経済学・社会学・地理学分野のマルコフ・モデル

高橋幸雄

のっけから私事で恐縮であるが，筆者は3年前，東京工大より現在の所へ転勤になった．そのため工大時代に身近にあり，よく見ていた雑誌は手元になくなり，離れたキャンパスの別の部局の図書室までゆかないと見ることができなくなってしまった．生来，なまけものの筆者は，それならば手元にある雑誌ですむように勉強の方向を変えればよいと，数学関係の雑誌はあきらめて経済学の分野を中心にマルコフ・モデルの文献を集めることにした．

途中，さぼりながら集めていたので，どうしても読んでいなければならないような論文もまだコピーをとっていなかったりで，完全な報告はできないが現在まで集めて読んだところをまとめて報告させていただきたいと思う．

ここで取り上げるのは，経済学を中心に，地理学，社会学の分野で応用されたマルコフ・モデルである．この分野ではつぎのようなテーマに関してマルコフ・モデルがよく使われているようである．

1. マーケティングにおけるブランド選択モデル
2. 所得分布
3. 企業規模の分布
4. manpower 計画，昇進モデル
5. 地理学
6. 社会移動

まず，これらのテーマごとにマルコフ・モデルの応用について概観し，最後にまとめとして，よいマルコフ・モデルをつくることについて所感を述べさせていただきたい．参考文献は紙数の関係から，本文中に引用されたものだけにかぎった．筆者の集めた論文の数は約200であるが，それらはほとんど引用した文献の文献リストの中に出ているので，文献をお探しの方は孫引きをしていただきたい．

1. ブランド選択モデル

ある種の商品にいくつかのブランドがあったとき，毎期かならず1個どれかのブランドの商品を購入する消費者の行動をマルコフ連鎖でモデル化し，将来における各ブランドの市場占有率を推定しようというものである．

もっとも単純なモデルは，1次の定常なマルコフ連鎖によるもので，洗濯用洗剤のデータに対して適用した Styan and Smith〔9〕のように，このモデルが許容できる程度の近似度で現実のデータと合っていると主張している論文もいくつかあった．しかし Ehrenberg〔1〕によって，このマルコフ型ブランド選択モデルの欠点が指摘され，まったく役に立たないモデルであるとの烙印が押された．それ以後，この種の論文はパッタリと跡絶えてしまった．Ehrenberg によって指摘されたこのモデルの欠点というのを要約するとつぎのようになる．

a．通常，消費者は毎期かならず1個その商品を買うとはかぎらない．複数個買うこともあろうし，また1つも買わないこともあるであろう．また複数個買ったときにはかならずしも同一のブランドの商品だけを買うとはかぎらない．複数のブランドの商品を買うこともありうる．このような場合，マルコフ・モデルは消費者の実際の行動となじまないし，またデータからブランド遷移確率（推移確率）を推定するにも，きわめて不自然なデータ処理を必要とする．

b．ブランド遷移確率が定常的であるという仮定は，理論的にも，またいままでにデータから知られている事実からも受け入れ難い．いままでに報告されたデータについて調べてみても，定常性が成り立っていると思われるケースはほとんどない．唯一の例外は上記の Styan and Smith の結果であるが，彼らがあつかっているのは，すでに市場が定常状態に落ちついてしまった場合であり，このようなケースでマルコフ型ブランド選択モデルを適用して定常確率を求めてみても，何も得るところはない．直観的に，ブランド遷移確率は定常的であるべきだと主張している人々や，定常的と仮定してもよいと主張する人々もいるが，その根拠は何もない．前向きの遷移確率が定常的であると仮定

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

してよいのならば，後向きの遷移確率が定常的（これを彼は MARKOV をひっくり返して VOKRAMとよんでいる）と仮定してもよいではないであろうか．（この点に関して Massy and Morrison〔7〕は異議を唱えたが，Ehrenberg〔2〕に一蹴されている．）

c．マルコフ型ブランド選択モデルからみちびかれる唯一の結果は定常状態へ（かなり速く）収斂することであるが，実際のマーケットでは定常状態はめったに存在しない．マルコフ・モデルが役に立つというならば，まず，定常状態になっているような例を示すことが必要である．

たしかに，いわれてみるともっともなことで，これ以後，単純なマルコフ型ブランド選択モデルの論文がほとんど出なくなったのもうなずける．ところでここではマルコフ性についてはほとんど議論されていない．これはマルコフ型ブランド選択モデルが，はじめはひとりひとりの消費者の行動がマルコフ連鎖であるという意識から出発したのであるが，どの消費者も同じブランド遷移確率をもつのはおかしいという反対論に遇って，その確率過程的な意味づけを放棄し，割合（市場占有率）の変化という意味だけに満足するようになっているためである．（この点に関しては Howard〔5〕できちんと議論されているようであるが，残念ながら筆者は不勉強でまだその論文を読んでいない．）確率過程的な意味づけを放棄せざるを得なかったところに，このモデルの失敗が潜んでいたのではないかと筆者は考えている．

このように単純なマルコフ型ブランド選択モデルは，Ehrenberg の論文で息の根を絶たれたが，マーケティング研究にマルコフ・モデルの残した影響はかなり大きいものと想像される．1つには反面教師的な意味で，ブランド・ロイヤルティ，ブランド選択，購買間隔などの消費者の購買行動の研究に刺激を与えたことがうかがえる．（このことについては．吉田・村田・井関〔10〕，Sheth〔8〕を参照されるとよい．）また評判の悪かった遷移確率の定常性をはずし，遷移確率に消費者のブランドに対する学習効果と企業のマーケティング変数を導入して，よりもっともらしいマルコフ型のモデルをつくった Kuehn たちの仕事（上記〔10〕，〔8〕参照），遷移確率の推定にベイジアンの考えを導入して，定常な遷移確率の枠を破った Ezzati〔3〕のモデルもある．

Kuehn たちのモデルというのはつぎのようなものである．推移確率行列を，

$$
\begin{array}{c} \\ A_t \\ B_t \\ C_t \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} A_{t+1} & B_{t+1} & C_{t+1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\gamma_A+(1-\gamma_A)a_A & (1-\gamma_A)a_B & (1-\gamma_A)a_C \\
(1-\gamma_B)a_A & \gamma_B+(1-\gamma_B)a_B & (1-\gamma_B)a_C \\
(1-\gamma_C)a_A & (1-\gamma_B)a_B & \gamma_C+(1-\gamma_C)a_C
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

という形のものとする．ここで a_j はブランド j の相対的なマーケティング吸引力（$\sum a_j=1$）をあらわし，γ_j は未修正反復購買確率（$0\leq\gamma_j\leq 1$）をあらわす．γ_j はブランド j を使用した後に消費者がブランド j に対して抱く選好の度合をあらわしているので，ここに消費者の学習効果を入れることができるわけである．

この他に Lipstein〔6〕のように毎期の遷移確率行列を推定し，その違いから新しい商品が導入されたテスト・マーケットの平衡状態への移行の具合を測ろうというモデルも，単純マルコフ・モデルから出てきたアイデアであろう．単純マルコフ・モデルとは逆に，情報理論を用いて市場占有率ベクトルから遷移確率を推定しようという試みもある（Herniter〔4〕）．

2. 所得分布

所得分布がパレート分布で近似できることの理論的根拠を与えるために，単純なマルコフ・モデルが使われた．これを最初に論文の形で発表したのは Champernowne〔11〕である．彼の変形ランダム・ウォーク・モデルを簡単に紹介しよう．

まず所得をランク分けする．このとき，ランクの区間の幅が等比数列になるようにしておく．これは後で仮定するシフトの確率が同じになるようにするために必要である．時刻 t にランク r にいたものが，時刻 $t+1$ にランク $r+u(-r<u)$ にいる確率を $p_{r,u}(t)$ とかく．そこでつぎの仮定をおく．

$$
\begin{aligned}
p_{r,u}(t) &= p_u && r>m, \\
p_{r,u}(t) &= p_{r,u} && r\leq m.
\end{aligned}
$$

つまり，推移確率は定常的で，m より大きいランクからの推移は，シフトしたランクの数だけに依存する（ランダム・ウォークの仮定）．Champernowne は確率母関数を使って，もしある整数 w があって，

$$p_u=0,\ u>w$$

ならば，このマルコフ連鎖の定常分布は（存在するものとして）高所得域ではパレート分布で近似できることを示した．つまり，定常分布でランク r 以上の確率を $F(r)$ とすると，

$$F(r)\fallingdotseq C\cdot r^{-\alpha}$$

という形で近似できることを示したのである．

これは確率過程の専門家から見れば当然の結論であって，何も目新しいものではない．しかもこのような結論がほしいならば，所得をランクに分けて，わざわざ離散化する必要もないし，時間のほうも連続化することもできる．

そのことはさておいて，この論文はどういうメカニズムがあれば所得分布がパレート分布で近似できるかの一

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

例を示したところに価値がある．しかしこれ以後，このモデルの仮定が現実に満たされているかどうかをチェックした論文は見あたらない．このモデルを現実のデータにあてはめたものとしては Vandome〔14〕がある．

また低所得と非低所得との間の推移をあつかったものとして McCall〔12〕がある．ここでは低所得と非低所得，および所得が申告されなかった状態の3つの状態を考え，10年間同じ状態にいたものを stayer とし，それ以外を mover として，mover の動きが非定常なマルコフ連鎖であらわされるモデルを考えている．

最近，Shorrocks〔13〕は Champernowne のモデルを1963年，1966年，1970年の3時点での所得を調べたデータにあてはめて，1次のマルコフ性が満たされていないことを示した．彼の論法はつぎのようなものである．

ここで用いられたデータは800人の男性の所得のデータである．所得を，区間の幅が等比になるようにして5つのランクに分け，M_1（1963年→1966年），M_2（1966年→1970年），M_3（1963年→1970年）の3つの推移割合の行列を計算したところ，つぎのようになった．

1963-66

$$M_1=\begin{pmatrix} 0.64 & 0.29 & 0.04 & 0.03 & 0.00 \\ 0.14 & 0.56 & 0.26 & 0.03 & 0.01 \\ 0.02 & 0.22 & 0.54 & 0.21 & 0.01 \\ 0.01 & 0.04 & 0.27 & 0.54 & 0.14 \\ 0.00 & 0.01 & 0.05 & 0.27 & 0.67 \end{pmatrix}$$

1966-70

$$M_2=\begin{pmatrix} 0.78 & 0.15 & 0.07 & 0.00 & 0.00 \\ 0.22 & 0.50 & 0.24 & 0.03 & 0.01 \\ 0.05 & 0.23 & 0.45 & 0.25 & 0.02 \\ 0.00 & 0.05 & 0.23 & 0.45 & 0.27 \\ 0.01 & 0.00 & 0.05 & 0.19 & 0.75 \end{pmatrix}$$

1963-70

$$M_3=\begin{pmatrix} 0.69 & 0.22 & 0.09 & 0.00 & 0.00 \\ 0.26 & 0.40 & 0.23 & 0.10 & 0.01 \\ 0.05 & 0.25 & 0.38 & 0.26 & 0.06 \\ 0.01 & 0.08 & 0.31 & 0.37 & 0.23 \\ 0.00 & 0.02 & 0.08 & 0.18 & 0.72 \end{pmatrix}$$

もしマルコフ性が成り立つならば，M_1 と M_2 をかけたものは M_3 と同じでなければならない．ところが，

$$M_1M_2=\begin{pmatrix} 0.57 & 0.25 & 0.14 & 0.03 & 0.01 \\ 0.24 & 0.36 & 0.27 & 0.10 & 0.03 \\ 0.09 & 0.25 & 0.34 & 0.24 & 0.08 \\ 0.03 & 0.11 & 0.26 & 0.34 & 0.26 \\ 0.01 & 0.03 & 0.12 & 0.26 & 0.58 \end{pmatrix}$$

であり，M_3 と比較してみると，対角線上の数値が M_3 に比べて明らかに小さい．これは偶然とか誤差とかいうもので説明できる程度のものではない．したがって，1次のマルコフ性は成り立たない．これが Shorrocks の結論であり，この結論をふまえて，彼は2次のマルコフ・モデルを提唱している．

筆者は，はじめ，この議論は正しいものと思っていたが，よく考えてみると，この議論には状態をまとめた lumping の効果が入っていないことにひっかかった．所得というのは大雑把にいえば連続量としてあつかってよい性質のものである．もし所得の推移が連続的な状態空間の上でマルコフ的であったならば，どうなるであろうか．たとえばブラウン運動で近似できないであろうか．これを簡単にみるため，つぎのような計算をしてみた．

行列 M_1 の第3行目はランク3からの3年間における推移の割合を示しているが，他の行も端の効果を除いてほぼ同じ値を示している．しかも第3行の値はほぼ対称的である．そこで M_1 の第3行の値に正規分布をあてはめてみると，標準偏差 $\sigma_1=0.694$ の正規分布（ただし対数をとった区間の幅を1とする）で近似できて，

$$(.015\ \ .22\ \ .53\ \ .22\ \ .015)$$

となる．これは M_1 の第3行と非常によく合っている．ブラウン運動を仮定すると，

$$\sigma_2=(2/\sqrt{3})\sigma_1,\quad \sigma_3=\sqrt{7/3}\ \sigma_1$$

であるから，これらから M_2 および M_3 の第3行が推定できて，それぞれ，

$$M_2\quad (\ .03\ \ .24\ \ .46\ \ .24\ \ .03)$$

$$M_3\quad (\ .08\ \ .24\ \ .36\ \ .24\ \ .08)$$

となるが，これらは M_2 および M_3 の第3行とよく合っている．

この結果からすると，このデータはブラウン運動または拡散過程でもって近似するほうがよさそうである．考えている期間が3年，4年と比較的長いので，何回かの所得の変動が重なって，中心極限定理が成立し，そこでブラウン運動的なふるまいをしているのであろう．しかし，1年ごとの推移をモデル化しようとすると，これではダメになるであろう．Shorrocks の論文にもかかれているように，所得が増加したあとでつづけて所得が増加する確率は，所得が増加しなかった，または所得が減少したあとで所得が増加する確率に比べてふつう小さいであろうからである．

3. 企業規模分布

ある業界における各企業の規模の移り変わりをマルコフ・モデルでモデル化し，その業界における企業規模分布の変化を議論した最初は Adelman〔15〕である．彼女は前述の Champernowne〔11〕のモデルなどを参考にして，企業規模の移り変わりにマルコフ・モデルを導

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

入し，簡単な mobility index を定義したのち，1929～39年および1946～56年のアメリカの鉄鋼業界のデータに適用してみせた．彼女の結果によると，推定された推移確率行列から定常分布を求めてみると，この業界の独占状態が緩和される傾向にあることが認められる．これは他の研究からも認められている事実である．このことからマルコフ・モデルの有用性がわかるであろう，というのが彼女の結論である．

Adelman のマルコフ・モデルの正当性の議論はとても現在では受けいれられないほど雑なものであるが，彼女の論文が契機となって，マルコフ・モデルをベースにした企業規模の移り変わりのモデルが数多く出されたことに対する功績は高く評価されるであろう．Adelman 以後発表されたマルコフ・モデルとしては，たとえば Collins and Preston〔17〕,〔18〕, Preston and Bell〔24〕, Krenz〔22〕, Colman〔16〕などがある．

他のマルコフ・モデル同様，この企業規模分布のマルコフ・モデルでも，推移確率の定常性の仮定への風あたりは強い．そこで推移確率が外生変数の関数であるようなマルコフ・モデルを考え，アメリカ・ペンシルバニアの冷凍乳製品製造会社の規模分布にあてはめたものが Hallberg〔19〕によって報告されている．そこでは，アメリカの労働者の時間あたりの賃金指数，ペンシルバニアの人口，ペンシルバニアの1人あたりの所得，ペンシルバニアでの原料乳の価格，アメリカの酪農商品の小売価格指数，を外生変数 $z_k(t)$ とし，t 期の推移確率を，

$$p_{ij}(t)=\alpha_{ij}+\sum\beta_{ijk}\ z_k(t)$$

という式にもとづいて最小二乗法で推定して，非定常なマルコフ・モデルをみちびいている．その結果をみると定常なマルコフ・モデルではとても説明できないような企業規模の動きを，実にみごとに近似している．

Adelman とほぼ同じころ，Simon and Bonini〔25〕は所得分布に対して Champernowne〔11〕が行なったのと同様の検討を企業規模分布に対して行ない，出生死滅過程を用いてそれがパレート分布やユール分布で近似できることを議論している．これは Ijiri and Simon〔20〕,〔21〕のもう少し仮定をゆるめた確率過程によるモデルへ発展している．

4. manpower 計画，昇進モデル

会社の社員の昇進をマルコフ・モデルでモデル化した一連の研究が Bartholomew を中心にかなり活発に行なわれている．このモデルの特徴は，単なる記述モデルではなく，ある目的を達成するためのコントロールの概念が入っていることで，そのため線形計画法，二次計画法，動的計画法などのORの手法が応用できる．また吸収的マルコフ連鎖を表面に出しているのもひとつの特徴である．さすが Bartholomew 先生が中心だけあって，これの基本モデルはよく洗練されており，したがってバリエーションもつくりやすい．今後の発展が期待される．このモデルに関する1973年頃までの研究は Bartholomew の本〔26〕にくわしい．それ以後の研究としては文末の参考文献にあげたようなものがある．増田伸爾〔32〕にもこのモデルが紹介されている．

この昇進モデルの基本的な形はつぎのようなものである．会社の社員を役職・年齢などによってクラスに分けそれらのクラスを一時的状態，退職を吸収状態とする吸収的マルコフ連鎖を考える．このモデルを使って，将来にわたって望ましい社員の構成比を維持するには，新入社員をどのように採用し，また昇進の割合をどのようにしたらよいかを調べようというのである．コントロール可能な変数が何であるか，また望ましい社員の構成比とはどんなものか，ということによってモデルにはいろいろのバリエーションがある．ここではその簡単なものを紹介しよう．

社員のクラスを1から n までとし，つぎの記号を用いる．

$x_i\ (t)$：t 期にクラス i にいる社員の数

$u_i\ (t)$：t 期にクラス i に入る新入社員数

$p_{ij}(t)$：t 期にクラス i にいた社員のうち，$t+1$ 期にクラス j へ推移する社員の割合

$x(t)$, $u(t)$, $Q(t)$ をそれぞれ $x_i(t)$, $u_i(t)$, $p_{ij}(t)$ を要素とする行ベクトル，正方行列とする．ここで $p_{ij}(t)$ を j について加えたものは1を越えず，この和と1との差は t 期にクラス i にいた社員のうち $t+1$ 期に退職する割合である．これらの記号を使うと基本関係式

$$x\,(t+1)=x\,(t)\ Q\,(t)+u\,(t)$$

が得られる．

〔構成比の極限分布〕 最初に $Q(t)$ と $u(t)$ が一定の場合を考えよう．このとき $x(t)$ は，

$$x=u\,(I-Q)^{-1}$$

に収束することは容易に確められる．では，会社の規模がだんだん大きくなり，社員の数も増加していくときはどうであろうか．この状況をみるためには，

$$Q\,(t)=Q,\ \ u\,(t)=\alpha^t u$$

という場合を考えるのがよいであろう．ここで α は1より大きいスカラーである．$y\,(t)=x\,(t)/\alpha^t$ というベクトルを導入すると，$y\,(t)$ は，

$$y=u\,(\alpha I-Q)^{-1}$$

に収束することがわかる．したがって $x(t)$ は近似的に，

$$\alpha^t y=\alpha^t u\,(\alpha I-Q)^{-1}=u(t)(\alpha I-Q)^{-1}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

となる．つまり社員の数は毎期およそα倍になるが，その構成比はある極限に近づいていく．

上のことは$\alpha<1$のとき，すなわち会社の規模が縮小していくときにもある程度成り立つが，αが小さすぎると極限ベクトルが存在しないこともある（正確には，αがQのどの固有値よりも大きければ極限は存在する）．

〔望ましい構成比の維持〕 望ましい構成比ベクトルyが与えられたとき，その構成比を維持していくためには新入社員ベクトル$u(t)$，昇進行列$Q(t)$をどのようにコントロールしたらよいかというのが問題である．ここでは簡単な場合，すなわち前と同様に，

$$Q(t)=Q,\ u(t)=\alpha^t u$$

の場合を考えよう．すると $y=u(\alpha I-Q)^{-1}$

すなわち，

$$u=\alpha y-yQ$$

という関係が満たされなければならない．

αとQが与えられている場合にはこの関係式からuが一意的にきめられる．しかしベクトルuは非負でなければならないから，α，y，Qのどんな組合せに対してもこの関係を満たす非負ベクトルuが存在するとはかぎらない．つまり，uだけをコントロールして望ましい構成比ベクトルyを実現できるとはかぎらない．

Qとuの両方が自由にコントロールできる場合には，上の関係を満たすuとQの組があることは容易にわかる（極端な場合としては，$Q=I$，$u=(\alpha-1)y$とすればよい）．しかし現実の問題では，Qはコントロールできるといっても無制限にできるわけではなく，ある狭い範囲の中で動かすことができるだけであろう．Qの許容範囲が与えられたとき，上の関係を満たすuがあるかどうかを判定し，もしいくつもの可能性があるときには最適なQとuの組を見つける問題は，線形計画法や二次計画法をつくって定式化し，解くことができる．

〔望ましい構成比へ到達させること〕 $x(0)$が望ましい構成比から外れているとき，望ましい構成比になるように$u(t)$と$Q(t)$をコントロールする問題は興味ある問題である，望ましい社員ベクトルがx^*であったとすると，$Q(t)$の許容範囲が与えられたとき，$x(0)$からx^*へ到達するストラテジーを求めるのに動的計画法を用いることができる．たとえば，$Q(t)$の許容範囲がDであったとする（Dは準確率行列の集合である）．すると最短時間でx^*へ到達するには，つぎのようにX_sというベクトルの集合をつぎつぎとつくっていけばよい．

$$X_0=\{x^*\}$$

$$X_{s+1}=\{y\,|\,y=xQ+u,\ x\in X_s,\ Q\in D,\ u\geqq 0\}$$

Dに含まれるすべてのQに対して，$n\to\infty$のとき$Q^n\to 0$という性質があるとすると，$x(0)$はどれかのX_sに含まれることが証明できる．このことから，$x(0)$からx^*へ最短時間で到達するストラテジーが動的計画法を用いて求められることがわかる．目的関数が最短時間でなくとも，たとえば$Q(t)$の理想的な値Q^*からのずれを含んだ目的関数などの場合にも，動的計画法を使って定式化することが可能となろう．

5. 地理学におけるマルコフ・モデル

地理学の分野におけるマルコフ・モデルに関する論文は Collins, Drewett and Ferguson〔34〕の文献リストにほとんど網羅されている．この分野では人の動きに関するものに，マルコフ・モデルがよく使われている．土地利用の変化，人口分布，居住地の構造，輸送ネットワーク，などにその応用が見られる．一方，物理的な地理学の分野での応用は少ない．これらについては上記〔34〕と Gudgin and Thornes〔35〕を参照されたい．

この分野でマルコフ・モデルを応用するときの困難のひとつは，対象が2次元平面的であるため，状態の選び方がむずかしい点である．地理学であつかう現象の多くは“隣り”の影響を強くうけているが，この影響をマルコフ・モデルにどのように反映させるかがポイントになる．

またマルコフ・モデルは“push out”を表現しているが，この分野では“pull in”による変化も多く見られる．これも，今後マルコフ・モデルにどのように取り入れていくかが問題になろう．

Bartholomew〔33〕のコメントにあるように，この分野におけるマルコフ・モデルには，まだマルコフ性や推移確率の定常性，推移確率の推定誤差などに対するきびしい問いかけが欠けているようである．mover-stayer モデルがこの分野ではあまり話題にならないのも，そのためであろう．まだ開拓が進んでいないだけに，将来が楽しみである．

6. 社会移動

社会移動におけるマルコフ・モデルも，前記の所得分布や企業規模分布のマルコフ・モデルとほぼ同じ程度の歴史をもっている．ここでは職業移動分析などで将来の職業分布を予測したり，いろいろな mobility index を計算したりするのにマルコフ・モデルが使われている．mover-stayer モデルも社会移動モデルの中から生まれてきたものである．

しかし社会学の分野であつかうデータは，5年単位，10年単位というのが多く，なかには世代単位というのもある．そのためモデルの良し悪しについては，観念的な議論はできても，データに問いかけて判断するというこ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

とはあまり行なわれていないようである．社会移動におけるマルコフ連鎖の応用については原純輔〔36〕によくまとめてある．興味のある読者はこの本をお読みいただきたい．

まとめ

経済学の分野を中心にマルコフ・モデルを概観してみたが，ここで気がつくことは，マルコフ・モデルは簡単そうに見えて，その実，なかなか応用のむずかしいモデルであるということである．マルコフ・モデルは状態の変化をモデル化しているわけであるが，だからといって状態が変化するシステムは何でも単純なマルコフ・モデルでモデル化できるというわけではない．マルコフ性も必要だし，推移確率の定常性（または非定常モデルでは期毎の推移確率）も必要である．上で見てきたどの応用の対象にも状態の変化というものは存在していた．したがって短絡的にマルコフ・モデルが使われたのだろう．モデル化の出発点としてはこれでもよいのかもしれない．しかし，一度マルコフ・モデルをつくったならば，データと照らし合わせて，マルコフ性や推移確率の定常性をチェックしてみることが必要である．もしこれらの性質が成り立たないならば，モデルを改訂していかなければならない．そのやり方にはいろいろあるであろう．mover-stayer モデルや非定常推移確率をもつモデルもそのひとつである．所得分布のところで指摘したように状態の lumping が原因となってマルコフ性が成り立たない場合には状態の定義自身を変えることも必要となるであろう．筆者の感じでは，工夫さえすればかなりのものが，モデルを改良してデータによりよく合うモデルをつくり出せそうである．

ところで，よいモデルというのは当然のことながら現象をよく表現したモデルである．ではどのようなモデルがよいマルコフ・モデルになりやすいかというと，〔37〕で指摘したように，自然な構造をもったマルコフ・モデルがよいモデルになりやすいのではないかと思う．自然な構造をもったモデルというのは，企業規模分布の応用例で紹介した Hallberg〔19〕のモデルのように推移確率が外からの変数の関数になっているとか，〔37〕の中であげたＧＲＰ効果分析のように，推移確率自身の間に構造を示す関係が入ったものである．ブランド選択モデルの中で紹介した Kuehn のモデルもその中に入ってくるであろう．構造が入っていれば，推移確率の意味もはっきりしてくるし，推移確率を推定するときにも推定誤差を小さくおさえるのに役立つ．また推移確率の定常性にもこだわる必要がなくなってくる．

もうひとつ，よいマルコフ・モデルになる要因として昇進モデルのように，状況の記述だけでなくコントロールの概念が入っていることがあげられる．Kuehn のモデルにもこれが入っている．コントロールが入ってくれば各種の数理計画法なども使える状況が出てくるであろうし，モデルがカバーしうる範囲もずっと広がるであろう．今後，いろいろなパターンのコントロールを入れたマルコフ・モデルが理論的に研究されていくことになろう．今後もいろいろな方面でマルコフ・モデルが活躍することを夢みながら筆を置くことにする．

参考文献

〔ブランド選択モデル〕

〔1〕Ehrenberg, A. S. C., "An appraisal of Markov brand-switching models," *Journal of Marketing Research*, **2** (1965), 347-362.

〔2〕 ——, "On clarifying M and M," *Journal of Marketing Research*, **5** (1968), 228-229.

〔3〕Ezzati, A., "Forecasting market shares of alternative home-heating units by Markov process using transition probabilities estimated from aggregate time series data," *Management Science*, **21** (1974), 462-473.

〔4〕Herniter, J. D., "An entropy model of brand purchase behavior," *Journal of Marketing Research*, **10** (1973), 361-375.

〔5〕Howard, R. A., "Stochastic models of consumer behavior," *Journal of Advertising Research*, **3** (1963), 35-42.

〔6〕Lipstein, B., "Test marketing : a perturbation in the market place," *Management Science*, **14** (1968), B-437-B-448.

〔7〕Massy, W. F. and D. G. Morrison, "Comments on Ehrenberg's appraisal of brand-switching models," *Journal of Marketing Research*, **5** (1968), 225-228.

〔8〕Sheth, J. N., "A review of buyer behavior," *Management Science*, **13** (1967), B-718-B-756.

〔9〕Styan, G. P. H. and H. Smith, Jr., "Markov chains applied to marketing," *Journal of Marketing Research*, **1** February (1964), 50-55.

〔10〕吉田正昭，村田昭治，井関利明，消費者行動の分析モデル，丸善（1969）．

〔所得分布〕

〔11〕Champernowne, D. G., "A model of income distribution," *The Economic Journal*, **63** (1953), 318-351.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

〔12〕McCall, J. J., "A Markovian model of income dynamics," *Journal of the American Statistical Association*, **66** (1971), 439-447.
〔13〕Shorrocks, A. F., "Income mobility and the Markov assumption," *The Economic Journal*, **86** (1976), 566-578.
〔14〕Vandome, P., "Aspects of the dynamics of consumer behavior," *Bulletin of the Oxford University*, Institute of Statistics, **20** (1958), 65-105.
〔企業規模の分布〕
〔15〕Adelman, I. G., "A stochastic analysis of the size distribution of firms," *Journal of the American Statistical Asscociation*, **53** (1958), 893-904.
〔16〕Colman, D. R., "The application of Markov chain analysis to structural change in the northwest daily industry," *Journal of Agricultural Economics*, **18** (1967), 351-361.
〔17〕Collins, N. R. and L. E. Preston, "The structure of food-processing industries 1935-55," *Journal of Industrial Economics*, **9** (1960-61), 265-279.
〔18〕——, "The size structure of the largest industrial firms, 1909-1958," *The American Economic Review*, **51** (1961), 986-1011.
〔19〕Hallberg, M. C., "Projecting the size distribution of agricultural firms——An application of a Markov process with non-stationary transition probabilities," *American Journal of Agricultural Economics*, **51** (1969), 289-302.
〔20〕Ijiri, Y. and H. A. Simon, "Business firm growth and size," *The American Economic Review*, **54** (1964), 77-89.
〔21〕——, "A model of business firm growth," *Econometrica*, **35** (1967), 348-355.
〔22〕Krenz, R. D., "Projection of firm numbers for North Dakota with Markov chains," *Agricultural Economics Research*, **16** (1964), 77-83.
〔23〕McClean, S., "Some models for company growth," *Journal of Royal Statistical Society*, Ser. A, 139 (1976), 501-507.
〔24〕Preston, L. E. and E. J. Bell, "The statistical analysis of industry structure : An application to food industries," *Journal of the American Statistical Association*, **56** (1961), 925-932.
〔25〕Simon, H. A. and C. P. Bonini, "The size distribution of business firms," *The American Economic Review*, **48** (1958), 607-617.
〔Manpower 計画，昇進モデル〕
〔26〕Bartholomew, D. J., *Stochastic Models for Social Processes*, second edition, John Wiley & Sons, London (1973).
〔27〕Davies, G. S., "Consistent recruitment in a graded manpower system, "*Management Science*, **22** (1976), 1215-1220.
〔28〕Grinold, R. C. and R. E. Stanford, "Optimal control of a graded manpower system," *Management Science*, **20** (1974), 1201-1216.
〔29〕Marshall, M. L., "Equilibrium age distributions for graded systems," *Journal of Royal Statistical Society*, Ser. A, 138 (1975), 62-69.
〔30〕McClean, S., "The steady-state behaviour of a manpower planning model in which class corresponds to length of service," *Operational Research Quarterly*, **28** (1977), 305-311.
〔31〕Vassiliou, P. C. G., "A Markov chain model for wastage in manpower systems," *Operational Research Quarterly*, **27** (1976), 57-70.
〔32〕増田伸爾，"採用・昇進・退職のORモデル，"オペレーションズ・リサーチ，**21** (1976), no. 2, 104-107.
〔地理学〕
〔33〕Bartholomew, D. J., "Comments on Markov models in geography," *The Statistician*, **24** (1975), 175-177.
〔34〕Collins, L., R. Drewett and R. Ferguson, "Markov models in geography," *The Statistician*, **23** (1974), 179-209.
〔35〕Gudgin, G. and J. B. Thornes, "Probability in geographic research : Applications and problems," *The Statistician*, **23** (1974), 157-177.
〔社会移動〕
〔36〕原　純輔，"マルコフ連鎖と社会移動"，安田三郎編 "社会学講座，第17巻，数理社会学，"第4章，東京大学出版会 (1973).
〔その他〕
〔37〕高橋幸雄，"マルコフ・モデルの応用とその問題点，" 経営科学，18巻，5・6号 (1974), 181-190.

たかはし・ゆきお　1944年生
1972年東京工業大学大学院博士課程修了
東京工業大学助手を経て
現在，東北大学助教授（経済学部経営学科）

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．