宇宙船軌道の選定に関する交渉のゲーム

昨年の8月，9月にボイジャー2号，1号という宇宙船が打ち上げられた．これはNASAのジェット推進研究所(JPL)によって進められた1977年木星・土星探測無人宇宙船計画にもとづくものである．84名の参加科学者が11のチームを編成し，木星と土星のさまざまな観測を受けもった．この計画では宇宙船は土星の衛星の一つであるタイタンに接近，通過しその調査を行なうことももり込まれていた．

ここでタイタン付近の通過に際し，各チームにとっての最適軌道は異なり，宇宙船軌道の選択調整という問題が生じた．この選定責任はJPLにあり，調整のため各チーム代表者の会合を開き議論を煮つめるのであるが，その際科学者間の協力関係を維持し，不必要な摩擦を減少させる工夫がなされた．そのために，会合に先立って各チームに技術的に可能な軌道の代替案の選好順位を表明してもらい，その集計方法が提示され，その一つとして，J. Bonnardeaux [1] らによって，Nash交渉ゲームが示された．本稿では彼らの適用例を紹介する．

1. 軌道選定の交渉ゲーム

各チームをプレイヤーとし，その集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ とする．ここでは $n=11$ 人ゲームを考える．チーム全体が協力関係を目ざしていることは明らかであり，また問題の性格からいくつかのチームが提携を組むことはないと考えられるし，そのようなことはあるべきでもないと考えられる．したがって，考察すべき提携はチーム全体の集合 N と各チーム $\{i\}$，$i=1, \cdots, n$，である．

いま，タイタン付近の技術的に可能な軌道全体を T とし，簡単のために有限とする．つぎのようにこの調整のゲームを構成しよう．各チームの戦略の集合は T である．つまり，チーム i は自分のとりたい軌道 t_i を表明する．その組 $(t_1, \cdots, t_n) \in T^n$ において $t_i=t$（すべての $i \in N$）ならば軌道 t が選択され，そうでないときには宇宙船の打ち上げは実現しないとする．この後者の結果を a とし原点とよぶ．したがって，起こり得る可能な結果は $T \cup \{a\}$ である．この中からどの結果が交渉ゲームの解として成立するかに関心がある．

Nash はこのタイプのゲームの解を公理論的なアプローチから考察した．Nash の原論文[3]は，$n=2$ の場合であるが，ここで述べた n 人ゲームへの拡張は直接的である（これについては[4]を参照）．

$T \cup \{a\}$ およびその上の確率分布（くじ）も可能な結果と考えて，各チームのその上の選好順位が期待効用原理を満たすような実数値の効用関数(すなわち，von Neumann-Morgenstern 効用)であらわされるとし，その全体を，

$$S=\{u(t) \mid t \in m(T \cup \{a\})\}$$

とする．ここで $m(T \cup \{a\})$ は，$T \cup \{a\}$ 上の確率分布の全体をあらわす．S は n 次元ユークリッド空間 R^n の有界閉凸集合であり，$u(a)$ は原点の利得である．どのチーム i も結果 a より好ましい軌道 t_i^* をもっていると考えられるから，それらを等しい確率でとる分布という結果 t^* をとれば，$u(t^*) \in S$ かつ $u(t^*) > u(a)$（ベクトルの大小はその成分の大小による）がなりたつことがわかる．

いま S と $u(a)$ をパラメータとして，一般に R^n

のコンパクト凸集合 S と点 $x^0 \in R^n$ で,

(*) $S' = \{x \in S \mid x > x^0\} \neq \phi$

なる性質を満たす S と x^0 の組 (S, x^0) を交渉問題とよぶ. S の点はプレイヤーの交渉が合意に達したとき実現可能な利得ベクトルをあらわし, x^0 は合意がえられなかったときに実現する. 利得ベクトルをあらわしている. 条件(*)は, この交渉の状況がどのプレイヤーにとっても参加しがいのあるものであることを示す.

各交渉問題(S, x^0)に対して, この問題の解を対応させる写像 φ を解写像とよぶ. φ のもつべき納得的な性質を公準として述べる.

1. (実現可能性) $\varphi(S, x^0) \in S$
2. (個人合理性) $\varphi(S, x^0) \geqq x^0$
3. (パレート有効性) $x \in S$, $x \geqq \varphi(S, x^0)$ ならば $x = \varphi(S, x^0)$
4. (無関係な結果からの独立性) (S, x^1), (R, x^2)が二つの交渉問題で,
   i) $x^1 = x^2$
   ii) $R \subset S$
   iii) $\varphi(S, x^1) \in R$
   ならば, $\varphi(R, x^2) = \varphi(S, x^1)$
5. (効用変換に関する独立性) (R, x^2) が (S, x^1) から正一次変換:
   $f_i(x_i) = \alpha_i x_i + \beta_i$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$ でえられるとする. $f(x) = (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n))$ とする. このとき, $\varphi(R, x^2) = f(\varphi(S, x^1))$
6. (対称性) (S, x^0)が,
   i) $x_i{}^0 = x_j{}^0$, すべての $i, j \in N$
   ii) $x \in S$ ならば $\{1, \cdots, n\}$ の任意の順列 π に対して, $x_\pi = (x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) \in S$,
   を満たすならば,
   $\varphi(S, x^0)_i = \varphi(S, x^0)_j$, すべての $i, j \in N$.

Nash はこれらの公準を満たす解写像 φ は一意であってそれは,

$$\varphi(S, x^0) = x^*$$

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i{}^* - x_i{}^0) = \max_{x \in S'} \prod_{i=1}^{n} (x_i = x_i{}^0)$$

によって与えられることを示した. したがって, 宇宙船軌道選択問題では,

$$(1) \quad \max \prod_{i=1}^{n} (u_i(t) - u_i(a)), \quad t \in m(T \cup \{a\})$$

の解が調整解として与えられる. ところで, 上述の公準が軌道選択問題において適切であるかを吟味しよう.

公準1, 2, 3には問題はないだろう. 公準4については, 軌道の代替案の集合から調整解の利得を与えるような軌道以外のいくつかのもの (これらは調整解とは無関係といえる) を取り除いた集合を T' としよう. この T' と $\{a\}$ の組で調整解を考えてもやはり同じ結果が解として与えられることをこの公準は述べている. 公準4を満たさない調整方式ではこの意味で不安定な解がえられることがあり, それは望ましくない. 公準5はチーム間の効用比較を行なわないことをあらわす. この計画での11の実験項目は非常に専門化したものであり, その間の優先順位を与えたり重要度を考えたりすることは不可能といえるものであった. したがって, チーム間の効用関数値の比較は意味をなさない. 公準6はどのチームも平等に扱われるということを述べるものであって, 適切なものといえる.

2. Nash 解の算出

Nash 解が望ましい調整解を与えることがわかったので, つぎに具体的にそれを求める. まず各チームの代替案に対する効用関数を測定する. 11のチームのうちで軌道の選定にとくに敏感な実験チームを四つ選び, それらについての測定を行なっている. このとき, 各チームの真の選好を測定するように注意せねばならない.

タイタン付近の軌道を目標平面(図1)で表現する. 目標平面はタイタンを含み宇宙船が垂直に通過する平面と考えてよい. したがって, この平面の点によって宇宙船のタイタン付近の軌道をあらわすことができる. その上で, 有用な情報がまったく得られないとき (結果 a もそうである) 効用

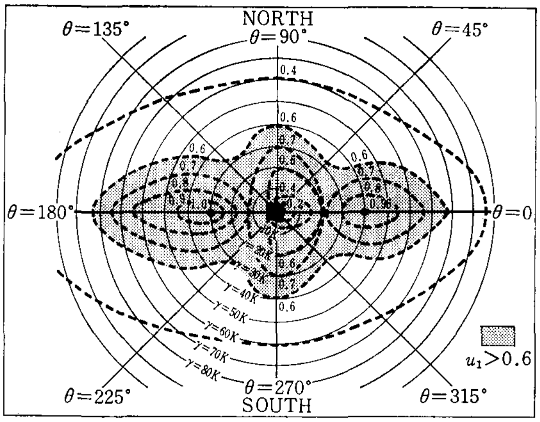

図 1　Iso-Utility Curve
（文献［1］ p. 771より）

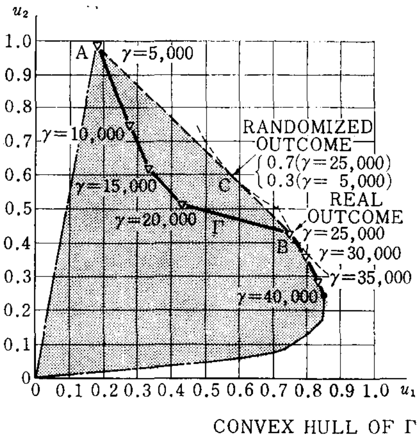

図 2　実現可能な利得集合
（文献［1］ p. 774より）

値0，もっとも好ましい情報を得られるとき効用値1を与える．つぎにこれらが五分五分の確率で起こるのと同等に好ましい軌道を効用値0.5としこうして効用関数を構成する．相手が科学者であったため，このような方法は実際にうまく行なえたという．

四つのチームのうち，目標平面の $\theta=0$ の部分以外を通過したのでは有用な情報を得ることができないものがあったため，とくに $\theta=0$ の場合についてくわしく調べられた(**表 1**)．これらを $u_i(r)$ とする．

Nash 解を求めるには，$\theta=0$ 上の代替案についてのみその積を計算すればよい．タイタンからの距離 r を5千km ごとに5万km まで，$r_1, \cdots, r_{10}$ という軌道をとって考える．$u_i(a)=0$，$i=1, \cdots,$ 4であることより(1)は，

$$\max \prod_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=1}^{10} \alpha_j u_i(r_j)\right),$$

$$(2)\quad \text{subject to}$$

$$\sum_{j=1}^{10} \alpha_j = 1,\ \ \alpha_j \geqq 0,\ \ j=1, \cdots, 10,$$

となる．この解を求めることはそう困難ではないが $u_3 \cdot u_4$ の値がほぼ一定していることより，(2)で $i=1,2$ についての積によって求めている．このときチーム1，2の利得の対は平面上に図示することができる(**図 2**)．この上で積を最大とする点は，点C(0.58, 0.59)で，値は0.344である．この点は r_1 と r_5 をあらわす点をほぼ7対3に内分している．すなわち，C点に対応する結果，Nash 解は，軌道 r_1 を0.3，r_5 を0.7の確率で選ぶというものである．この解は二つの軌道をくじで選ぶというものであり，調整案としてそのまま提示することは困難である．調整案はくじを含まない形で提示されるべきであろう．そこで，純粋な結果の集合 $\{r_1, \cdots, r_{10}\}$ の上で Nash 積を最大とするものを調整解とすることが考えられた．このとき表1からわかるように r_5 が 0.288 ($u_1 \cdot u_2$ で

表 1

軌道	×1000km	u_1	u_2	u_3	u_4	$u_1 u_2$	$u_3 u_4$	$u_1 u_2 u_3 u_4$
r_1	5	.180	1.000	.905	.910	.180	.824	.148
r_2	10	.250	.750	.912	.930	.188	.848	.159
r_3	15	.340	.620	.941	.950	.211	.894	.188
r_4	20	.420	.500	.935	.970	.210	.907	.190
r_5	25	.750	.420	.929	.985	.315	.915	.288
r_6	30	.800	.340	.923	1.000	.272	.923	.251
r_7	35	.830	.280	.918	.990	.232	.909	.211
r_8	40	.860	.230	.914	.980	.198	.896	.177
r_9	45	.850	.180	.908	.970	.153	.881	.135
r_{10}	50	.830	.150	.903	.962	.125	.869	.108

（文献［1］，p. 773より）

は0.315)で積の最大値を与える．ここで得られた解r_5は，近似的Nash解として調整案に選ばれ，チームの代表の会合の討議で全体としての調整案を決定するための参考として用いられた．

参考文献

[1] J. Bonnardeaux, J-P. Dolait and J. S. Dyer: "The Use of Nash Bargaining Model in Trajectory Selection" *Management Science*, vol. 22, No. 7, pp. 766—777, 1976.

[2] J. Dyer and R. F. Miles, Jr.: "An Actual Application of Collective Choice Theory to the Selection of Trajectories of Mariner Jupiter/Saturn 1977 Project," *Operations Research*, vol, 24, No. 2, pp. 220—244, 1976.

[3] J. F. Nash: "The Bargaining Problem," *Econometrica*, vol. 18, pp. 155—162, 1950.

[4] R. D. Luce and H. Raiffa: *Games and Decisions*, Wiley, New York, 1957.

いしかわ・しん　1953年生
東京工業大学・大学院　システム科学専攻学生

「ORの実践とその有効活用」視察団参加のご案内

(社)日本オペレーションズ・リサーチ学会

先に（本誌1月号）ご案内の，第8回OR国際会議を中心として派遣される上記視察団の日程の一部が確定しましたのでお知らせいたします．ご参加の方は至急お申し込みください．

月　日	都　市　名		
6/15	バンクーバー	午　前	Environmental Impact Studies (B. C. Research Council)
		午　後	Planning Northeast B. C. Coal Development (B. C. Ministry of Economic Development)
6/16	〃	午　前	Planning Open Pit Mining Operations (Local Mining Firms)
		午　後	Visit to a Forest Products Mill (Mac Millan Bloede Corporation)
6/19〜6/23	トロント	第8回OR国際会議	
6/26		午　前	Strategic Planning Risks in Capital Programs (Dr. Hertz)
		午　後	Design of Purposeful Systems (Dr. Shakun)

第8回　IFORS 国際会議での SPC : Stop Press Colloquia への発表募集の件

上記のSPCセッションへの論文が下記のように募集されています．

目　的：ORにおける最新の考え，傾向，結果などの討議の場を提供する．

やりかた：1セッションで1篇10〜15分間，3，4人がつぎつぎに発表したあと，聞いていた人たちが各スピーカーのまわりにわかれて討議をする．10セッションが予定されている．各スピーカーはタテ 84cm×ヨコ118cm の図版4枚以下を準備すること．発表は英語またはフランス語．

応　募：題目，100語以内のアブストラクト，発表者名，連絡先を4月30日まで下記に直接送付．
Mr. G. Maarek
SEMA (Metra International)
16—18 Rue Barbes
92128 Montrouge Cedex France

注意：応募される方はその旨をOR学会事務所にご連絡ください．学会からの出席者の中に加えさせていただきますので……．