

D. J. A. Welsh 著

Matroid Theory

出版社：Academic Press, 1976

ページ数：433

線形独立・従属の概念を抽象化した概念であるマトロイド理論は、古典的な線形代数や射影幾何はもちろんのこと、近年研究が盛んになりつつあるグラフ理論や組合せ理論などとも密接な関係をもっている。最近、電気回路やオペレーションズ・リサーチなどの各種のシステム的な問題へのマトロイド理論の応用が多く試みられるようになって、一般の関心も徐々に高まりつつあるように思われる。

従来、マトロイドを取り扱った成書はほとんどなく、マトロイド全般にわたっての本格的な成書としては本書がはじめてのものであろう。とくに本書はマトロイドに関する数多くの話題がちりばめられているという点で、初心者が入門書として利用するのももちろんのこと、専門家が辞書的に用いるのにも適しているように思われる。また、文献表が比較的良好に整備されていることは読者にとってありがたいことである。

以下章を追って内容を簡単に紹介してみよう。

第1章 基本的な概念と例

マトロイドの代表的な公理系として独立集合公理系、基公理系、階数公理系、閉包公理系、サーキット公理系をあげ、それらに関連した基本的な概念と相互の関係について論じている。ベクトル空間、射影幾何、グラフ等の具体的例を示しながら説明している。

第2章 双対性

マトロイド理論におけるもっとも基本的な概念の一つである双対性について基と階数に関連して論じてある。また射影幾何の超平面对応する概念の性質を調べて、超平面公理系を出し、 n -分割に関連したマトロイドやグラフのカットセットのなすマトロイドの例が示される。

第3章 束論とマトロイド

簡単に束論の紹介をした後、マトロイドの閉集合の族がなす束(幾何的束とよばれる)の性質を調べ、「幾何的束は相対相補セミモジュラー束である」という特徴づけを行なっている。それとあわせて自己閉路や、並列列のないマトロイドが幾何的束と1対1の対応をすることも

示される。

第4章 部分マトロイド

マトロイドの基本的な変換として“打切”、“制限”、“縮約”、“マイナー”等の定義とそれらの性質を論じている。

第5章 マトロイドの連結性

マトロイドの2元 x , y が同一のサーキットに含まれるとき x と y は連結であると定義することにより、連結性が同値関係となることを示し、マトロイドを連結性によって直和分解できることが示される。その拡張としてマトロイドの k -連結性が定義され、3-連結であるための必要十分条件が示される。

第6章 マトロイド、グラフと平面性

グラフ的なマトロイドのグラフとしての表現が一意であるためにはマトロイドが3-連結であることが必要十分であることが示される。グラフの同相性とマトロイドのマイナーの関係が調べられ、平面グラフの幾何的双対と、抽象的双対が定義され、グラフが平面グラフであるための Kuratowski の必要十分条件が紹介される。

第7章 横断理論

組合せ理論における中心的話題の一つである“代表者の系”に関する Hall の定理と、それにマトロイドの構造を組合せた独立横断に関する Rado の定理が紹介される。

第8章 被覆と埋蔵

劣モジュラー関数の性質を調べ、2部グラフから誘導されるマトロイドの例を示した後、マトロイドのもっとも基本的な変換であるいくつかのマトロイドの合併が定義される。最大共通独立集合や基による被覆と埋蔵に関連した問題が解けることが示される。

第9章 マトロイドのベクトル表現

体上のベクトル空間に表現可能なマトロイドの特徴づけは Whitney 以来の未解決な問題である。この問題に関連して表現不可能なマトロイドの例が示される一方、表現可能なマトロイドのマイナー、双対、合併等もやは

り表現可能であることが示される。またマトロイドが表現可能であるためのいくつかの必要条件が紹介される。

第10章 2値マトロイド

マトロイドが2値〔正則〕マトロイド(標数2〔任意〕の体上に表現可能なマトロイドのこと)であるための必要十分条件が与えられる。

第11章 体, 群からのマトロイド

代数的に表現可能なマトロイドについて論ぜられる。

第12章 実験計画

射影幾何やアフィン空間と実験計画やスタイナーシステムとの関連が示される。

第13章 Mengerの定理とグラフにおける連接

横断理論を一般化したところのグラフにおける Menger の定理に関連して定義されるマトロイド等のグラフから誘導されるマトロイドの例が示される。

第14章 横断マトロイドと関連した話題

横断マトロイドや直並列グラフがもつ性質を一般化したところの“基対付合マトロイド”について論ぜられる。

第15章 多項式, 彩色問題, コードと埋蔵

グラフの彩色多項式, 半順序集合の Möbius 関数, マトロイドの特性多項式, Tutte 多項式, Whitney の階数母関数等の性質が調べられ, マトロイドの“臨界指数”が有名な平面グラフの四色問題と関係していることが示される。

第16章 限界の問題

基の数とかサーキットの数といったマトロイドを特徴づけるいくつかの数量に関する等式, 不等式, 教えあげ等を説明してある。

第17章 マトロイドや幾何的束の写像

マトロイドからマトロイドへの写像で, 零元や上限を保存するものの性質が調べられ, 写像による因子分解, 自己同型群などが定義される。

第18章 マトロイドに関連した凸多面体

マトロイドの階数関数の値域を非負実数にまで拡張した概念である“ポリマトロイド”の性質が調べられ, いくつかの公理系が示される。ポリマトロイドの独立ベクトルの集合(凸多面体となる)の端点集合が決定される。最後にマトロイドの定義域を半順序集合に一般化した概念である“超マトロイド”が紹介される。

第19章 組合せ論的最適化

マトロイドの重み最小の基を求める問題やある種の線形計画問題に対する“ガツガツ算法”が紹介される。

Shannon のスイッチング・ゲームに対する Lehman の解法やネットワーク・フロー問題にマトロイド的構造がいかに関係しているかが示される。

第20章 無限マトロイド

マトロイドの台集合を可算無限の場合に拡張した独立空間の理論を紹介し, 双対性, 横断理論がマトロイドと同様に議論できることが示される。

以上の各章の内容からわかるようにマトロイドの基礎からごく最近のトピックス的なものまで内容はきわめて豊富であって, 演習問題の中にはいくつかの未解決の問題もあり, 各章の終わりには歴史的な事実についての注釈もついているので, ぜひ一読をおすすめする。

(富澤信明)

書 評

Rabe von Randow

Introduction to the Theory of Matroids

Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 109

出版社: Springer-Verlag, 1975

ページ数: 102

本書の構成は, だいたいつぎのようになっている。

1. マトロイドの各種の定義と基本的性質
階数による定義, 独立集合による定義, サーキットによる定義, 基底による定義
2. その他の性質
スパン, 超平面とコサーキット, 双対マトロイド

3. 例
線形代数からの例, バイナリマトロイド, グラフ理論からの例, 組み合わせ理論からの例
4. グリーディアルゴリズム
5. 基底変換
要素対の変換, 小マトロイド, 集合対の変換