フォーラム

賭けの数理-I

竹内 啓

賭けというものは，フェルマー，パスカルの昔以来，確率論の発展と密接な関係があった．しかし最近では確率論はすっかり上品な数学となってしまって，賭けなどとはあまり関係をもたなくなっている．しかしながら，賭けの問題の中には，依然として数学的にも興味ある問題が存在しているのであり，逆に数学的な定理の中には応用上も有用な結論がふくまれているのである．ORの観点からしても賭けの数理は，単なる「遊びごと」ではないはずである．以下数回にわたって，賭けの数理に関する，いくつかの話題について述べようと思う．

1. 定式化

いま賭け betting の問題をつぎのように定式化する．賭けの参加者 player は，いくつかの可能性について選択を行なうことができるとする．賭けを行なう対象をここでは「くじ」lotとよぼう．「くじ」には1からpまでのものがあるとする．「くじ」は「賭け方」をあらわしているのだから，たとえばルーレットならば「赤」「黒」「奇数」「偶数」あるいは「1番」「5番」というようないろいろな「くじ」があると考えられるのである．賭けの結果 outcome は1からqまでのいずれかの「目」number で表されるものとしよう．いま1本のくじの価格を1とし，j番の「目」が出たとき，i番の「くじ」1本についてr_{ij}という「配当，dividendが，与えられるものとする．ただし $r_{ij}\geqq 0$ すなわち「マイナスの配当」はないものとする．しかしながら，くじの価格が1だから $r_{ij}<1$ ならば，参加者にとって損失が生ずることになる．

ここで参加者はどのくじでも，任意の本数（小数単位でも，また無理数本でも）買うことができるものとする．

いまj番の目が出る確率をp_jとしよう，そうするとi番のくじから得られる配当の期待値は，

$$\sum_j r_{ij}p_j$$

となる．

いま $v=\max_i \sum_j r_{ij}p_j$ をこの賭けの価値valueとよぶことにしよう．そして，

$v>1$ のときを有利な favourable 賭け

$v=1$ のときを公平な fair 賭け

$v<1$ のときを不利な unfavourable 賭け

とよぶことにする．

これから考えるのは一定の金額をもってあらわれた参加者が，どのようにくじを買うべきかという問題である．ただし参加者は確率 p_j を知っているものとする．

このような問題の設定では，賭けは何人かの参加者の間で行なわれるのではなく，1人の賭博者と胴元との間で行なわれることになる．また賭け金の率は，最初から定まっていて，どう賭けるかによって変わることはないものとされている．これらの仮定は変えることもできるし，また後にはこれを変えた場合も考慮する．

またここで「くじ」をいくらでも細かく買うことができると仮定したことは，現実的ではないと思われるかもしれないが，数学的とり扱いの便宜上こう仮定する．

2. 賭けの戦略と martingale

ここで参加者の賭けの戦略 strategy を考慮しよう．それはp本のくじへの賭け金の配分を定めるものであり，k回目に全持ち金のうちで，第i番目のくじに投ずる金額を Z_{ki} $i=1,\cdots,p$ としよう．いまk回目に賭けるときの所持金額を X_{k-1} とすれば，いうまでもなく，

$$\sum_{i=1}^{p} Z_{ki}\leqq X_{k-1}$$

とならねばならない．

$$Z_{k0}=X_{k-1}-\sum_{i=1}^{p} Z_{ki}$$

とおくと，この値は手許に残しておく金額をあらわしている．

いま確率変数 ξ_{kj} をつぎのように定義する．

$\xi_{kj}=1$ k回目の賭けでjという目が出たとき

$=0$ その他

$\{\xi_{kj}\}$ $k=1,2,\cdots\cdots$は互いに独立であると仮定する．

そうすると，k回目の賭けの結果 所持金額は，

$$X_k=Z_{k0}+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} Z_{ki}r_{ij}\xi_{kj} \tag{2.1}$$

となる．これは，

$$X_k=X_{k-1}+\sum_i\sum_j Z_{ki}(r_{ij}-1)\xi_{kj} \tag{2.2}$$

とあらわすことができる．

参加者は賭けの金額の配分をつぎのような形の関数にしたがって定めるものとする．

$$Z_{ki}=\phi_{ki}(X_{k-1})\quad i=1,\cdots,p;\ k=1,2,\cdots\quad \phi_{ki}\geqq 0$$
$$\sum_{i=1}^{p}\phi_{ki}\leqq 1$$
賭けの戦略とは，このような関数の列$\{\phi_{ik}\}$のことであると考える．

これを(2.2)に代入すると，

(2.3) $X_k=X_{k-1}+\sum_i\sum_j\phi_{ki}(X_{k-1})(r_{ij}-1)\xi_{kj}$

となる．

このことからX_{k-1}を与えたときのX_kの条件付期待値が，つぎのようにあらわされる．

(2.4) $E(X_k|X_{k-1})=X_{k-1}+\sum_i(\sum_j r_{ij}\,p_j-1)\phi_{ki}(X_{k-1})$

したがって「不利な」賭けにおいては，どんな戦略のもとでも常に，

(2.5) $E(X_k|X_{k-1})<X_{k-1}$

となる．したがってまた，

(2.6) $E(X_k)<E(X_{k-1})<\cdots<X_0$

となる．

「公平な」賭けにおいても，

(2.7) $E(X_k|X_{k-1})\leqq X_{k-1}$

$E(X_k)\leqq E(X_{k-1})\leqq\cdots\leqq X_0$

が成り立つが，ここでϕ_{ki}を，

(2.8) $\sum_j r_{ij}\,p_j<1$ ならば $\phi_{ki}=0$

という条件を満たすように定めれば，

(2.9) $E(X_k|X_{k-1})=X_{k-1}$

$E(X_k)=E(X_{k-1})=\cdots=X_0$

となる．

さらに「有利な」賭けにおいてもϕ_{ki}を，条件(2.8)を満たすように定めれば，

(2.10) $E(X_k|X_{k-1})>X_{k-1}$

$E(X_k)>E(X_{k-1})>\cdots>X_0$

となる．

実確率変数の系列X_1, X_2, …が，条件(2.9)を満たすとき，それをマルチンゲール martingale という．また(2.7)(2.10)を満たすような系列はそれぞれ，劣マルチンゲール submartingale，優マルチンゲール supermartingale とよばれる．martingale の概念は P. Lévy によって導入され，Doob によってくわしく研究されたが後に見るように，賭けの数理にとってきわめて重要な意味をもっている．

3. 「よい戦略」の意味

しかしながらmartingale(あるいは劣，優martingale)の関係式は，どのような戦略を取っても，公平な賭けなら損得なし，不公平な賭けなら損，有利な賭けなら得をするということを示すものではない．

いま公平な賭けの場合を考えよう．ここでより強い条件として，

$$\sum_j r_{ij}\,p_j=1\quad i=1,\cdots,p$$

となる場合を考えよう．このときは賭けは完全に公平 completely fair とよばれる．この場合どのような戦略をとるとしても，

$$E(X_k|X_{k-1})=X_{k-1}$$
$$E(X_k)=X_0\quad k=1,2,\cdots$$

となる．

いま戦略の中で，

(3.1) $\phi_{ki}(X_{k-1})=c_iX_{k-1}\quad i=1,\cdots,p;\ k=1,2,\cdots$

$c_i>0$，$\sum c_i\leqq 1$

となるものを 定比配分戦略 constant ratio strategy とよぶことにしよう．そうすると(2.3)から，

$$X_k=X_{k-1}+(\sum_i\sum_j c_i(r_{ij}-1)\xi_{kj})X_{k-1}$$

となるから，

$$Y_k=1+\sum_i\sum_j c_i(r_{ij}-1)\xi_{kj}$$

とおけば，

$$E(Y_k)=1+\sum_i\sum_j c_i(r_{ij}-1)p_j=1$$

となる．ところで，

$$X_k=Y_k\,X_{k-1}=Y_k\,Y_{k-1}\cdots Y_1\,X_0$$

となるから，

$$\log X_k=\log X_0+(\log Y_1+\cdots+\log Y_k)$$

となる．ところが Jensen の不等式により，

$$\mu=E(\log Y_k)\leqq\log E(Y_k)=0$$

となり，かつ$Y_k\equiv 1$の場合以外は$\mu<0$となるから大数法則により，確率1で，

$$\sum_{k=1}^{n}\log Y_k/n\longrightarrow\mu$$

となるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\log Y_k\longrightarrow-\infty$$

(3.2) $\log X_n=\log X_0+\sum_{k=1}^{n}\log Y_k\longrightarrow-\infty$

$X_n\longrightarrow 0$

となる．つまり定比配分でいつまでも賭けをつづけていれば完全に公平な賭けの場合でも必ず全額を「すって」しまうことになる．

ここで，すべてのnについて， $E(X_n)=X_0$ であるにもかかわらず，$X_n\longrightarrow 0$となることは 一見矛盾をあらわしているようであるが，このことはnが大きくなると，ほとんどすべての場合についてX_nは非常に小さくなるが，小さい確率で非常に大きい値をとり得ることになる．

賭けの常習者はつねに財産を失ってしまうか，その途中では，大きな財産をつくることもあるということは，確率論的にも説明がつけられることのように思われる．なお公平な賭けの問題については次回にも述べる．