立てば必然的に成り立つのである)上の例では $v=b=7$，$k=4$，$\lambda=2$ に相当している．

条件(3)は Ω のどの2つの元 ω_i, ω_j に対してもこれらを共に含むブロック B_l がちょうど λ 個 $\boldsymbol{B}$ の中に存在するという条件で，強さ2の条件とでもよばれるべきものである．(そうすると必然的に強さ1の条件，$|\{l: B_l\ni\omega_i, 1\leqq l\leqq b\}|=$一定，が成り立つのである．)

(2)および強さ1の条件が成り立っていて(3)の条件が部分的に成り立つものを PBIBD (partial BIBD) とよんでいる．また(2)および強さ3の条件を満たすものを3-デザインとよんでいる．(こ

の意味でBIBDのことを2-デザインとよぶ場合もある.)

これらのものを総称してブロックデザインとよんでいるのだが,[II]ではこれらのブロックデザインを用いて,性質のよいコードが構成しうることを示すもので,とくに3-デザインを用いたコード構成法はきわめてユニークな発想である.いずれもまったく予備知識のいらない初等的で簡潔なアルゴリズムでつくられることに興味がある話題である.

5. 有限幾何

ガロア体が実数と四則の性質を同じくするところから,実数上のn次元ベクトル空間と同様にガロア体上のn次元ベクトル空間なるものが考えられ,この中での点や直線も実数の場合と同様に考えることができる.しかし実数の場合と異なり,連続性や順序性はなく,すべて有限離散であることから,このような幾何学を有限幾何とよんでいる.

有限幾何には上記のような普通のベクトル空間を考えるもの(これを有限アフィン幾何という),さきに実験計画のところで触れた有限射影幾何とが考えられる.いずれの場合も点全体をΩと見て,直線を点の集合と考えこれをブロックとみれば,直線全体は$\lambda=1$のBIBDとなることは容易にわかる(2点を通る直線は唯1本あるという性質が条件(3)を満たしている).

平面全体や立体全体などもやはりBIBDを構成しているが,いずれにせよ有限幾何は組合せ論の中で重要な役割を果たす.とくに有限幾何はガロア体の演算で構成できるため,ブロックデザインを構成したりそれを情報処理に応用したりするのにきわめて好都合なのである[4].

6. ファイリング

情報を記憶しておいて必要に応じてそれをとり出すのが情報検索である.この場合情報の構造はデータ・ベースなどのように複雑なものや,単なる文献検索のように比較的簡単なものなどいろいろ考えられるが,もっとも簡単なものがキーワード型とでもよばれるべきものである.

これは各情報単位(たとえば文献)がいくつかのキーワードによって特徴づけられている場合である.つまりキーワード全体を$\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_v\}$とするとき,各文献$j$は$\Omega$の部分集合$A_j\ (\subseteqq\Omega)$によって特徴づけられている.

このときもっとも原始的なファイルはsequentialファイルとよばれるもので,これはA_1, A_2, …, A_N(またはこれらに付随する個別情報)の順に記憶しておくものである.これに対して質問$\Gamma=\{\omega_i\}$がくれば,ω_iをもつような,つまり$A_j\ni\omega_i$となるような,すべての文献jをアウトプットするのが検索である.

sequentialファイルは検索のときに1つ1つsearchしてゆかねばならないので時間がかかる.そこでω_iをもつ文献を全部あらかじめまとめてω_iというバケットに入れておくのが転置ファイルとよばれるもので,ω_1, …, ω_vの各キーワードに対するバケットをもつものを1次の転置ファイルとよぶのである.

1次の転置ファイルをもっていれば,キーワード1つだけからなる質問,つまり1次の質問$\Gamma=\{\omega_i\}$にはsearchなしで答えられるが,2次の質問$\Gamma=\{\omega_i, \omega_j\}$に答える,つまり$A\supseteqq\{\omega_i, \omega_j\}$となる$l$を見出すには,若干のsearchが必要となる.この場合には2次の転置ファイル,つまりすべての2つのキーワードの組合せ$\omega_i\omega_j$に対してこれらを同時にもつ文献をまとめて$\omega_i\omega_j$というバケットに入れておくファイル,をつくっておかねばならない.

この2次の転置ファイルの改良型として,R.C. Bose等は$\lambda=1$のBIBDを用いることをすすめている.これは簡単にいうとBIBDのブロックB_lに対して$B_l\cap A_j$が空集合でないような文献jをB_lに対応するバケットに入れておくというフ

ァイル方式である．こうすると2次の質問に即座に答えられてしかも，2次の転置方式より冗長度が減少することがわかるのである[4].

なお広島大学の山本純恭教授等は，グラフ理論における claw 分割の概念を適用して，(ある条件のもとで) もっとも冗長度の低い，したがって BIBD のよりもよい，ファイル方式を提案している[5].

情報検索の問題からCR性という組合せ的問題が問題となるのだが，その本質的解明としての決定版ともいえる理論の解説が第3の論説「Consecutive 1's property について」(以後[III]と引用) である．ここでCR性の情報検索としての意義についてちょっと触れておこう．

[III]の図1(490ページ)で a, b, c, …などは文献で，A, B, C, …などはキーワードであると考えよう．図でたとえば，b 行 E 列が1であるがこれは文献 b がキーワード E をもっていることを示し，b 行 D 列が0であるのは b が D をもっていないことを示す．

コンピュータにおけるテープとかディスクとかいう大容量記憶はその構造がどうあれ検索という見地からみれば本質的に1次元的である．そこで a, b, c, …という文献を1次元的に並べるときどのような順序に並べれば(各キーワードによる) 検索がしやすいかを考えると，図2(490ページ) のように並べてあれば，どのキーワードで検索する場合でも該当する文献が連続して並んでいるから，1次元的記憶装置から取り出す時間が圧倒的に速くなる．もっとも現実の文献とキーワードの場合全体がCR性をもつことはきわめてまれである．そこでCR性をもつようなグループに分割するにはどうすべきかといった問題に発展してゆく．

7. グラフ理論と言語解析

一般に質的な問題を取り扱う場では，言葉や概念構造の分析がきわめて重要な役割を果たす．たとえば上記の情報検索などを実際の場に適用しようというときには，キーワードの選択の良否が決定的な影響を与える．このような分野に2部グラフの分割理論を導入した新しいアイディアの解説が「2部グラフの分割理論を利用した概念構造決定法」([IV])である．

この2部グラフの分割の理論は，大規模なシステム分析などによくあらわれる，大規模方程式系を分割して解く方法に用いられたのが最初であったと思われる．たとえば未知数 x_i が方程式 f_j の中に含まれていれば点 x_i と方程式 f_j とを結ぶ枝があるとして，未知数と方程式とを対比する2部グラフをつくり，この2部グラフによく知られた最大マッチングアルゴリズムを適用することによって，これを半順序グループに分割し，大規模な方程式系をいくつかの比較的小規模な方程式系の連鎖に分解して解こうという試みである．

この方法を言葉と対象という2部グラフに適用しようという試みが[IV]であり，この分野での新しいきっかけをつくるのではないかと期待されるものである．

参考文献

[1] F. Harary : *Graph Theory*, Addison-Wesley (1969).

[2] 茨木俊秀：整数計画はなぜ難しい?，第5回シンポジウム数理計画法，OR学会(1977年3月).

[3] Ryoh Fuji-Hara : On Automatical Construction for Orthogonal Designs of Experiments, *Rep. Stat. Appl Res. JUSE*(近刊).

[4] 高橋磐郎：組合せ数学の展望その I，早稲田大学生産研究所報 No. 26(1972年).

[5] 山本純恭，伊理正夫，古林隆：シンポジウム「組合せ理論」，経営科学，Vol. 18, 5-6号(1974).

[6] 奥野忠一，他：実験計画法，培風館.

たかはし・いわろう　1929年生
早稲田大学　システム科学研究所