特集 ＩＡ法

ＩＡ法における振動と収束

森 口 繁 一

IA (incremental assignment) 法そのもの，その発展，多種流問題への適用などについては，本誌本号の他の記事に詳説されることになっているので，ここでは省略する．ここで問題にするのは，われわれのいうIA′法の第２段階 (Phase II) に出現する奇妙な振動現象である．

問題の設定

簡単な具体例に即して説明しよう．

図１のような鉄道網があり，この鉄道網によって２種類の物資がＡからＢ，Ｃへ運ばれるものとする．物資Ｍ(図では○) はＡからＢへ毎日20t，物資Ｎ(図では□)はＡからＣへ毎日20ｔ運ぶ必要がある．物資ＭをＡからＢへ運ぶには，ＡＰＢという経路をとってもよいし，ＡＱＢという経路をとってもよい．物資ＮをＡからＣへ運ぶにも，ＡＰＣとＡＱＣと２つの経路が可能である．共通な区間ＡＰおよびＡＱは，両物資を適当に積み込んでいっしょに運んでよいが，その合計が１日にそれぞれ20ｔを越えられないという意味の「容量制限」がある．他の区間は十分な線路容量があるので，簡単のため「制限なし」としておく．

輸送の費用は，図１に記入したように，各区間について 1,000円/t，2,000円/t，3,000円/t というように定まっている．

このとき，どういう輸送計画が費用を最小にするかというのが問題である．

たとえば，物資Ｍ，Ｎをそれぞれ10ｔずつにわけてＡＰとＡＱを通して運ぶことにすると，費用はつぎのようになる：

物資	経路	費用
M	ＡＰ	10ｔ×1,000円/t＝10,000円
M	ＰＢ	10ｔ×1,000円/t＝10,000円
M	ＡＱ	10ｔ×2,000円/t＝20,000円
M	ＱＢ	10ｔ×2,000円/t＝20,000円
N	ＡＰ	10ｔ×1,000円/t＝10,000円
N	ＰＣ	10ｔ×1,000円/t＝10,000円
N	ＡＱ	10ｔ×2,000円/t＝20,000円
N	ＱＣ	10ｔ×3,000円/t＝30,000円
	計	130,000円

つまり，総額13万円となる．これをもっと減らすにはどうすればよいかというのが問題である．

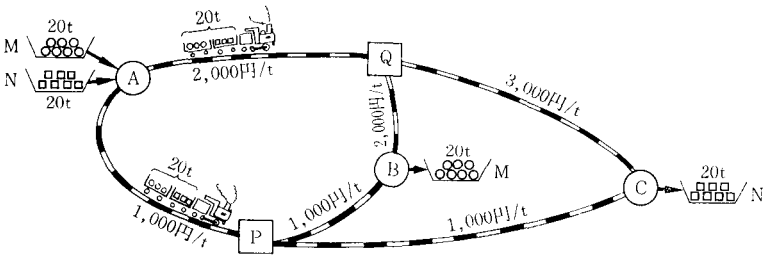

図 1

線形計画法

こういう問題は，いうまでもなく線形計画法の領分のなかにある．いま各物資の，各経路を

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

通しての輸送量をつぎのようにあらわすこととしよう：

物資	経路	輸送量
M	APB	x_1
M	AQB	x_2
N	APC	y_1
N	AQC	y_2

そうすると，輸送需要の条件は，

$$x_1+x_2=20\,\mathrm{t}, \tag{1}$$

$$y_1+y_2=20\,\mathrm{t}, \tag{2}$$

そして線区 AP，AQ の容量制限の条件は，

$$x_1+y_1\leqq 20\,\mathrm{t}, \tag{3}$$

$$x_2+y_2\leqq 20\,\mathrm{t}, \tag{4}$$

である．総費用は，

$$f=2x_1+4x_2+2y_1+5y_2 \quad (\text{単位 } 1{,}000\text{円}) \tag{5}$$

となる．非負の条件：

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ y_1\geqq 0,\ y_2\geqq 0 \tag{6}$$

は自明である．

問題は，条件(1)，(2)，(3)，(4)および(6)のもとで(5)を最小にすることである．条件の式も，「目的関数」(5)も1次式だから，これは線形計画問題である．

線形計画問題としては，これはきわめてやさしく解ける．まず第1に，(1)と(2)を足すと，

$$x_1+x_2+y_1+y_2=40\,\mathrm{t},$$

となるので，(3)，(4)はどちらも等号で成り立たねばならない．したがって，たとえばx_1を単にxとかくならば，輸送量の単位tを省くとして，

$$x_1=x,\ x_2=20-x,$$

$$y_1=20-x,\ y_2=x$$

となり，これらを(5)に代入すると，

$$f=120+x \qquad (\text{単位 } 1{,}000\text{円})$$

が得られる．これでみると，xは小さいほど総輸送費fが小さくてすむ．しかし，もちろんxは負にはなりえないから，$x=0$が最適である．

結局，最適解は，

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1=0, & x_2=20, \\ y_1=20, & y_2=0 \end{array}}$$

でそのときの総費用が12万円ということになる．

単純なＩＡ法

そのときそのときの最適な経路に，チョビチョビ割りつけながら積みあげてゆくだけの，単純なＩＡ法は上の問題にどんな解を与えるだろうか．

はじめのうちは，物資Mについても物資Nについても，線区ＡＰを経由するほうが線区ＡＱを経由するよりも安くつくことが明らかであるから，ＡＰが容量いっぱいになるまでは，どちらもＡＰ経由に割りつけられる．ランダムに割りつけるなら，小きざみにやるかぎり，Mをほぼ10ｔ，Nをほぼ10ｔ，合わせてちょうど20ｔＡＰ経由で送ることになったとき，その過程が終わる．それからあとは，どちらもＡＱを経由するしかないから，結局それぞれの残りをＡＱ経由で送ることになっておしまい．こうして得られる計画は，最初に「問題の設定」のところで考えた，

$$x_1=10,\ x_2=10,\ y_1=10,\ y_2=10 \quad (\mathrm{t})$$

で$f=13$万円という解に近いはずである．

このように，単純なＩＡ法では最適解は得られないのである．

チョビチョビ修正するIA′法

単純なＩＡ法の解は，上の問題では最適解と一致しない．そこで，われわれのいうＩＡ′法でこれを修正することを考えてみよう．

それには，各経路による輸送量を一斉に，たとえば0.9倍に減らして，それで運び足らない物資をそのときの状態で最適な経路に割り当てて輸送する．これを何度も繰り返して修正していこうというのである．

これでも，しかし，解は最適解にむかって近づいてはくれない．さきほどの13万円の解の付近を揺れ動くだけである．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

容量制限の弾力化

そこで登場してきたのが，容量制限の弾力化という考え方である．たとえば，線区ＡＰの容量制限の条件 (3) を，硬直した条件とは見ないで，この制限を多少は越えてもよいことにする．

一般に，ある線区の輸送量を s，容量を c としたとき，容量制限の条件，

$$s \leqq c \tag{7}$$

を緩和して，$s>c$ となってもよいことにするが，その代わり輸送の単価が，

$$e^{p(s-c)} \tag{8}$$

だけよけいにかかることにするのである．ここに p は，はじめ適当な価にとって最適化をはかり，のちに次第に大きくしていこうとするパラメタである．p が大きくなると，(8)は，$s>c$ のときはきわめて大きい値になり，$s<c$ のときはほとんど0になる(s が c にごく近いときだけ普通の値になる)．結果として(7)が満たされることになる．

このように弾力化したうえでＩＡ′ 法を考えてみる．ＩＡ′ 法の第一段階は，だいたいさきほどと同じで，

$$x_1=10\,\mathrm{t},\ x_2=10\,\mathrm{t},\ y_1=10\,\mathrm{t},\ y_2=10\,\mathrm{t} \tag{9}$$

に近いところで終わるであろう．第二段階は，ある輸送計画 x_1, x_2, y_1, y_2 から，まずそれらを一斉に $(1-\varepsilon)$ 倍して，$(1-\varepsilon)x_1$, $(1-\varepsilon)x_2$, $(1-\varepsilon)y_1$, $(1-\varepsilon)y_2$ とし，つぎに物資M，Ｎの輸送不足分をそれぞれ最適の経路に流し込む．物資Mについていうと，経路ＡＰＢの単価 $2+e^{p(s_1-c_1)}$ と経路ＡＱＢの単価 $4+e^{p(s_2-c_2)}$ とのうち，安いほうの経路に流し込むのである．ここに，

$$s_1=x_1+y_1,\quad s_2=x_2+y_2 \tag{10}$$

$$c_1=c_2=20\,\mathrm{t} \tag{11}$$

である．物資Mも物資Ｎも，輸送総量は20 t なので，これを c であらわすと，物資Mについて，修正された輸送計画は，

$2+e^{p(s_1-c_1)} \leqq 4+e^{p(s_2-c_2)}$ ならば，

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (1-\varepsilon)\,x_1+\varepsilon c \\ x_2' &= (1-\varepsilon)\,x_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$2+e^{p(s_1-c_1)} > 4+e^{p(s_2-c_2)}$ ならば，

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (1-\varepsilon)\,x_1 \\ x_2' &= (1-\varepsilon)\,x_2+\varepsilon c \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

となる．同様に物資Ｎについては，

$2+e^{p(s_1-c_1)} \leqq 5+e^{p(s_2-c_2)}$ ならば，

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= (1-\varepsilon)\,y_1+\varepsilon c \\ y_2' &= (1-\varepsilon)\,y_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$2+e^{p(s_1-c_1)} > 5+e^{p(s_2-c_2)}$ ならば，

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= (1-\varepsilon)\,y_1 \\ y_2' &= (1-\varepsilon)\,y_2+\varepsilon c \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

となる．

ところで，修正前に $x_1+x_2=c$ と $y_1+y_2=c$ が厳密に成り立っているならば，修正後も $x_1'+x_2'=c$, $y_1'+y_2'=c$ が厳密に成り立つので，x_1 と x_2, y_1 と y_2 は，それぞれ一方だけを考えればすむ．そこで，線形計画法の最適解で0となるほうをとり今後は x_1 を x, y_2 を y とかくことにする．すなわち，

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x, & x_2&=c-x \\ y_1&=c-y, & y_2&=y \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

とかく，そうすると，

$$s_1=x_1+y_1=x+c-y$$

$$s_2=x_2+y_2=c-x+y$$

となるが，われわれの問題では，たまたま $c_1=c_2=c$ なので，

$$e^{p(s_1-c_1)}=e^{p(x-y)}$$

$$e^{p(s_2-c_2)}=e^{p(y-x)}$$

とかきかえることができる．それで，(12)，(13)はつぎのようにかきかえられる：

$$\left.\begin{aligned} &2+e^{p(x-y)} \leqq 4+e^{p(y-x)} \quad \text{ならば,} \\ &\quad x'=(1-\varepsilon)\,x+\varepsilon c \\ &2+e^{p(x-y)} > 4+e^{p(y-x)} \quad \text{ならば,} \\ &\quad x'=(1-\varepsilon)\,x \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

また(14)，(15)は，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$\left.\begin{array}{l} 2+e^{p(x-y)} \leqq 5+e^{p(y-x)} \quad \text{ならば,} \\ \quad y'=(1-\varepsilon)\,y \\ 2+e^{p(x-y)} > 5+e^{p(y-x)} \quad \text{ならば,} \\ \quad y'=(1-\varepsilon)\,y+\varepsilon c \end{array}\right\} \quad (18)$$

となる.

数値例 (1)

まず, $p=1\mathrm{t}^{-1}$, $\varepsilon=0.01$として, $x=10\mathrm{t}, y=10\mathrm{t}$から出発して(17), (18)で計算を進めてみよう. はじめの25段は**表1**, **図2**のようになる.

はじめの5段は, (17)も(18)も上のほうの条件が成立して, xが増し, yが減るのであるが, $k=5$にいたって$2+e^{p(x-y)}$が$4+e^{p(y-x)}$を上まわり, 物資Mは経路AQBに流し込まれて, xも減りはじめる. それからしばらくはxも減りyも減る. ところが$k=16$にいたって, $2+e^{p(x-y)}<4+e^{p(y-x)}$が成立するので$x$が増すことになる. そのあとまたかなり長い間$x$, yがともに減る状態がつづく様子が見られる.

この場合, (18)では, つねに$2+e^{p(x-y)}<5+e^{p(y-x)}$が成立するので$y$は毎回1%ずつ終始減りつづける. 100回でほぼ$e^{-1}=0.368$倍になり, 500回では$e^{-5}=0.067$倍となるであろう.

(17)のほうは, $2+e^{p(x-y)} \fallingdotseq 4+e^{p(y-x)}$となったトタンに$x$が1回だけ逆もどりするが, そのあとしばらくは$x$も毎回1%ずつ減ってゆく.

この様子は, zの動きに注目することによって

表 1 $p=1\mathrm{t}^{-1}$, $\varepsilon=0.01$ の場合

k	x	y	$z=x-y$	$2+e^{pz}$	$4+e^{-pz}$	$5+\ ^{-pz}$
	t	t	t			
0	10.000	10.000	0.000	3.000	<5.000	<6.000
1	10.100	9.900	0.200	3.221	<4.819	<5.819
2	10.199	9.801	0.398	3.489	<4.672	<5.672
3	10.297	9.703	0.594	3.811	<4.552	<5.552
4	10.394	9.606	0.788	4.199	<4.455	<5.455
5	10.490	9.510	0.980	4.664	>4.375	<5.375
6	10.385	9.415	0.970	4.638	>4.379	<5.379
7	10.281	9.321	0.960	4.612	>4.383	<5.383
8	10.179	9.227	0.952	4.591	>4.386	<5.386
9	10.077	9.135	0.942	4.565	>4.390	<5.390
10	9.976	9.044	0.932	4.540	>4.394	<5.394
11	9.876	8.953	0.923	4.517	>4.397	<5.397
12	9.777	8.864	0.913	4.492	>4.401	<5.401
13	9.680	8.775	0.905	4.472	>4.405	<5.405
14	9.583	8.687	0.896	4.450	>4.408	<5.408
15	9.487	8.601	0.886	4.425	>4.412	<5.412
16	9.392	8.515	0.877	4.404	<4.416	<5.416
17	9.498	8.429	1.069	4.912	>4.343	<5.343
18	9.403	8.345	1.058	4.881	>4.347	<5.347
19	9.309	8.262	1.047	4.849	>4.351	<5.351
20	9.216	8.179	1.037	4.821	>4.355	<5.355
21	9.124	8.097	1.027	4.793	>4.358	<5.358
22	9.033	8.016	1.017	4.765	>4.362	<5.362
23	8.943	7.936	1.007	4.737	>4.365	<5.365
24	8.853	7.857	0.996	4.707	>4.369	<5.369
25	8.765	7.778	0.987	4.683	>4.373	<5.373
26	8.677	7.700	0.977	4.656	>4.376	<5.376

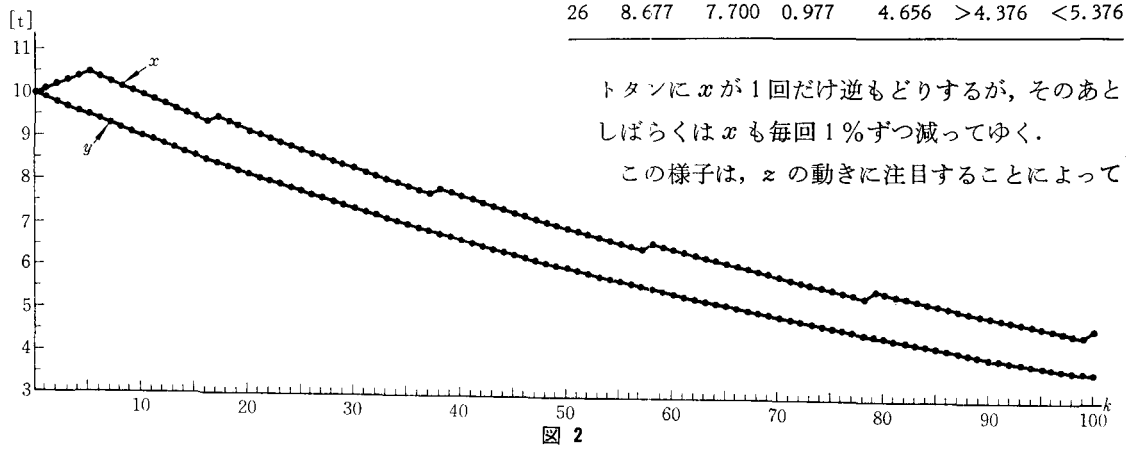

図 2

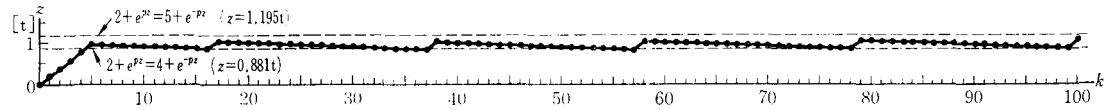

図 3

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

もっとよく理解することができる（**図3**）．すなわち，(17)，(18)から，

$2+e^{pz} \leqq 4+e^{-pz}$　ならば，

$$z'=x'-y'=(1-\varepsilon)z+\varepsilon c \qquad (19)$$

$4+e^{-pz} < 2+e^{pz} \leqq 5+e^{-pz}$　ならば，

$$z'=x'-y'=(1-\varepsilon)z \qquad (20)$$

がみちびかれるが，$2+e^{pz}=4+e^{-pz}$が成立するのは，$e^{pz}-e^{-pz}=2$すなわち$\sinh pz=1$のとき，つまり，

$$z=\sinh^{-1}1/p=0.88117/p \qquad (21)$$

のときであり，また$2+e^{pz}=5+e^{-pz}$が成立するのは$e^{pz}-e^{-pz}=3$すなわち$\sinh pz=3/2$のとき，つまり，

$$z=\sinh^{-1}(3/2)/p=1.19476/p \qquad (22)$$

のときである．したがって，zが(21)より小さい間はzは(19)にしたがって増えるが，zが(21)と(22)の間にあればzは(20)にしたがってゆるやかに減ってゆくのである．図2の場合，$z=0$から出発してしばらくは(19)が支配してzは増えつづけるが，これは一種の「過渡現象」である．zが(21)と(22)の間に飛び込んだとき，この過渡現象は終わり，しばらく(20)が支配してzは減りつづける．zが(21)を下まわるところまで下がると，そのトタンに，1回だけ(19)が働いてzが増し，それからあとかなり長い間(20)がつづくであろう．あとはこれを繰り返すはずである．

(20)によるzの減り方は，きわめてゆるやかであるから，(19)が適用されるときのzの値は(21)に等しいと見てもよいであろう．そうすると，その直後のzの値は(19)から，

$$z'=(1-\varepsilon)\frac{\sinh^{-1}1}{p}+\varepsilon c \qquad (23)$$

と計算される．これが(22)を越えないための条件は，

$$(1-\varepsilon)\frac{\sinh^{-1}1}{p}+\varepsilon c \leqq \frac{\sinh^{-1}(3/2)}{p}$$

すなわち，

$$p\varepsilon c \leqq \sinh^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)-(1-\varepsilon)\sinh^{-1}(1) \qquad (24)$$

である．いまの場合は，左辺が$1\times0.01\times20=0.2$，右辺が$1.195-0.99\times0.881=0.323$であるから，たしかにこの条件が満たされている．それでzが(21)まで下がって，トタンに(23)までジャンプしたとき，その値は(20)の条件を満たす領域の中にある．そこから(21)まで，(20)にしたがって下がってゆくには，何回ぐらいかかるであろうか．これをN回とすると，

$$(1-\varepsilon)^N=\frac{\sinh^{-1}1}{p}\Big/\left\{(1-\varepsilon)\frac{\sinh^{-1}1}{p}+\varepsilon c\right\}$$

$$\fallingdotseq \sinh^{-1}1/(\sinh^{-1}1+p\varepsilon c)$$

$$\therefore N\fallingdotseq \log\frac{\sinh^{-1}1}{\sinh^{-1}1+p\varepsilon c}\Big/\log(1-\varepsilon) \qquad (25)$$

が成立する．いまの例では，

$$N\fallingdotseq \log\frac{0.881}{0.881+0.2}\Big/\log 0.99$$

$$=(-0.08885)/(-0.00436)$$

$$=20.4$$

となり，約20回で(23)から(21)まで下がることがわかる．

zは0.88 tから1.07 tまでジャンプしてから約20回で0.88 tまで下がるということを繰り返す．その間にyは単調に減りつづけ，xはzとともにときどき1回あともどりするだけで，それ以外はやはり単調に減りつづける．

しまいにyはほとんど0になるであろう．そうすると$x\fallingdotseq z$となるので，上に見たzの変化がそのままxの変化であることになる．したがって，xは完全に0になることはなく，1 tのあたりをわずかに上下して変動しつづけるわけである．最適解では$x=0$となるべきであるのに，xが1 tのあたりを振動するというのは，それだけ「誤差」が残るわけである．つまり，

$$x_1=1\text{ t},\ x_2=19\text{ t},\ y_1=20\text{ t},\ y_2=0\text{ t}$$

というような解に落ちついたとみてよい．物資Mにおける約1 tの誤差は$p=1\text{ t}^{-1}$という値と関係がある．pを次第に大きくしてゆけばこの誤差は次第に小さくなるであろう．そのことは(21)(22)がpに逆比例していることからも予想される．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

そこでつぎにpを倍増してやってみる.

数値例 (2)

$p=2t^{-1}$, $\varepsilon=0.01$として,やはり$x=10t$, $y=10t$から出発してやってみると, 今度は**表2**, **図4**, **図5**のようになる.

今度も, 最初の短い過渡期のあと, $k=3$で減衰期に入り, およそ30回ぐらいxもyも単調に減少する. ところが$k=33$から$k=42$までの9回ほどは前には見られなかった「激動」の期間になる.

これは(24)が成り立たなくて, (23)が(22)を越えてしまうことからくる. そうなると,(19),(20)に加えて,

$$5+e^{-pz}<2+e^{pz} \quad \text{ならば,}$$

$$z'=x'-y'=(1-\varepsilon)z-\varepsilon c \qquad (26)$$

を追加しなければならなくなる. そして, この激動期の間は(19)と(26)が交互に繰り返されて,zははげしく変動する. それとともにxもyもはげしく変動しながら, かえって増大する. つまり激動期には, xもyも正しい目標を見失って, あらぬ方へ向かってさまよってゆくことになる.

しかし,やがてこの激動期が終わる.それは(19)を適用して上がったzの値が(20)の条件を満たすようになったときである. それからあとは, (20)が適用されて, xもyも単調に減少する時期がつづく. この時期を, 激動期に対して「沈静期」とよんでよいであろう.

このように, $p=2t^{-1}$のときは「激動期」と「沈静期」を交互に反復しながら, xもyも全体としては次第に減少してゆく. 最後にはxが0.5tのあたり, yが0.1tのあたりで, どちらもだいたい図5のzに似た変動をつづけることになるであろう.

この場合の「誤差」は, xにおいて約0.5tと, 数値例(1)の場合の半分になる. これはもちろん予想どおりである.

なお, 激動期や沈静期の長さは理論的にどう見積れるであろうか.

表2 $p=2t^{-1}$, $\varepsilon=0.01$ の場合

k	x	y	$z=x-y$	$2+e^{pz}$	$4+e^{-pz}$	$5+e^{-pz}$
	t	t	t			
0	10.000	10.000	0.000	3.000	<5.000	<6.000
1	10.100	9.900	0.200	3.492	<4.670	<5.670
2	10.199	9.801	0.398	4.217	<4.451	<5.451
3	10.297	9.703	0.594	5.281	>4.305	<5.305
4	10.194	9.606	0.588	5.241	>4.309	<5.309
5	10.092	9.510	0.582	5.203	>4.312	<5.312
6	9.991	9.415	0.576	5.165	>4.316	<5.316
7	9.891	9.321	0.571	5.133	>4.319	<5.319
8	9.792	9.227	0.565	5.096	>4.323	<5.323
9	9.694	9.135	0.559	5.059	>4.327	<5.327
10	9.597	9.044	0.554	5.028	>4.330	<5.330
11	9.501	8.953	0.548	4.992	>4.334	<5.334
12	9.406	8.864	0.543	4.962	>4.338	<5.338
13	9.312	8.775	0.537	4.927	>4.342	<5.342
14	9.219	8.687	0.532	4.898	>4.345	<5.345
15	9.127	8.601	0.527	4.869	>4.349	<5.349
16	9.036	8.515	0.521	4.835	>4.353	<5.353
17	8.945	8.429	0.516	4.807	>4.356	<5.356
18	8.856	8.345	0.511	4.779	>4.360	<5.360
19	8.767	8.262	0.506	4.751	>4.363	<5.363
20	8.680	8.179	0.501	4.724	>4.367	<5.367
21	8.593	8.097	0.496	4.697	>4.371	<5.371
22	8.507	8.016	0.491	4.670	>4.375	<5.375
23	8.422	7.936	0.486	4.643	>4.378	<5.378
24	8.338	7.857	0.481	4.617	>4.382	<5.382
25	8.254	7.778	0.476	4.591	>4.386	<5.386
26	8.172	7.700	0.471	4.565	>4.390	<5.390
27	8.090	7.623	0.467	4.545	>4.393	<5.393
28	8.009	7.547	0.462	4.519	>4.397	<5.397
29	7.929	7.472	0.457	4.494	>4.401	<5.401
30	7.850	7.397	0.453	4.474	>4.404	<5.404
31	7.771	7.323	0.448	4.450	>4.408	<5.408
32	7.694	7.250	0.444	4.430	>4.411	<5.411
33	7.617	7.177	0.439	4.406	<4.416	<5.416
34	7.741	7.106	0.635	5.561	>4.281	>5.281
35	7.663	7.235	0.428	4.354	<4.425	<5.425
36	7.786	7.163	0.624	5.483	>4.287	>5.287
37	7.709	7.291	0.418	4.307	<4.433	<5.433
38	7.832	7.218	0.614	5.414	>4.293	>5.293
39	7.753	7.346	0.407	4.257	<4.443	<5.443
40	7.876	7.272	0.603	5.340	>4.299	>5.299
41	7.797	7.400	0.397	4.212	<4.452	<5.452
42	7.919	7.326	0.593	5.274	>4.305	<5.305
43	7.840	7.252	0.587	5.235	>4.309	<5.309
44	7.761	7.180	0.582	5.203	>4.312	<5.312
45	7.684	7.108	0.576	5.165	>4.316	<5.316
46	7.607	7.037	0.570	5.127	>4.320	<5.320
47	7.531	6.967	0.564	5.089	>4.324	<5.324
48	7.456	6.897	0.559	5.059	>4.327	<5.327
49	7.381	6.828	0.553	5.022	>4.331	<5.331
50	7.307	6.760	0.547	4.986	>4.335	<5.335

沈静期は(20)に従うzが(22)から(21)まで下が

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

るに要する回数であるから，

$$N_1 \fallingdotseq \log \frac{0.88117}{1.19476} \Big/ \log 0.99$$

$$= \frac{-0.13222}{-0.00436} = 30.3$$

と見積られる．

一方，激動期のはじめは，

$$z \fallingdotseq z_1 = 0.88117/p \qquad (z < z_1) \qquad (27)$$

であり，その終わりには，

$$z \fallingdotseq z_2 = 1.19476/p \qquad (z < z_2) \qquad (28)$$

となっているはずであり，その間は(19)による増加と(26)による減少を交互に繰り返すので，増減の1サイクルでは，zから，

$$z' = (1-\varepsilon)z + \varepsilon c$$

に上がって，そこから，

$$z'' = (1-\varepsilon)z' - \varepsilon c$$

$$= (1-\varepsilon)\{(1-\varepsilon)z + \varepsilon c\} - \varepsilon c$$

$$= (1-\varepsilon)^2 z - \varepsilon^2 c$$

に下がることになる．したがって，はじめのzを$z^{(k)}$，であらわすと，そのつぎのつぎのzの値は，

$$z^{(k+2)} = (1-\varepsilon)^2 z^{(k)} - \varepsilon^2 c \qquad (29)$$

で与えられる．この差分方程式の一般解は，

$$z^{(k)} = C(1-\varepsilon)^{2k} - \frac{\varepsilon c}{2-\varepsilon}$$

$$\fallingdotseq C(1-\varepsilon)^{2k} - \varepsilon c/2 \qquad (30)$$

とあらわすことができる．ここにCは積分定数である．激動期のはじめを $k=0$ にとると，

$$z^{(0)} = C - \varepsilon c/2 \fallingdotseq z_1 \qquad (31)$$

そしてそこから$2k$回進んだあと，もう1回(19)を適用したところで(28)が成立して激動期が終わるとすれば，

$$z_2 \fallingdotseq (1-\varepsilon)\, z^{(2k)} + \varepsilon c$$

$$\fallingdotseq (1-\varepsilon)\{C(1-\varepsilon)^{2k} - \varepsilon c/2\} + \varepsilon c$$

$$\fallingdotseq C\,(1-\varepsilon)^{2k+1} + \varepsilon c/2$$

このときの$2k+1$を激動期の長さN_2と見るならば，

$$z_2 \fallingdotseq C(1-\varepsilon)^{N_2} + \varepsilon c/2 \qquad (32)$$

それで，(31)と(32)から，

$$(1-\varepsilon)^{N_2} \fallingdotseq \frac{z_2 - \varepsilon c/2}{z_1 + \varepsilon c/2} \qquad (33)$$

が得られるので，結局，

$$N_2 \fallingdotseq \log \frac{z_2 - \varepsilon c/2}{z_1 + \varepsilon c/2} \Big/ \log (1-\varepsilon) \qquad (34)$$

という見積りができる．

数値例(2) の場合には，

$$N_2 \fallingdotseq \log \frac{0.59738 - 0.1}{0.44058 + 0.1} \Big/ \log 0.99 \qquad (34)$$

$$= \frac{-0.03617}{-0.00436} = 8.29$$

となり，表2，図5の結果とよく合っている．

pを$5\,\mathrm{t}^{-1}$，$10\,\mathrm{t}^{-1}$のようにとった場合も，沈静期の長さN_1はほとんど変わらないであろう．激動期の長さN_2は，

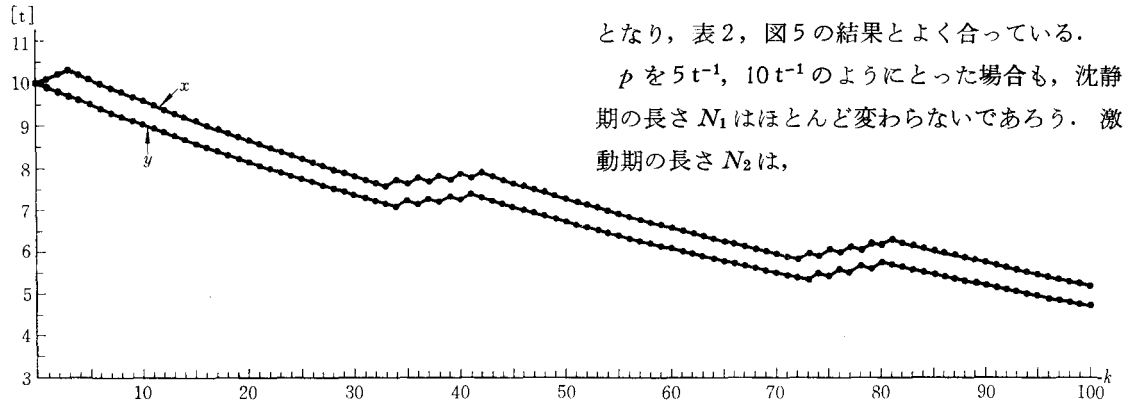

図 4

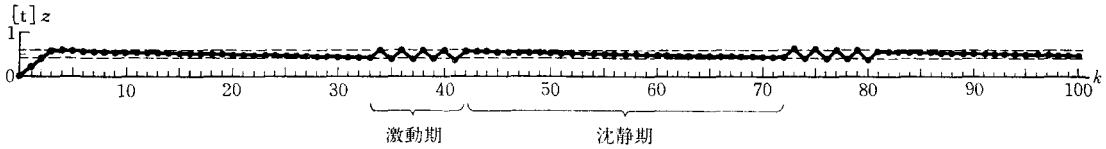

図 5

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$p=5\,\mathrm{t}^{-1}$ ならば,

$$N_2 \fallingdotseq \log\frac{0.23895-0.1}{0.17623+0.1}\Big/\log 0.99$$

$$=\frac{-0.29841}{-0.00436}=68.4$$

$p=10\,\mathrm{t}^{-1}$ ならば,

$$N_2 \fallingdotseq \log\frac{0.11948-0.1}{0.08812+0.1}\Big/\log 0.99$$

$$=\frac{-0.98485}{-0.00436}=225.6$$

と，次第に長くなってゆく．

$p=20\,\mathrm{t}^{-1}$ になると，$z<\varepsilon c/2$ となって，公式(34)が使えなくなる．それはどういうわけであろうか．

数値例 (3)

$p=20\,\mathrm{t}^{-1}$, $\varepsilon=0.01$ の場合の計算は**表 3**，**図 6**，**図 7** のように，まことにひどいことになる．

この場合は「激動期」がいつまでもつづいて終わらないのである．x も y も (10 ± 0.1)t の間を振動するだけで，最適値 0 に向かう気配はまったくない．

これは p を欲張りすぎたといえよう．やはりあまりあせってはダメなようである．

容量修正法

ところで，数値例(1)でも数値例(2)でも，x や y そのものは数百回の反復の後にやっと目標に近い値に到達するのに対して，その差 z は，そしてしたがって e^{pz} は，ごく初期の「過渡期」の終わったあとでは，もう最終の状態に近い行動をとることが観察される（**図 8**，**図 9**）．

これは，この項が，線形計画での「双対変数」すなわち「Langrange 乗数」にあたるものであることからも予想されることである．

そもそも，この項は任意の係数を伴っていてもよいはずで，たとえば ae^{pz} であってよい．(a は，この場合 1,000円/t という単位をもっているはずで，いままでは $a=1{,}000$円/t ととったことにあたっている．)

図 6

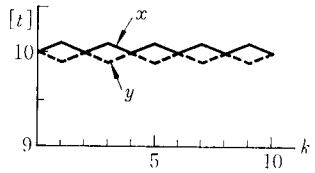

図 7

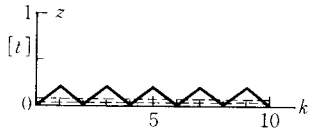

表 3 $p=20\,\mathrm{t}^{-1}$, $\varepsilon=0.01$ の場合

k	x	y	z	$2+e^{pz}$	$4+e^{-pz}$	$5+e^{-pz}$
0	10.000	10.000	0.000	3.00	<5.00	<6.00
1	10.100	9.900	0.200	56.60	>4.02	>5.02
2	9.999	10.001	−0.002	2.96	<5.04	<6.04
3	10.099	9.901	0.198	54.48	>4.02	>5.02
4	9.998	10.002	−0.004	2.92	<5.08	<6.08
5	10.098	9.902	0.196	52.40	>4.02	>5.02
6	9.997	10.003	−0.006	2.89	<5.13	<6.13
7	10.097	9.903	0.194	50.42	>4.02	>5.02
8	9.996	10.004	−0.008	2.85	<5.17	<6.17
9	10.096	9.904	0.192	48.53	>4.02	>5.02
10	9.995	10.005	−0.010	2.82	<5.22	<6.22

(8)式にもどっていえば，(8)の代わりに，

$$ae^{p(s-c)} \tag{35}$$

と置こうというわけである．この a を，この項の最終値に近くとっておけば，$s\leqq c$ という条件がよりよく強制されるだろうと思われる(**図 10**)．

(35)はまた，c の代わりに少し修正した値 c' を用いて，

$$e^{p(s-c')} \tag{36}$$

と置いたとみることもできる．

$$a=e^{p(c-c')} \tag{37}$$

からその修正量 $c'-c$ が定まる（図10)．

あるいは，

$$a=e^{p(s_1-c)} \tag{38}$$

を与えるような s_1 から，

$$c-c'=s_1-c \tag{39}$$

という条件で c' をきめるといってもよい．

このように容量を修正しようという考えから「容量修正法」の提案が生まれた（最初の発案者は国鉄の塚本広幸氏であった)．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

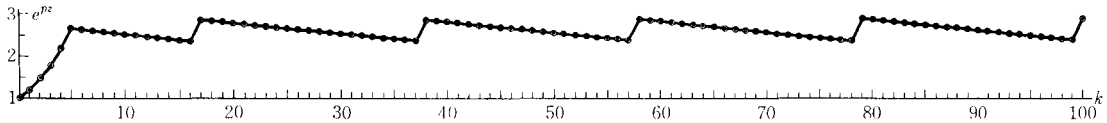

図 8

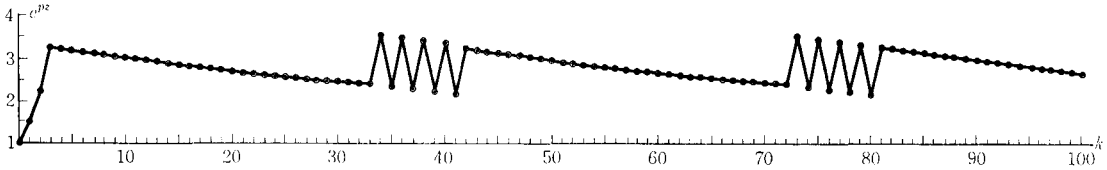

図 9

表 4　$p=1\mathrm{t}^{-1}$, $\varepsilon=0.01$, $a=2.540$

k	x	y	$z=x-y$	$2+ae^{pz}$	$4+e^{-pz}$	$5+e^{-pz}$
	t	t	t			
10	9.976	9.044	0.932	8.452	>4.394	>5.394
11	9.876	9.154	0.723	7.232	>4.485	>5.485
12	9.777	9.262	0.515	6.253	>4.597	>5.597
13	9.680	9.369	0.310	5.464	>4.733	<5.733
14	9.583	9.276	0.307	5.453	>4.736	<5.736
15	9.487	9.183	0.304	5.443	>4.738	<5.738
16	9.392	9.091	0.301	5.432	>4.740	<5.740
17	9.298	9.000	0.298	5.422	>4.742	<5.742
18	9.205	8.910	0.295	5.412	>4.745	<5.745
19	9.113	8.821	0.292	5.402	>4.747	<5.747
20	9.022	8.733	0.289	5.392	>4.749	<5.749
21	8.932	8.646	0.286	5.382	>4.751	<5.751

ここでは(35)の形であつかうことにしよう．

表1で，$k=10$ のとき「容量修正」をやってみよう．このとき $2+e^{pz}=4.540$となっているから，$e^{pz}=2.540$ ということになる．この値を a ととって，以後は $2+e^{pz}$ の代わりに $2+ae^{pz}$ を使うのである．そうすると，$k=11$ 以後の経過は**表4**のように変わる．

x や y の減り具合は表1の場合と大差ないが，z の動く範囲が1の近所から0の近所へ移り，したがって最終状態での誤差がずっと小さくなる．つまり，そのときの p に相当するよりもずっと小さい誤差ですむ．

こういうやり方は，その後一般のSUMT (successive unconstrained minimization technique) についても考案され，高い評価を受けつつあるようである．

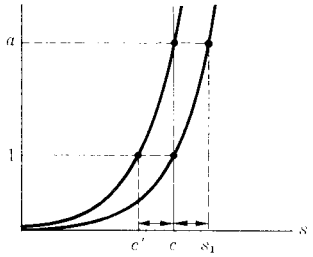

図 10

む　す　び

ここでは，ごく特別な例を一つだけとって，改良されたＩＡ法の行動を詳細に吟味してみた．さらに比較的簡単な例を追加して同様のことを試みると，一般の場合をあつかうために有用な知見がもっといろいろと得られることであろう．

参 考 文 献

〔1〕運輸調査局，各種輸送網の将来計画の基本原理とその手法，調査研究報告15（昭44），同32（昭45）．

〔2〕森口・伊理・長谷，多種流輸送問題の一つの逐次近似解法，日本オペレーションズ・リサーチ学会，1970年度秋季研究発表会，pp. 21-22.

〔3〕森口・伊理・塚本，多種流輸送問題の解法における容量修正法，同，pp. 23-24.

もりぐち・しげいち　1916年生
1938年　東京帝国大学工学部航空学科卒
1944年　同助教授
1956年　東京大学教授
1975～76年　ＯＲ学会会長
1977年　電気通信大学教授

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．