

カルマン・フィルターの 洪水予測への応用

日 野 幹 雄

1. 序 論

a) 降雨と流出

雨が降れば、川の水が増すということに、われわれはなんの疑問ももっていない。しかし、この現象が科学の対象として誕生したのは、いまから約 200 年前くらいである。数年前「水文学 200 年祭」という国際行事が行なわれた。これは、フランスのある地方で流域に降る雨量とそこから流れ出る水量をはかって、それらがほぼ等しいことを実証したことを記念したものである。余談であるが、ヨーロッパの人々はそれまでは川の水は地下の水瓶から湧き出ると信じていたという。雨が少ないにもかかわらず蕩々と流れるライン川やところどころに湧き出ている泉を見ると、なるほどと思われる。しかし、ライン川の水は地下の水瓶からではなく、実はアルプス山中の雪氷の融水その他を集めてゆっくりと流れ下っているのである。

b) 洪水予測とは何か

洪水予測という場合、広く考えると上流での流量変化がわかる場合下流での流量変化を推定することも含まれるわけであるが、この現象は河道中における洪水波の伝播という物理的には明確な過程であり、流体力学的に厳密に計算が可能であるので普通は洪水追跡 (flood routing) とよばれ洪水予測とは区別される。洪水防御・洪水制御のうえから洪水追跡の研究はもちろん重要である

が、これは決定論的に求まってしまい学問的にも確立されている。

したがって、洪水の予測という場合、現時点までの降雨のデータが与えられた場合その流域からの数時間（場合によっては数日先）の河川流量を予測することをいう。現時点から数時間先にわたって洪水予測をする場合には、系への入力である降雨の予測が必要であり、実はこれがもっともむずかしい。しかし、幸いなことに、降雨の影響が流出としてあらわれるのは数時間ほど後であるので、この程度の予測時間ならば問題はない。

洪水予測といっても、国によりその意味するところが違っている。わが国の場合、降雨の影響は 1 時間ないし数時間程度でピークに達する。これに対し、たとえばナイル下流部ではその流域の降雨はゼロであり、はるか上流部の雨期の影響が数十日かかって下流に伝わり、しかも洪水は数週間から数カ月つづく。米国やソ連・南米の大河川でも事情は同じである。

このように考えてくると問題は拡散するばかりであるから、本報文では主点をカルマン・フィルターの応用の観点にしぼり、わが国の河川あるいはその程度の規模の流域における洪水予測とかがき。しかも、予測の点からすれば、大河川における洪水予測よりもむしろむずかしいといえる。

c) 洪水予測の問題点

洪水予測法は次節に述べるように種々あるが、

従来の洪水予測では、過去の水文（降雨—流量）データからこれらの方程式のパラメータを推定しておき、それを用いて刻々の降雨信号から流量を推定するもので、場合によっては洪水追跡法によりさらに下流の洪水予測を行なっている。

洪水予測が意外に困難な問題であるのは、

i) 降雨の時間的空間的確率性

ii) 流出系の特性の確率性（機械的あるいは電気的な人工システムと異なり、大規模な自然システムでは系の構成要素の組み合わせとして系特性を記述することがむずかしく、かつ流出特性の変動が大きい）

iii) 強い非線形性、などの点である。

従来の予測システムには、こうした系の確率性を考慮し、流量データと予測値との誤差を feed back するということが欠けていた。

2. 流出方程式（システム方程式）^{1) 2) 3)}

フィルター理論を具体的問題に応用する場合、系の方程式を決定しておかなければならない。流出現象の場合、システム方程式は基本的にはつぎの3つのタイプに分類される。これらの基本モデルはさらに一般化や非線形への拡張がなされている。

流出計算の基本方式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{単位図法} \\ \text{貯留関数法} \\ \text{タンクモデル} \end{array} \right.$

a) 単位図法（積分型流出方程式）

単位図法は、応答関数によるデュアメル型積分であらわすものである。

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

あるいは、離散化して、

$$y(k) = \sum_{i=0}^I h(i) x(k-i) \quad (2)$$

これを非線形の場合に拡張したのが Volterra series や Wiener—Hermite 展開である⁴⁾。

$$y(t) = \int_0^{\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$+ \iint_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \cdots (3)$$

流出系の場合、幸いなことに2次の非線形項までとれば十分である。

最近話題の GMDH⁵⁾ は思想的には単なる Volterra series と異なるが、形式的にはこのグループに分類される。

単位図法は1932年アメリカの Sherman により提案された最初の流出モデルで、欧米などではこの線形モデルはきわめて有効であることが認められているが、わが国の河川は非線形性が強く直接適用には限界がある。

b) 貯留関数法

貯留関数法は、流域への有効降雨量 $R(t)$ と流出量 $Q(t)$ と貯留量 $S(t)$ との連続関係、

$$\frac{dS(t)}{dt} = R(t) - Q(t) \quad (4)$$

と貯留量 S と流出量 Q の関係、

$$S(t) = K Q(t) \quad (5)$$

を用いるものである。式(4)、(5)から Q に関する微分方程式が得られる。

$$K \frac{dQ}{dt} + Q = R \quad (6)$$

貯留 S と流出の関係に非定常効果と非線形性を考慮して、

$$S(t) = K_1 Q^n + K_2 \frac{dQ}{dt} \quad (7)$$

とすれば Prasad (1967) モデルとして、

$$K_2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + n K_1 Q^{n-1} \frac{dQ}{dt} + Q = R \quad (8)$$

が得られる。

この微分方程式型のシステム方程式をより高次に一般化したのが Kulandaiswamy and Subramian (1967) モデルである。

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n Q}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Q}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dQ}{dt} \\ = b_m \frac{d^m R}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dR}{dt} + R \end{aligned} \quad (9)$$

貯留関数法は式が単純なことや建設省土木研究所の提案であったこともあり、わが国では広く用いられている。ただし、方程式形からわかるように、降雨とともに流出がはじまってしまうので降雨開始時刻を一定時間ずらす必要がある。

単位図法は自然な流出があらわせるが単位図をあらわすパラメータの数 (Δt ごとの h の値) が多くなるし、貯留関数法は式は単純であるが、降雨開始の遅れ時間の設定や流出ピークまでの形を (低次のモデルでは) 表現し得ない。そこで、両法を結合した微積分型のシステム方程式も提案されている⁷⁾。

c) タンクモデル

タンクのモデルは最近菅原正巳氏によって提案されたもので、底部および側壁に流出口をもつタンクを直列・並列に並べて流出をあらわそうとするものである。タンクからの流出係数や側壁管の高さやタンクの配列をさまざまに変えて過去のデータに合うようにこれらを決定するものである。この決定は名人芸的でむずかしそうであるがひとつの川のモデルができるとほぼ同一規模の河川のそれは容易に決定しうるので意外に普及しつつある。

3. カルマン・フィルターの応用

a) 十分に活用されなかった流量データ

従来の洪水予測法は、降雨網からの降雨情報を用いて、流出方程式から流出量を予測するだけのものである。こうした場合、流量データは刻々得られているのにもかかわらず、数時間前に出された予報洪水量と、現在得られている洪水流量との差があっても (当然ある)、それがその場でただちに洪水予測に活用されることはなかった。このいわばもっとも信頼度の高い“予測と実測との誤差”という情報を利用しない手はない。これこそ制御理論、カルマン・フィルターの得意とするものである。

さて、流出系を記述する方程式を1つ選定した

表 1 カルマン・フィルターの適用法

推定すべき 状態変数	流出量 システム・ パラメータ	$\left(\begin{array}{l} \text{降雨強度不均一} \\ \longrightarrow \text{流出性(状態)変化} \\ \text{非線形流出方程式} \\ \longrightarrow \text{線形フィルター} \end{array} \right)$

として、カルマン・フィルター^{8) 9) 10)}を応用する場合に何を状態変数にとるかという問題がある。

b) 流出量の推定法

カルマン・フィルター本来の応用からすれば、推定すべき状態変数は流出量 $Q(t)$ である。この場合は、系の特性 (単位図や貯留関数の係数) はすでに求められている値にまちがいはなく、入力 (降雨) $R(t)$ と出力 (流量) 観測系にノイズがあるとの立場である。

c) 流出パラメータ同定法

しかし、洪水予測を困難にしているのは、降雨 R の誤差 (観測誤差と空間的不均一性と有効降雨年の変化) と流出特性の変化であり、これらはダムや下流の量水所での流量観測の誤差よりもはるかに大きい。流出特性は、季節や先行降雨・植生変化および自然的人為的地形変化によりいちじるしく変化する。また、洪水ごとの降雨強度空間分布の変化も結局は流出特性の変化とみなすことができる。こうした理由から、流出特性をあらわすシステム方程式の係数をカルマン・フィルターにより推定すべき状態変数に考える方法もある。いわばシステム同定にカルマン・フィルターを応用する方法である^{11) 12)}。

わが国の流出特性はすでに述べたように非線形性が強い。この場合流出方程式は非線形でも、その式は流出パラメータに関しては線形であるから、この第2の方法の場合には非線形系を線形フィルターで予測できるという利点もある。

この場合にカルマン・フィルターを適用するには、ひとひねりして流量を観測量、パラメータを

表 2 変数・方程式の読みかえ

流量 Q (状態 x)	→ 観測量 z
パラメータ a_n	→ 状態 x
流出方程式 $Q = F(R)$	→ 観測方程式

状態, 流出方程式をシステムパラメータの観測方程式などと読みかえる必要がある。

d) どちらの方法がいいか

同一の降雨・流出データに対して, 流出量をそのままフィルターで推定すべき状態変数とする場合と, ひとひねりして流出系のパラメータをフィルターで予測する方法を適用して比較した例はなく, どちらが有利かは判定はし得ない。おそらく流域特性の不安定な場合や過去の水文データがなく流出特性の不明な場合は後者が有利で, 一般には大差はないであろう。

e) 応用例^{7), 12)~16)}

システム方程式および観測方程式は, つぎのようにかけられる。

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma w(k) \quad (10)$$

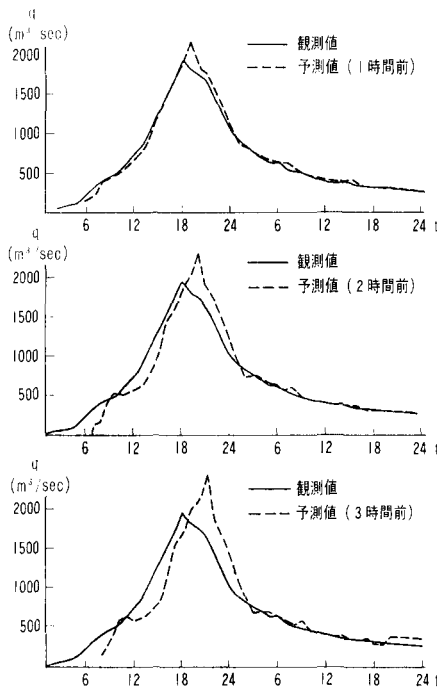


図 1

$$z(k) = Hx(k) + v(k) \quad (11)$$

流出方程式として, ARMA 型の表示式,

$$Q(k) = \alpha_1 Q(k-1) + \dots + \alpha_m Q(k-m) + \beta_1 R(k-1) + \dots + \beta_n R(k-n) + r(k) \quad (12)$$

を用いれば, 推定すべき状態ベクトル $x(k)$ はつぎのようになる。

$$x(k) \equiv [Q(k), Q(k-1), \dots, Q(k-m-1), R(k), \dots, R(k-n-1)]^T \quad (13)$$

$$z(k) \equiv [Q(k), R(k)]^T \quad (14)$$

また, 推定すべき状態は流出量 Q より, むしろシステムのパラメータであるという立場に立てば,

$$z(k) \equiv [Q(k), R(k)]^T \quad (15)$$

$$x(k) \equiv [\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n]^T \quad (16)$$

$$H \equiv [Q(k-1), \dots, Q(k-m), R(k-1), \dots, R(k-n)] \quad (17)$$

である。この場合は, 観測値は 1 次元であるので収束度を高めるには, 式(12)をくり返し用いて,

$$z(k) \equiv [Q(k), Q(k-1), \dots, Q(k-i), R(k), \dots, R(k-j)]^T \quad (15a)$$

とするほうがいい結果が得られる。

カルマン・フィルターによる洪水予測の一例を図 1 に示す。

参 考 文 献

[流出方程式]

- 1) 土木学会編 (1971): 水理公式集—昭和46年改訂版—
- 2) 吉川秀夫 (1966): 河川工学, 朝倉書店。
- 3) 金丸昭治・高棹琢馬 (1975): 水文学, 朝倉書店。
- 4) 日野幹雄 (1975): 非線形流出解析および適応流出予測, 1975年水工学に関する夏季研修会講義集, 土木学会水理委, A—8。
- 5) 池田三郎・樫木義一 (1975): GMDH (発見的自己組織化法) と複雑な系の同定・予測, 計測と制御, vol. 14, No. 2, pp. 185—195。
- 6) 藤田睦博 (1975): 線形系の解析, 1975年水工学に関する夏季研修会講義集, 土木学会水理委, A—7。
- 7) 日野幹雄・穴戸達行・石川和秀 (1975): カルマン・フィルターによる洪水予測の 2, 3 の例, 第19回水

理講演会論文集, pp.83—90.

[カルマン・フィルター]

8) Kalman, R. E. (1960): A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, vol. 28, p. 35.

9) Jazwinski, A. M. (1970): *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press.

10) 日野幹雄 (1973): Kalman の予測推定理論の平易な誘導について, 東京工大土木工学科研究報告, No. 15, pp. 91—99.

11) 相良節夫 (1969): 同定問題, 計測と制御, 第8巻, 4号.

[カルマン・フィルターによる洪水予測]

12) Hino, M. (1973): On-line prediction of hydrologic systems, *Proc. 15th Conference of IAHR, Istanbul*, pp. 121—129.

13) 日野幹雄 (1974): 水文流出系へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, 第221号 pp. 39—47.

14) 岩崎敏夫・西田吉男 (1976): カルマン・フィルターおよびGHDHによる流出計算の実際, 第31回土木学会年次講演会概要集, II—89, pp. 168—169.

15) Hino, M. (1976): Prediction of flood and streamflow by modern control and stochastic theories, *Proc. 2nd International IAHR Symposium on Stochastic Systems, held at Lund, Sweden*.

16) Todini, E. (1977): A CLS based adaptive model for the river Ombrone in Italy, *Tech. Rep. n. 56 Scientific Center of Pisa, IBM*.

ひの・みきお

1955年 東大工学部土木工学科卒

1967年 東京工業大学工学部助教授

1973年 " 教授

フォーラム

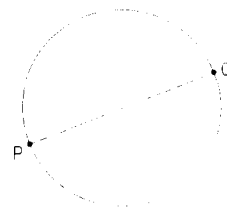
数理パズルを楽しもう (1)

フォーラム担当の編集委員から, 「パズルについて数回の連載をかくように」とのお話をいただき, 一服の清涼剤になればと思って, 喜んでお引き受けした。

ORでは, 問題の提起から定式化までのプロセスに, 実に柔軟な考え方が要求されるが[1], パズルを解くにもこの柔軟性は不可欠である。このため, ORを専門とする読者の中には, パズルを得意とする方も少なくないと思われるので, 少し骨のある数理的なパズルを古典などから精選してお届けする。なお, パズルの解は次号に掲載するので, ゆっくりと楽しんでいただければ幸いです。

定規とコンパスを用いて作図できる図形は, コンパスだけでも作図できる[2]。ここでは, 一定半径の円しか描くことが許されず, しかもお盆による作図であるから円の中心を知ることもしできない。これだけの制約が加わると, 出題の解は不可能のように思えるが, 実は見事な解法がある。本題の出典は次号で紹介する。

ここに, 1枚の紙, 1個のお盆, 1本の鉛筆がありお盆を紙の上に押えて鉛筆で周りをなぞると, 正確な円が描けるとします。円周上の1点Pを勝手に指定するとき, 直径上に向かい合った点Qは, どのようにして求められるでしょうか。ただし, 紙を折るなどのペテンは用いず, 完全に数学的に求めてください。



[1] チャーチマン, アコフ, アーノフ, オペレーションズ・リサーチ入門, 上巻, 紀伊国屋書店, 1960.

[2] コストフスキー, コンパスによる作図, 東京図書, 数学新書, 1964.

(中村義作 信州大学工学部)

FORUM