解説

信頼性の数学(1)

鳩山 由紀夫

信頼性について解説的なものをかくようにとの依頼を受けたものの，職場などで信頼性の理論が実際にどのくらい，どのような形で使われているかなどの認識にも乏しい非才には，信頼性に関して総合的な解説を加えるべくもなく，止むを得ず，自分の興味の範囲という小さな領域に話を限定してしまった．たとえば，信頼度の信頼区間推定など統計的な議論は捨象してしまった．したがって統計的手法にとくに関心をおもちの方は失望されるに違いない．

この解説は，主として確率論的な側面から見たシステムの信頼性と保全性の問題で，ここ十数年の間に論じられてきたいくつかのトピックを拾いあげ説明を加えたものである．

1. システムの信頼度——その静的側面

1.1 重要性の尺度

この章では，時間を固定してある瞬間にシステムが満足な状態で動作しているかどうかという意味での信頼度を考えよう．ここで，システムは有限個(n個)のユニットから構成されており，システムが動作するか否かは純粋にユニットが動作しているか否かできまるものとする．i番目のユニットが動作しているか否かは確率変数X_iで記述され，x_iはその実現値であり1か0の値をとる．すなわち，

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{ユニット}\ i\ \text{が動作しているとき}\\ 0 & \text{ユニット}\ i\ \text{が故障しているとき}\end{cases}$$

ここで$X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)$とかく．xも同様である．仮定によりシステムは，

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & X=x\ \text{でシステム動作中}\\ 0 & X=x\ \text{でシステム故障中}\end{cases}$$

とあらわすことができる．システムϕとしてはxに関するどのような2値関数を考えてもいいわけであるが，ユニットの改良がシステムに悪影響をおよぼすようなシステムは考慮する必要もないので，われわれはϕをxの非減少関数と限定する．さらにユニットの状態がシステムに何の影響も与えないユニットは最初から取り除いておくことにする．このようなシステムをコヒーレントなシステムとよぶ．

コヒーレントなシステムϕにはカットとパスの概念を導入することができる．$C\subset N\equiv\{1,2,\cdots,n\}$がカットとは，すべての$i\in C$に対して$x_i=0$ならば$\phi(x)=0$が保証される集合のことである．最小カットとは，その真部分集合にカットを含まないカットのことであり，$C_1,\cdots,C_k$とk個存在するとしよう．$P\subset N$がパスとは，すべての$i\in P$に対して$x_i=1$ならば$\phi(x)=1$が保証される集合のことである．最小パスとは，その真部分集合にパスを含まないパスのことであり，$P_1,\ \cdots,\ P_l$とl個存在するとしよう．定義からわかるように，$\phi=1$となるのは，少なくとも1つの最小パスの中のすべてのユニットが1となるときにかぎり，また$\phi=0$となるのは，少なくとも1つの最小カットの中のすべてのユニットが0となるときにかぎる．したがって，

$$\begin{cases}\alpha_j(x)=\prod_{i\in P_j}x_i, & j=1,\ \cdots,\ l\\ \beta_j(x)=\coprod_{i\in C_j}x_i\equiv 1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i), & j=1,\ \cdots,\ k\end{cases}$$

とおけば，

$$\phi(x)=\coprod_{j=1}^{l}\prod_{i\in P_j}x_i=1-\prod_{j=1}^{l}(1-\alpha_j(x))$$
$$=\prod_{j=1}^{k}\coprod_{i\in C_j}x_i=\prod_{j=1}^{k}\beta_j(x)$$

とあらわすことができる．この表現方法は後に有用である．類似の方法に電子回路のようにANDゲートとORゲートを用いるものがあり，こちらは故障の木解析などに使用されている．

さて，システムを静的側面からとらえる場合，その信頼度は単にシステムが動作する確率であり，

$$h\equiv P[\phi(X)=1]=E\phi(X)$$

である．ユニットが統計的に独立であると仮定すれば，$P_i=P[X_i=1]$をユニットiの信頼度として，システムの信頼度は$h=h(p)$とユニットの信頼度の関数とかくこ

とができよう．hを計算することがこの章の主眼であるが，その前に重要度の概念を説明しておくことが必要であろう．Birnbaumが提案した重要度とはユニットjに関して，

$$I_h(j)=E[\phi(1_j,\ X)-\phi(0_j,\ X)]$$

ただし，$(x_j, X)=(X_1, \cdots, X_{j-1}, x_j, X_{j+1}, \cdots, X_n)$と与えられる．これはユニットが独立のときには，

$$I_h(j)=\partial h(p)/\partial p_j=h(1_j,\ p)-h(0_j,\ p)$$

とかけるから，システムに対するユニットjの感度となり，重要度の定義としてはもっとも説得力がある．ただこの重要度は$h(p)$およびpの値がわからないと計算できず，システムが複雑になるにしたがい$h(p)$の計算は容易でないので，実際にはもっとやさしく計算できる重要度がほしい．そこでϕの構造だけから求められる重要度が登場するわけであるが，4つほど紹介してみよう．

i) Birnbaumの構造重要度

$$I_B(i)=(1/2^{n-1})\sum_{\{x|x_i=1\}}[\phi(1_i,\ x)-\phi(0_i,\ x)]$$

ii) Barlow-Proschanの構造重要度

$$I_{BP}(i)=\int_0^1[h(1_i,\ p)-h(0_i,\ p)]\,dp$$

ただし，$p=(p,\ p,\ \cdots,\ p)$

iii) C-重要度

$$l_i=\min\{|C_j|\ :\ i\in C_j\}$$

$$d_i=|\{j\ :\ i\in C_j \text{かつ} |C_j|=l_i\}|$$

としたとき，$l_i<l_j$ならば，あるいは$l_i=l_j$かつ$d_i>d_j$ならばiはjよりC-重要度が高いという．

iv) P-重要度

$$m_i=\min\{|P_j|\ :\ i\in P_j\}$$

$$e_i=|\{j\ :\ i\in P_j \text{かつ} |P_j|=m_i\}|$$

としたとき，$m_i<m_j$ならば，あるいは$m_i=m_j$かつ$e_i>e_j$ならばiはjよりP-重要度が高いという．

ここでこれらの重要度が先に述べたI_hにどのくらい近いかが興味あるところであるが，I_Bは各ユニットの信頼度が0.5のときのI_hの値であり，I_{BP}はI_hをpに関して積分したものであるから，ユニットの信頼度がまったく予想もつかないときには平均の重要度として意味をもつ．これに対して，C-重要度はユニットの信頼度が高いときにユニット間の重要度の順序がI_hのそれとよく合致することが知られている．逆にP-重要度はユニットの信頼度が低いときにI_hとよく合致することが知られている．これらは計算もきわめて容易であるので，とくにC-重要度は核反応装置など信頼度の高い部品から成るシステムの重要性の尺度として有用であると思われる[4]．

1.2 独立性と関連性

システムの信頼度は各ユニットが統計的に独立であると仮定できるとき正確に求まる．原始的な表現としては，

$$h(p)=\sum_x\phi(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\prod_{i=1}^{n}p_i^{x_i}(1-p_i)^{1-x_i}$$

ここで$C^0\equiv1$とし，和はすべての可能なxの組合せに関してとらねばならない．最小パスやカットを用いたコヒーレントなシステムの表現に適当なブール代数演算を施し，簡略化してから計算する方法もあるが，ユニット数が増加するにしたがい，論理回路の最適設計の問題と同様に操作はそれほど容易でなくなる．そこで，正確な信頼度の代わりに，より容易に求まる比較的精度のよい信頼度の上下限を求める動きがでてくる．上下限値の計算は1.3にゆずるとして，ここでは統計的独立性の問題をあつかおう．

システムが多くのユニットから構成されているとき，ユニット間の独立性の仮定はかなりきびしい条件といわざるを得ない．実際，あるユニットの故障が物理的電気的に近くのユニットの故障を誘発することは多く見られる．また，同一のシステムでも，ユニットの単位をどのくらい細かくとるかによってユニット間の独立性も異なってくるに違いない．非常に微視的にとらえれば独立性の成り立つシステムも，ユニットをある程度大きくとることにより独立性を失うことも考えられるであろう．

たとえば，**図 1.1**においてX_1, X_2, X_3を独立と仮定しても，ユニットを図のようにとればユニット1と2は独立ではなくなる．もし正確な信頼度を求める必要があるならば，独立性が成り立つほど微視的なレベルまで掘り下げて計算しなければならないが，それはユニット数を増加させ，前述したように信頼度の計算は厄介になり，第一，各ユニットの信頼度を計測することすら困難になるであろう．そこで，独立性の仮定をゆるめてもユニット数を減らし，しかも信頼度のよい近似値が得られないかという考えが生まれてくる．つぎの概念を導入しよう．

確率変数の集合$T=\{T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_n\}$は，任意の増加(正確には非減少)関数$f$, gに関して，

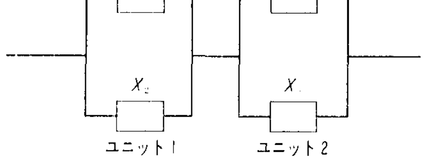

図 1.1 独立性と関連性

(1)　$\mathrm{Cov}[f(T_1, \cdots, T_n), g(T_1, \cdots, T_n)] \geqq 0$
が成り立つとき関連性をもつ(associated)であるという.

2つの確率変数 T_1, T_2 が正の相関をもつ場合，すなわち一方が故障すると他方も故障しやすくなるような場合，$\mathrm{Cov}(T_1, T_2) \geqq 0$ が成り立つが，それは(1)式で $f(T_1, T_2)=T_1$, $g(T_1, T_2)=T_2$ とおいた特殊な場合であり，一般に関連性はより強い仮定である．任意の増加関数 f, g に関して(1)式をチェックするのは容易ではないが，ありがたいことに，任意の2値の増加関数 f, g について(1)式を証明すれば十分であることが示されている[5]．これは関連性のチェックを大変楽にしてくれる．さらに確率変数 T_1, T_2 が2値関数の場合には，$\mathrm{Cov}(T_1, T_2) \geqq 0$ が示せれば関連性をもつことが証明されている．このことと，以下に掲げる性質を利用して，より大きな集合の関連性をみちびくことが多い．

1°　単一の確率変数 $T=\{T_1\}$ は関連性をもつ.

2°　関連性をもつ集合の空でない部合集合は関連性をもつ.

3°　確率変数の2つの集合が互いに独立で，おのおのの集合が関連性をもつ場合，その和集合も関連性をもつ.

4°　関連性のある確率変数の増加関数の有限個の集合は関連性をもつ．すなわち，$T=\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ が関連性をもち，$f_1, \cdots, f_k$ を $T_i (i=1, \cdots, n)$ の増加関数とするとき，$F=\{f_1(T_1, \cdots, T_n), \cdots, f_k(T_1, \cdots, T_n)\}$ は関連性をもつ.

性質1°と3°より明らかに，独立な確率変数の集合は関連性をもつことがわかる．つぎの例で関連性を説明しよう.

5個の独立なユニットから成る図 **1.2** のシステムと等価なシステムを最小カット表現で描くと図 **1.3** のようになる．ここで各カット内のユニットを並列したものを新たにユニットと考え直すと，このシステムは4つのユニットの直列構造をなしている.

そこで，$T_1=1-(1-X_1)(1-X_4) \equiv X_1 \amalg X_4$, $T_2=X_3 \amalg X_5$, $T_3=X_1 \amalg X_5$, $T_4=X_2 \amalg X_3 \amalg X_4$ とおけば，$\{X_1, \cdots, X_5\}$ は独立でも $\{T_1, \cdots, T_4\}$ は独立でない.

しかしながら，$\{X_1, \cdots, X_5\}$ は独立であるから関連性をもち，各 T_i はそれぞれ $X_1, \cdots, X_5$ の増加関数であるから，性質4°から $\{T_1, \cdots, T_4\}$ は関連性をもつことがわかる．一般にある部品がいくつかのユニットに共用されているシステムとか，あるショックがいくつかのユニットの故障を誘発するシステムは関連性をもつ．後者の例としては2変数の指数ショックモデル[6]があげられる．その他，多変量正規分布(≦4次元)の確率変数は任意の i, j に関して $\sigma_{ij} \geqq 0$ ならば関連性をもつことが示されているし，また順序統計量も関連性をもつ．こうしてわかるように，関連性は独立性よりもかなり適用範囲が広い概念であり，信頼性で興味のあるほとんどのシステムがこの性質をもっているといっても過言ではないかもしれない.

1.3　信頼度の上下限値の計算

システムのユニット間に独立が仮定できるとき，その信頼度の上下限値の計算の古典的な方法として，つぎの最小パスあるいはカットを用いる方法があげられる．E_r を最小パス P_r 中のすべてのユニットが動作している状態としよう．l 個の最小パスがあるとすれば，システムの信頼度 h は，

$$h=P[\bigcup_{r=1}^{l} E_r]$$

であらわされる．ここで，

$$S_k=\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq l} P[E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}]$$

とおけば，確率の加法定理より，

$$h=\sum_{k=1}^{l} (-1)^{k-1} S_k$$

が成り立つから，$h \leq S_1$, $h \geqq S_1-S_2$, $h \leq S_1-S_2+S_3$, … と信頼度の上下限値が求まる．通常 S_3 くらいまでの計算でかなりよい上下限値が得られるが，ユニット数の増加にともない計算は急激に厄介となる.

より簡単な計算法をいくつか紹介しよう．システムのユニット間の独立性は一応仮定せずに，関連性を仮定しておく．つぎの定理が成り立つ.

定理1：$X=\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ が関連性をもち，システム $\phi(X)$ がコヒーレントであるならば，システムの信頼度は下記の式でおさえられる.

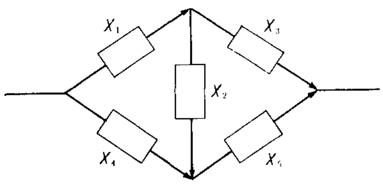

図 **1.2**

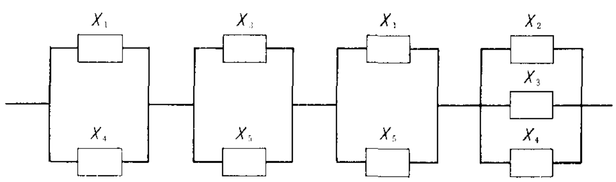

図 **1.3**　最小カット表現

(2) $\prod_{j=1}^{k} P\{\beta_j(X)=1\} \le P\{\phi(X)=1\}$
$$\le 1-\prod_{j=1}^{l}[1-P\{\alpha_j(X)=1\}]$$

証明：X_1, …, X_n が非負で関連性のある確率変数のとき，

(3) $E(X_1X_2\cdot\cdots\cdot X_n) \ge \prod_{i=1}^{n} EX_i$

が成り立つ．なぜならば $Y_1=X_1$, $Y_2=X_2\cdot\cdots\cdot X_n$ とおけば，Y_1 と Y_2 は X_i の増加関数だから関連性をもち，したがって，

$$0 \le \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)=E(X_1\cdot\cdots\cdot X_n)-EX_1E(X_2\cdot\cdots\cdot X_n)$$

であるから，これをくり返して(3)がいえる．$X_1, \cdots, X_n$ が2値の関連性のある確率変数ならば(3)より，

(4) $P\{X_1=1, \cdots, X_n=1\} \ge \prod_{i=1}^{n} P\{X_i=1\}$

同様に，$Z_i=1-X_i$ とおけば，Z_1, …, Z_n は関連性をもち，

(5) $P\{X_1=0, \cdots, X_n=0\} \ge \prod_{i=1}^{n} P\{X_i=0\}$

ところで $\beta_1(X)$, …, $\beta_k(X)$ はすべて非減少関数であるから性質4°より関連性をもつ．ゆえに(4)より，

(6) $P\{\phi(X)=1\}=P\{\beta_1(X)=1, \cdots, \beta_k(X)=1\}$
$$\le \prod_{j=1}^{k} P\{\beta_j(X)=1\}$$

同様に，$\alpha_1(X)$, …, $\alpha_l(X)$ も関連性をもち，したがって(5)より，

(7) $P\{\phi(X)=1\}=1-P\{\alpha_1(X)=0, \cdots, \alpha_l(X)=0\}$
$$\le 1-\prod_{j=1}^{l} P\{\alpha_j(X)=0\}$$

(6)と(7)より(2)がいえる．　(証明終わり)

系1：X_1, …, X_n が独立ならば，$p_i \equiv P\{X_i=1\}$ $(i=1, \cdots, n)$ として，

$$\prod_{j=1}^{k}[1-\prod_{i\in C_j}(1-p_i)] \le P\{\phi(X)=1\} \le 1-\prod_{j=1}^{l}[1-\prod_{i\in P_j} p_i]$$

証明は自明なので省略する．

図1.2で示されたシステムを用いて，この上下限値を計算してみよう．

最小パス　$P_1=\{1, 3\}$　$\alpha_1(X)=X_1X_3$
　$P_2=\{1, 2, 5\}$　$\alpha_2(X)=X_1X_2X_5$
　$P_3=\{4, 5\}$　$\alpha_3(X)=X_4X_5$

最小カット　$C_1=\{1, 4\}$　$\beta_1(X)=1-(1-X_1)(1-X_4)$
　$C_2=\{3, 5\}$　$\beta_2(X)=1-(1-X_3)(1-X_5)$
　$C_3=\{1, 5\}$　$\beta_3(X)=1-(1-X_1)(1-X_5)$
　$C_4=\{2, 3, 4\}$
　$\beta_4(X)=1-(1-X_2)(1-X_3)(1-X_4)$

X_1, …, X_5 が独立で $p_i=p(i=1, \cdots, 5)$ と仮定すると系1より，

$$(1-(1-p)^2)^3(1-(1-p)^3 \le P\{\phi(X)=1\}$$
$$\le 1-(1-p^2)^2(1-p^3)$$

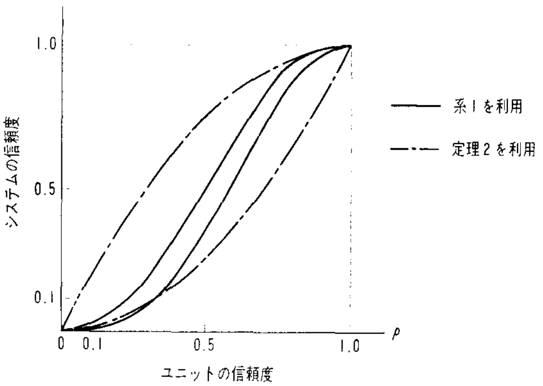

図 1.4 信頼度の上下限

p の値を変化させ，上下限値の変化を図 **1.4** に示す．この図に見られるように，各ユニットの信頼度が高い場合には上下限値が接近するので，この定理および系の適用の効果があると思われる．

最小パスおよびカットを用いた信頼度の上下限値の計算にはもうひとつある．

定理2：$X=\{X_1, \cdots, X_n\}$ が関連性をもち，システム $\phi(X)$ がコヒーレントであるならば，

(8) $\max_{1\le j\le l} \prod_{i\in P_j} p_i \le P[\phi(X)=1] \le \min_{1\le j\le k}(1-\prod_{i\in C_j}(1-p_i))$

証明：$\phi(X)=\max_{1\le j\le l} \min_{i\in P_j} X_i = \min_{1\le j\le k} \max_{i\in C_j} X_i$

ゆえに，

$$\min_{i\in P_j} X_i \le \phi(X) \le \max_{i\in C_{j'}} X_i,\ 1\le j\le l,\ 1\le j'\le k$$

したがって，

(9) $\max_{1\le j\le l} P[\min_{i\in P_j} X_i=1] \le P[\phi(X)=1]$
$$\le \min_{1\le j\le k} P[\max_{i\in C_j} X_i=1]$$

ここで(4)より，

(10) $P[\min_{i\in P_j} X_i=1]=P[\prod_{i\in P_j} X_i=1]$
$$\ge \prod_{i\in P_j} P[X_i=1]=\prod_{i\in P_j} p_i$$

(9)と(10)より(8)の最初の不等号が証明される．(8)のもうひとつの不等号は同様にして(5)と(9)より求まる．
(証明終わり)

再び図1.2のシステムを考えると，

$$p^2 \le P[\phi(X)=1] \le 1-(1-p)^2$$

が得られる．図1.4に上下限値の p による変化を描いたが，p が小さいときには定理1で与えられた下限値よりこちらの下限値のほうがすぐれているのがわかる．一般には定理1と2のどちらがよりよい上下限値を与えるかはいえないので，両者を併用してよいほうをとるのがよいであろう．この他にもシステムをより細かいグループに分解してさらによい信頼度の上下限値を求める方法が

あるが，複雑になるのでここでは省略する[1].

1.4 信頼性システムの設計

いままでは対象となるシステムは与えられたものとして，そのシステムの信頼度の計算に主眼をおいた．しかしながら，システムの信頼度を計算できたとして納得してしまうだけでは受動的でものたりない．つぎの問題として考えるべきことは，では，いかにしたら効果的にシステムの信頼度を向上させることができるであろうかということであろう．ここですぐ思いつくのは，重要度の高いユニットの信頼度を優先して増せば，システムの信頼度を有効に高めることができるであろうということで，これは事実である．なぜならば，Δp_j をユニット j の信頼度の増分とすれば，システムの信頼度の増分 Δh は，

$$\Delta h \cong \sum_{i=1}^{n} I_h(j)\Delta p_j$$

で与えられ，したがってどれかひとつのユニットの信頼度を Δp だけ高めるとするならば．重要度 I_h のもっとも大きなユニットの信頼度を高めるのがシステムの信頼度 h を高めるのにもっとも有効である．ただこれはコストを無視した話で，たとえば，いくら重要度が高いといっても，そのユニットの信頼度をわずか高めるのに多額のコストがかかるならば問題であろう．実際の決定過程はこれほど単純にはいかないかもしれない．コストを考慮に入れた重要性の尺度の存在が注目されるが，いまだ整っていないようである．

コストを考慮した信頼性システムの設計はどうなされるか少し述べてみよう．まず，信頼性システムを設計するという場合，対象となるコヒーレントなシステム ϕ の構造が論理回路と酷似しているため(否定という作用素がない以外はまさに論理回路である)，論理回路の設計と同じくらい幅広い設計と錯覚されがちであるが，信頼性システムの設計にはそれほどの自由度はない．信頼性の観点から問題をとらえるとき，システム(ユニットの構成の具合)は固定されたできあがったものと見るべきであろう．そしてその中で各ユニットとシステムの信頼度に関する要請を満たしながら，あるコスト関数を最小にするように各ユニットの信頼度を決定する問題と考えるべきであろう．数学的にはつぎのように記述される．

ユニット i に p_i の信頼度を実現させるのに要するコストを $c_i(p_i)$ として，

$$G(R)=\min\sum_{i=1}^{n}c_i(p_i)$$

$$(11)\quad \text{s. t.}\begin{cases} h(p)\geq R \\ q\leq p\leq q' \end{cases}$$

ただし p, q, q' はともに n 次元ベクトルであり，最初の条件式はユニットが統計的に独立なときにシステムが満たさねばならない信頼度の下限を与え，次式は各ユニットの信頼度の上，下限を与える．定式化はこのように簡単であるが，一般のコヒーレントなシステムに関して最初の条件式を満足する p の集合はかならずしも凸集合となるとはかぎらないので，解ける保証はない．したがって簡単な問題から見ることにする．

直列システムの場合は，$h(p)=\prod_{i=1}^{n}p_i$ とあらわされるから，$y_i=\log p_i$ と変数変換を行ない(11)と等価な問題

$$S(R)=\min\sum_{i=1}^{n}c_i(e^{y_i})\equiv\min\sum_{i=1}^{n}s_i(y_i)$$

$$(12)\quad \text{s. t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}y_i\geq\log R \\ \log q_i\leq y_i\leq\log q_i' \quad i=1,\cdots,n \end{cases}$$

と制約式を線形に直してから，K-T条件(Kuhn-Tucker condition)を使い解を求めることができる．この際に，各 $s_i(y_i)$ が y_i に関して凸関数であることが(十分条件として)要求されるが，$c_i(p_i)$ が p_i に関して凸関数であるならば当然これは満たされる．

つぎに並列システムの場合は，$h(p)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$ となり，$y_i=\log(1-p_i)$ なる変換で(11)と等価な問題

$$P(R)=\min\sum_{i=1}^{n}c_i(1-e^{y_i})\equiv\min\sum_{i=1}^{n}f_i(y_i)$$

$$(13)\quad \text{s. t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}y_i\leq\log(1-R) \\ \log(1-q_i')\leq y_i\leq\log(1-q_i) \end{cases}$$

と再び線形の制約式に直せるので，K-T条件で解を求めることができるが，このとき $f_i(y_i)$ が y_i に関して凸関数であることが要求される．この条件は $c_i(1-e^{y_i})$ が y_i に関して2階微分可能ならば，

$$\ddot{c}_i(p_i)(1-p_i)-\dot{c}_i(p_i)\geq 0$$

とあらわされる．

システムがより一般的な形をとる場合を考えよう．あるコヒーレントなシステムが，並列のユニット群あるいは直列のユニット群をひとつのユニットに置換する操作のくり返しでただひとつのユニットに帰着されるとき，そのシステムはＳＰクラスに属するという．たとえば図 **1.5** に示されるシステムはＳＰクラスに属し，図1.2の

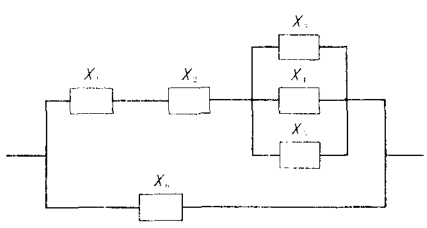

図 1.5 ＳＰクラスに属するシステムの例

システムはＳＰクラスには属さない．システムがＳＰクラスに属するとき，解法はつぎのようになる．各段階で並列のユニット群または直列のユニット群をひとつのユニットに置き換える操作を行なうとき，その対象とすべきユニット群だけで副問題をつくる．ユニット群が直列ならば，副問題は(12)の形をとり，並列ならば(13)の形をとる．この副問題をRに関してパラメトリックに解き，$S(R)$ないしは$P(R)$がつぎの段階におけるおきかわった新しい大きなユニットのコスト関数の役目をする．すなわち新しいユニットに信頼度Rを実現させるのに要するコストを与える．このくり返しで逐次並列ないしは直列の副問題を解いていけば，最後にシステム全体の問題の解が求まる．

図1.5の例では，まずユニット群3，4，5で並列の問題(13)をつくり，これを解いて$P(R)$を新しいユニット7のコスト関数とし，つぎにユニット群1，2，7で直列の問題(12)をつくり，これを解き，$S(R)$を新しいユニット8のコスト関数とする．最後にユニット群6，8で並列の問題(13)をつくり，この解がシステム全体の解となる．この一連の操作がスムーズに運ぶためには，ユニットの信頼度の下限qが十分に大きいことと，コスト関数$c_i(1-y^{-\gamma})$がyに関して$[(1-u_i)^{-1/\gamma}, (1-v_i)^{-1/\gamma}]$の間で凸関数になるような正のパラメータ$\gamma$が存在することが十分であることが知られている．ＳＰクラスに属さない一般のシステムの場合の解法はいまだ知られていない[2]，[3]．

参考文献

[1] Barlow, R. E., and F. Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1975.

[2] Bodin, L. D., "Optimization Procedures for the Analysis of Coherent Structures," *IEEE Transactions on Reliability*, **R-18**, 3 (1969), 118-126.

[3] Butler, D. A., "Optimal Design of Reliable Systems," *Technical Report* No. 169, Department of Operations Research and Department of Statistics, Stanford University, 1975.

[4] Butler, D. A., "Importance Measurers for Highly Reliable Systems," *Technical Report* No. 170, Department of Operations Research and Department of Statistics, Stanford University, 1975.

[5] Lehmann, E. L., "Some Concepts of Dependence," *Annals of Mathematical Statistics*, **37**, (1966), 1137-1153.

[6] Marshall, A. W., and I. Olkin, "A Multivariate Exponential Distribution," *Journal of American Statistical Association*, **62** (1967), 30-44.

(はとやま・ゆきお　東京工業大学工学部経営工学科)