

信頼性の数学(2)

鳩山 由紀夫

2. システムの信頼度—その動的側面

前章では、時間を固定し静的な側面からシステムを眺め、その信頼度を計算した。すなわち、多数個のユニットから成るシステムにおいて、ある時点での各ユニットの信頼度 p を既知とし、システムの信頼度を求めることを主眼とした。しかし実際のシステムではユニットが故障している確率は時間とともに増加するのが通常である。ユニットはいつかは故障するという妥当な仮定のもとでは、時点 t でのユニットの故障確率 $F(t)$ は確率分布関数であらわされる。したがってユニットの信頼度 p の代わりに $1 - F(t) \equiv \bar{F}(t)$ を代入すれば、 $F(t)$ が既知のとき前章の議論はそのままあてはまり、時間とともに変化するシステムの信頼度を求めることができる。この章では設計の初期の段階など関数 $F(t)$ の形が完全に記述できない場合、 $F(t)$ に信頼性理論においては適当と思われる仮定を設け、それらの仮定間の関係と、仮定下での信頼度関数のバウンドの計算を試みる。

2.1 ユニットの寿命分布系と相互関係

ユニットの寿命を確率変数 T であらわす。その寿命分布を $F(x) = P(T \leq x)$ とかけば、時点 x における信頼度は $\bar{F}(x)$ である。ある時点 t における(条件付)信頼度関数は、

$$P\{T > t+x | T > t\} = \bar{F}(t+x) / \bar{F}(t)$$

となる。 t における(条件付)故障率 $r(t)$ は、

$$(14) \quad r(t) = \lim_{x \rightarrow 0} P\{t < T \leq t+x | T > t\} / x \\ = f(t) / \bar{F}(t)$$

ここで F の密度関数 f は存在するものとする。さらに最後の式の両辺を積分したものを累積故障率とよび $R(x)$ であらわす。すなわち、

$$(15) \quad R(x) = \int_0^x r(t) dt = -\log \bar{F}(x)$$

自動車などの製品を見てみると、はじめのうちは初期

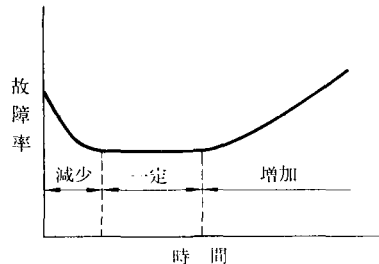


図 2.1 浴槽型の故障率曲線

故障で故障率が高く、時間とともに次第に減少し、つぎにしばらくの間はほぼ一定の故障率をもつ期間がつづき、最後は疲労や摩耗により故障率は増加していく、いわゆる浴槽曲線型を示すことが多い(図 2.1)。この曲線は数学的な解析が容易でない。また、製品を構成する部品の一つ一つは必ずしも浴槽曲線のような複雑な故障率をもっていない。そこで、以下のようなより単純な故障率のパターンを仮定して議論をする。自動車部品などの場合、それでもほぼさしつかえないことが[9]に示されている。

定義 1: $r(t)$ が増加(正確には非減少)関数のとき、分布関数 F は IFR (increasing failure rate) クラスに属するといひ、 $F \in \{\text{IFR}\}$ とかく。同様に $r(t)$ が減少関数のとき、 F は DFR (decreasing failure rate) クラスに属するといひ。

たとえば、 F が形状パラメータ β 、尺度パラメータ η のワイブル分布のとき、 $r(t) = (\beta/\eta^\beta) t^{\beta-1}$ となるから、 $\beta = 1$ のとき、すなわち指数分布のとき $r(t)$ は一定で、 $\beta > 1$ のとき $F \in \{\text{IFR}\}$ で、 $0 < \beta < 1$ のとき $F \in \{\text{DFR}\}$ (図 2.2)。

IFR クラスのもつ信頼性に有用な性質は、畳み込みのオペレーションに関して閉じていることである。すなわち、2つのユニットの寿命を T_1, T_2 とあらわすとき、 T_1, T_2 の分布が IFR クラスに属するならば和の寿命 $T_1 + T_2$ の分布も IFR クラスに属する[1]。この性質は

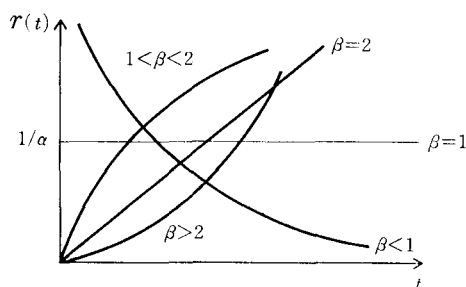


図 2.2 ワイブル分布の故障率

n 個のユニットの場合に拡張できるから、たとえば n 個のユニットが IFR なる性質をもつとき、1つのユニットが動作し、故障と同時に新しいユニットに取り替えられるスタンバイシステムの寿命分布は IFR クラスに属することがわかる。したがって IFR クラスに特有の信頼度関数のパウンドが求められるならば、スタンバイシステムの信頼度関数のパウンドが容易に得られる。パウンドの計算は次節にゆずる。

初期故障が見られないユニットは、故障率が増加していくと考えられるので、IFR は信頼性の中で重要な分布のクラスであるが、独立な IFR のユニットから成るコヒーレントなシステムの寿命分布はかならずしも IFR に属するとはかぎらない。一般のシステムの信頼度を計算しようとする場合、この性質はありがたくない。そこで IFR のユニットから成るコヒーレントなシステムの寿命分布が属する最小のクラスを求めることに意義を見いだす。つぎの定義を導入しよう。

定義 2: 分布関数 F はもし $-(1/t)\log \bar{F}(t)$ が $t \geq 0$ で増加関数であるとき、IFRA (increasing failure rate average) クラスに属するといひ、 $F \in \{\text{IFRA}\}$ とかく。同様に、 F は $-(1/t)\log \bar{F}(t)$ が $t \geq 0$ で減少関数のとき DFRA (decreasing failure rate average) クラスに属するという。

$F \in \{\text{IFR}\}$ ならば(15)から $-\log \bar{F}(t)$ は原点を通る凸関数で、 $-(1/t)\log \bar{F}(t)$ は増加関数となる。ゆえに $\{\text{IFR}\} \subset \{\text{IFRA}\}$ 。IFRA は $[0, t]$ 間の故障率の平均が増加していくクラスで、かならずしも故障率自体が時間とともに増加していくとはかぎらないが、IFR よりも広い、適当な概念であることがつぎのことからもわかる。すなわち IFR のユニットから成るコヒーレントなシステムの寿命分布は IFRA に属する。ここではさらに、IFRA のユニットから成るシステムの寿命分布が IFRA に属することを証明しよう。この定理はシステムの信頼度のパウンドの計算に大変有効である。

定理 3: 独立なユニットから成るコヒーレントなシステムにおいて、もし各ユニットの寿命分布が IFRA クラ

スに属するならば、システムの寿命分布も IFRA クラスに属する。

この定理の証明に必要な 3 つの補題から説明する。

補題 1: $F \in \{\text{IFRA}\} \Leftrightarrow \bar{F}(\alpha t) \geq \bar{F}^\alpha(t)$ $0 \leq \alpha \leq 1$, $t \geq 0$

証明: $F \in \{\text{IFRA}\}$ ならば任意の $0 \leq s \leq t$ に関して、

$$-(1/s) \log \bar{F}(s) \leq -(1/t) \log \bar{F}(t)$$

したがって、

$$-(1/\alpha t) \log \bar{F}(\alpha t) \leq -(1/t) \log \bar{F}(t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\therefore \bar{F}(\alpha t) \geq \bar{F}^\alpha(t)$$

逆も同様にいえる。

(証明終わり)

補題 2: $0 \leq \alpha, \lambda \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ ならば、

$$(16) \quad \lambda^\alpha x^\alpha + (1-\lambda)^\alpha y^\alpha \geq (\lambda x + (1-\lambda)y)^\alpha$$

証明: $f(x) = x^\alpha$ は $x \geq 0$ で $0 \leq \alpha \leq 1$ のとき凹で、したがって $f(u_1 + \delta) - f(u_1) \geq f(u_2 + \delta) - f(u_2)$, $u_1 \leq u_2$

$$\delta = \lambda(x-y), \quad u_1 = \lambda y, \quad u_2 = y \text{ とおけば与式が求まる。}$$

(証明終わり)

補題 3: $h(p)$ を独立なユニットから成るコヒーレントシステムの信頼度関数とすると、

$$(17) \quad h(p^\alpha) \geq h^\alpha(p), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

ここで $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p^\alpha = (p_1^\alpha, p_2^\alpha, \dots, p_n^\alpha)$

証明: 帰納法を用いる。 $n=1$ のとき、 $h(p)$ は 0 か 1 のいずれかであり、いずれの場合にも(17)は成り立つ。

$n-1$ ユニットのときに(17)が成り立つと仮定する。

$$h(1_n, p^\alpha) = h(p_1^\alpha, \dots, p_{n-1}^\alpha, 1)$$

$$h(0_n, p^\alpha) = h(p_1^\alpha, \dots, p_{n-1}^\alpha, 0)$$

と定義すれば、

$$\begin{aligned} h(p^\alpha) &= p_n^\alpha h(1_n, p^\alpha) + (1-p_n^\alpha) h(0_n, p^\alpha) \\ &\geq p_n^\alpha h^\alpha(1_n, p) + (1-p_n^\alpha) h^\alpha(0_n, p) \quad (\text{仮定より}) \\ &\geq (p_n h(1_n, p) + (1-p_n) h(0_n, p))^\alpha \quad (\text{補題2より}) \\ &= h^\alpha(p) \end{aligned}$$

したがって n ユニットのときにも(17)は成り立ち、帰納法により補題は証明される。

(証明終わり)

定理 3 の証明: F_i ($i=1, \dots, n$) をユニット i の寿命分布、 F をシステムの寿命分布とすると、 $0 < \alpha \leq 1$ で、

$$\bar{F}(\alpha t) = h(\bar{F}_1(\alpha t), \bar{F}_2(\alpha t), \dots, \bar{F}_n(\alpha t))$$

ここで、 $F_i \in \{\text{IFRA}\}$ だから補題 1 より、

$$\bar{F}_i(\alpha t) \geq \bar{F}_i^\alpha(t), \quad i=1, 2, \dots, n$$

であり、システムはコヒーレントであるから、

$$\begin{aligned} \bar{F}(\alpha t) &\geq h(\bar{F}_1^\alpha(t), \bar{F}_2^\alpha(t), \dots, \bar{F}_n^\alpha(t)) \\ &\geq h^\alpha(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)) \quad (\text{補題3より}) \\ &= \bar{F}^\alpha(t) \end{aligned}$$

したがって補題 1 より $F \in \{\text{IFRA}\}$ (証明終わり)

システムの信頼度関数を計算したい場合、各ユニットの寿命分布が IFRA クラスに属することさえわかれば、システム自身の寿命分布も IFRA クラスに属するので

あるから、もし IFRA に特有な信頼度関数のバウンドが得られるならば、それが直接システムの信頼度のバウンドに適用できるから大変に便利である。

IFRAクラスに関しても近年畳み込みに関して閉じていることが証明されている[7]。

つぎに信頼性よりもむしろ再生理論を用いた取り替え問題などの保全性によく使われる寿命分布のクラスを紹介しよう。

定義 3 : 確率分布 F は任意の $x \geq 0, y \geq 0$ に関して、

$$(18) \quad F(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$$

が成り立つとき、NBU (new better than used) であるという。

(18) の不等号が逆向きのとき、 F は NWU (new worse than used) であるという。

言葉に示されるように、NBU とは条件付きの信頼度の意味において、新しいユニットが古いユニットよりもすぐれていることである。

定義 4 : 平均 μ が有限値をとる確率分布 F は、任意の $t \geq 0$ に関して、

$$(19) \quad \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \mu \bar{F}(t)$$

が成り立つとき NBUE (new better than used in expectation) であるという。(19) の不等号が逆向きのとき、 F は NWUE (new worse than used in expectation) であるという。

$\int_t^\infty (\bar{F}(x)/\bar{F}(t)) dx$ は t だけ年を経たユニットの平均余命であるから、NBUE とは新しいユニットの平均寿命 μ は古いユニットの平均余命よりも常に長いことを意味する。

以上寿命分布のクラスを 8 つ掲げたが、これらの間にはつぎの関係がある。直観的にも明らかであろう。

$$\{\text{IFR}\} \subset \{\text{IFRA}\} \subset \{\text{NBU}\} \subset \{\text{NBUE}\}$$

$$\{\text{DFR}\} \subset \{\text{DFRA}\} \subset \{\text{NWU}\} \subset \{\text{NWUE}\}$$

IFR と IFRA クラスに関してはすでに述べたが、上記 8 つの各クラスに関して、コヒーレントなシステムの形成と、畳み込みという 2 つの信頼性システムに重要なオペレーションについてクラスが閉じているか否かを表 2.1 に示した。

あるオペレーションに関してあるクラスに保存則が成り立つとき、相対するクラスにも保存則が成り立つとはかならずしもかぎらないことがわかる。

2.2 信頼度関数のバウンドの計算

前章ではシステムの信頼度を計算するのに、ユニット間の独立性や関連性を仮定して、簡単に求められる信頼度の上下限を得た。これと同様に、今度はユニットの故障率が時間とともに変動する場合にユニットあるいはシ

表 2.1 信頼性のオペレーションに関する寿命分布の保存性

寿命分布のクラス	信頼性のオペレーション					
	コヒーレントシステムの形成			畳み込み		
IFR	非	保	存	保	存	
IFRA	保		存	保	存	
DFR	非	保	存	非	保	存
DFRA	非	保	存	非	保	存
NBU	保		存	保	存	
NBUE	非	保	存	保	存	
NWU	非	保	存	非	保	存
NWUE	非	保	存	非	保	存

ステムの信頼度関数を計算するのに、ユニットの寿命分布に IFR, IFRA などの仮定を設けて、信頼度関数のバウンドを求めることを試みよう。

ここで、寿命分布の平均値 μ か p -分位など 1 つのパラメータの値が既知であるとする。アприオリな情報としてユニットの故障率は劣化によって徐々に高くなるものであって、平均寿命は μ であるくらいしかわかっていない段階でシステムの大体の信頼度を調べたい場合などに、このバウンドは有効であろう。

定理 4 : (IFR の下限) 確率分布 F が平均 μ なる IFR クラスに属するとき、

$$(20) \quad F(t) \geq \begin{cases} e^{-t/\mu} & t < \mu \\ 0 & t \geq \mu \end{cases}$$

証明：寿命 X の分布 F が IFR に属するとき、 $-\log F(t)$ は凸関数で、したがって、

$$(21) \quad E[-\log F(X)] \geq -\log F(EX) = -\log F(\mu)$$

このとき、 $F(X)$ は $[0, 1]$ の一様分布であるから、(21) は、

$$F(\mu) \geq e^{-1}$$

ゆえに、

$$(22) \quad F(\mu)^{t/\mu} \geq e^{-t/\mu}$$

ところが、 $\{\text{IFR}\} \subset \{\text{IFRA}\}$ より、 $(F(s))^{1/s}$ が減少関数であるから、 $\mu > t$ のとき、

$$(23) \quad [F(\mu)^{1/\mu}]^t \leq [F(t)^{1/t}]^t = F(t)$$

(22) と (23) から (20) が得られる。(証明終わり)

たとえば、 n 個のユニットの寿命分布が $F_1, \dots, F_n$ で、それぞれ IFR クラスに属し、平均が $\mu_1, \dots, \mu_n$ であるとすれば、

(i) 直列システムの場合

$$F(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t)$$

だから、 $t < \min \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ のとき、

$$F(t) \geq \exp(-t \sum_{i=1}^n (1/\mu_i))$$

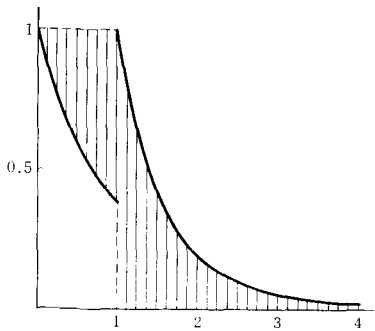


図 2.3 IFR のバウンド ($\mu=1$ のとき)

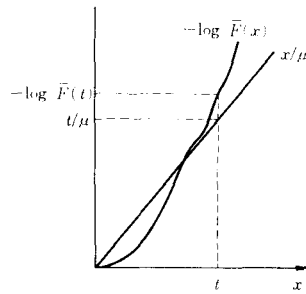


図 2.4 $F \in \{\text{IFRA}\}$ のときの $-\log F(x)$ 曲線と半直線

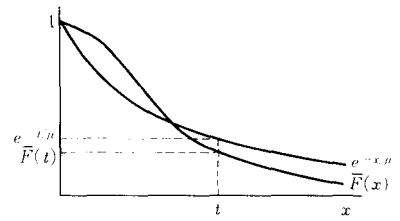


図 2.5 $F \in \{\text{IFRA}\}$ のときの $\bar{F}(x)$ と $e^{-x/\mu}$ の関係

(ii) 並列システムの場合

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t))$$

だから,

$$\bar{F}(t) \geq 1 - \prod_{i \in A} (1 - e^{-t/\mu_i}) \quad A = \{1 \leq i \leq n \mid t < \mu_i\},$$

$$A \neq \phi$$

(iii) 一般の独立なユニットから成るコヒーレントなシステムの場合, h をシステム ϕ の信頼度関数とすれば, $0 < t < \min(\mu_1, \dots, \mu_n)$ で信頼度関数の下限は,

$$(24) \quad h(F_1(t), \dots, F_n(t)) \geq h(e^{-t/\mu_1}, \dots, e^{-t/\mu_n})$$

で与えられる. 独立性を関連性でおきかえた場合, その下限は緩まざるを得ないが, 前章の関連性の性質を利用して, 同じ t の範囲内で,

$$(25) \quad \bar{F}(t) = P[\phi(X_1(t), \dots, X_n(t)) = 1] \\ \geq \prod_{i=1}^n P[X_i(t) = 1] \geq \exp\left[-t \sum_{i=1}^n (1/\mu_i)\right]$$

を得る.

定理 5 : (IFR の上限) 確率分布 F が平均 μ なる IFR クラスに属するとき,

$$(26) \quad \bar{F}(t) \leq \begin{cases} e^{-w_t t} & t > \mu \\ 1 & t \leq \mu \end{cases}$$

ここで w_t は t の関数で次式を満たす.

$$(27) \quad 1 - \mu w_t = e^{-w_t t} \quad w_t > 0$$

この上限は IFRA クラスと同一であるので, 証明は後にゆずる. 定理 4 とを用いて k -out-of- n システムやスタンバイシステムなど寿命分布が IFR に属しているシステムの信頼度関数のバウンドを求めることができる. $\mu=1$ のときの IFR クラスの分布のバウンドを図 2.3 に示す.

つぎに IFRA の場合に移ろう.

定理 6 : (IFRA の下限) 確率分布 F が平均 μ なる IFRA クラスに属するとき,

$$(28) \quad \bar{F}(t) \geq \begin{cases} e^{-b_t t} & t < \mu \\ 0 & t \geq \mu \end{cases}$$

ここで b_t は t の関数で次式を満たす.

$$(29) \quad b_t(\mu - t) = e^{-b_t t}$$

証明: $F \in \{\text{IFRA}\}$ ならば, 原点 $x=0$ と $-\log \bar{F}(x)$ を結ぶ線分と x 軸とのなす角度は増加していく. したがって, $-\log \bar{F}(x)$ なる曲線は x/μ ($\mu > 0$) なる直線と $x > 0$ でたかだか一度しか交差せず, 交差するならば下方からである. ゆえに $\bar{F}(x)$ は $e^{-x/\mu}$ ($\mu > 0$) と $x > 0$ でたかだか一度交差し, 交差するときは上方からである (図 2.4, 2.5).

上記の性質を用いる. すなわち, $t < \mu$ を固定し, $\bar{F}(t) < e^{-b_t t}$ を仮定すると, $x \geq t$ で両辺の曲線は交わり得ないから $\bar{F}(x) < e^{-b_t x}$ ($x \geq t$) でなければならない.

ところが,

$$\mu = \int_0^t \bar{F}(x) dx + \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \\ < t + \int_t^\infty e^{-b_t x} dx = t + e^{-b_t t}/b_t = \mu$$

となり矛盾を生じる. したがって (28) は成り立つ. (証明終わり)

$b_t > 1/\mu$ であるから IFRA の下限は IFR の下限よりも低くなっている.

定理 7 : (IFRA の上限) 確率分布 F が平均 μ なる IFRA クラスに属するとき,

$$(30) \quad \bar{F}(t) \leq \begin{cases} e^{-w_t t} & t > \mu \\ 1 & t \leq \mu \end{cases}$$

ここで w_t は t の関数で (27) を満たす.

証明: $t > \mu$ を固定し, G を次式で定義する.

$$G(x) = \begin{cases} e^{-w_t x} & x \leq t \\ 0 & x > t \end{cases}$$

w_t は (27) を満たすから $\int_0^t e^{-w_t x} dx = \mu$ を満たし, したがって G と F は同一の平均値 μ をもつ. 前定理の交叉の理論を再び適用して, $\bar{F}$ は G と $(0, t)$ でたかだか一度交叉し, 交叉するならば上方からであることがわかる. 平均が同一であるから交叉しないときには $\bar{F} = G$. いずれの場合でも $F(t) \leq G(t) = e^{-w_t t}$ となる. (証明終わり)

コヒーレントなシステムの寿命分布はその構成するユ

ユニットが IFRA ならば IFRA であるから、システム設計の初期の段階においておおよそのシステムの信頼度関数の形を知りたい場合に定理 6 および 7 を用いればよい。その場合、システムの平均寿命が必要となるが、平均寿命が既知でないときでもある p -分位が既知ならば、つぎのバウンドが得られる。

定理 8 : (p -分位による IFRA のバウンド) $F \in \{\text{IFRA}\}$ で、かつ $F(\xi_p) = p$ であるならば、

$$(31) \quad F(t) \begin{cases} \geq e^{-\alpha t} & 0 \leq t \leq \xi_p \\ \leq e^{-\alpha t} & t \geq \xi_p \end{cases}$$

ここで、 $\alpha = -(1/\xi_p) \log(1-p)$

証明： $e^{-\alpha t} = (1-p)^{t/\xi_p} = [F(\xi_p)]^{t/\xi_p} = [\bar{F}(\xi_p)]^{1/\xi_p}$
 $F \in \{\text{IFRA}\}$ のとき $(\bar{F}(s))^{1/s}$ は s の減少関数であることを利用して (31) を得る。 (証明終わり)

2.3 ショックモデルの信頼度

いままではユニットに故障の確率を与え、その確率が特殊な構造をもつときのユニットやそれらから構成されるシステムの信頼度関数のバウンドを求めた。これに対して、ユニットに疲労、劣化量が累積して、ある一定量に達すると寿命が尽きるとする考え方がある。これを多少一般化したショックモデルを取り上げてみよう。

ユニットは一連のショックを受けるとする。継続するショックの間隔は F という確率分布にしたがい、ユニットが最初の k 個のショックに耐える確率を $\bar{P}_k$ とする。ここで、

$$(32) \quad 1 = \bar{P}_0 \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_2 \geq \dots$$

は成り立つと仮定しても一般性を失わないであろう。このとき、ユニットの信頼度関数 $\bar{H}(t)$ は、

$$(33) \quad H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k [F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)]$$

で与えられる。ここで $F^{(k)}$ は F の k 回の畳み込みである。とくにショックの発生がポアソン分布をなすときには、

$$(34) \quad H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

とかける。ここではショックの発生がポアソン分布にしたがう場合のみをあつかうが、同様の結果が、より一般的なショックモデルに関しても論じられている ([8] 参照)。

ユニットの信頼度関数は $\bar{P}_k$ の値を正確に知り得るならば (34) によって計算できるが、実際には k 回目のショックで故障する確率など正確に知り難い場合が多い。かかるとき、 $\bar{P}_k$ の性質から信頼度関数 $\bar{H}(t)$ の性質を調べるといふ、より定性的な議論も意味をもつと思われる。 $H(t)$ が IFR/IFRA クラスに属するための十分条件をつ

ぎに示す。証明は新しい概念の導入を必要とするので省略する。

定理 9 : $\bar{P}_k$ ($k=0, 1, \dots$) は (32) を満たすとする。

- (i) $\bar{P}_{k+1}/\bar{P}_k$ が k に関して減少関数のとき、
 $H(t) \in \{\text{IFR}\}$
- (ii) $\bar{P}_k^{1/k}$ が k に関して減少関数のとき、
 $H(t) \in \{\text{IFRA}\}$

もしユニットの平均寿命 $\mu = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k$ が経験的に求まらば、この定理を利用してユニットの信頼度関数のバウンドを前節の諸定理から求めることができる。

IFR, IFRA を含む概念として NBU, NBUE が考えられることは前に示したが、このショックモデルにおいて、 $\bar{P}_k$ により弱い仮定を入れてユニットの信頼度関数を NBU あるいは NBUE にすることができる。

定理 10 :

- (i) $\bar{P}_{k+l} \leq \bar{P}_k \bar{P}_l$ ($k, l=0, 1, \dots$) ならば
 $H(t) \in \{\text{NBU}\}$
- (ii) $\bar{P}_k \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j \geq \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j$ ($k=0, 1, \dots$) ならば
 $H(t) \in \{\text{NBUE}\}$

証明：

$$\begin{aligned} (i) \quad \bar{H}(x) \bar{H}(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{P}_k \bar{P}_l e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \frac{(\lambda y)^l}{l!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \bar{P}_k \bar{P}_{j-k} e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \frac{(\lambda y)^{j-k}}{(j-k)!} \\ &\geq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{P}_j}{j!} e^{-\lambda(x+y)} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (\lambda x)^k (\lambda y)^{j-k} \\ &= \bar{H}(x+y) \\ (ii) \quad \bar{H}(t) \mu - \int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx \\ &= H(t) \int_0^{\infty} H(x) dx - \int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j \frac{1}{\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^k \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \geq 0 \quad (\text{証明終わり}) \end{aligned}$$

NBU クラスさらに NBUE クラスとなると相当に寿命分布の範囲は広がる。したがって、ただ寿命分布がそれらのクラスに属するとわかっているだけでは、信頼度関数のよいバウンドを得ることは期待できない。しかしながら、表 2.1 に示されるように、NBU クラスはコヒーレントなシステムの形成に関して閉じているから、複雑なシステムを NBU クラスに属するユニットから構成する場合に、NBU に属するという事実からそのシステムの信頼度の粗い予測を立てることも無意味ではな

いであろう。

定理 11: $F \in \{\text{NBU}\}$ がある t で $F(t) = \alpha$ を満たすとき,

$$(35) \quad F(x) \begin{cases} \geq \alpha^{1/k} & t/k+1 < x \leq t/k, \quad k=1, 2, \dots \\ \leq \alpha^k & kt \leq x < (k+1)t, \quad k=0, 1, \dots \end{cases}$$

証明: $F \in \{\text{NBU}\}$ ならば定義より,

$$F\left(\frac{k}{t}\right)^k \geq F(t) \quad k=1, 2, \dots$$

したがって,

$$F\left(\frac{k}{t}\right) \geq F(t)^{1/k} = \alpha^{1/k}$$

ゆえに,

$$\bar{F}(x) \geq \alpha^{1/k} \quad t/k+1 < x \leq t/k, \quad k=1, 2, \dots$$

同様に,

$$\bar{F}(kt) \leq \bar{F}(t)^k = \alpha^k \quad k=0, 1, 2, \dots$$

だから,

$$\bar{F}(x) \leq \alpha^k \quad kt \leq x < (k+1)t, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(証明終わり)

定理 12: $F \in \{\text{NBUE}\}$ の平均を μ とすれば, $t \leq \mu$ で,

$$(36) \quad F(t) \leq t/\mu$$

証明: $\mu F(t) = \mu(1 - \bar{F}(t))$

$$\leq \mu - \int_t^\infty F(x) dx = \int_0^t F(x) dx \leq \int_0^t dx = t$$

(証明終わり)

以上, 信頼性に重要と思われる寿命分布のタイプをいくつか掲げ, 信頼度関数のバウンドを求めた. ユニットの信頼度に関する情報量が少ない段階でシステム全体の信頼度関数の予測をする場合にこれらのバウンドは有用ではないかと考えられる.

参 考 文 献 (つづき)

- [7] Block, H.W. and T.H. Savits, "The IFRA Closure Problem," *The Annals of Probability*, **4**, 6 (1976), 1030-1032.
- [8] Gottlieb, G., "Failure Distributions of Shock Models," Technical Report No. 181, Department of Operations Research and Department of Statistics, Stanford University, 1976.
- [9] 塩見弘, 「故障解析と診断」, 日科技連, 1977.

× × ×