

経済予測へのカルマン・フィルターの 応用

宮 武 信 春

5年ほど前から、現代制御理論を経済系へ応用する試み^{1)~4),6),8),9)}が盛んに行なわれている。このおもな理由として、つぎの時代的背景が考えられよう。

- (1) 一般均衡理論に関連する理論的諸問題の解明と応用研究が進展した後、理論経済学者の関心が、経済系の制御とか政策の評価といった動学的分野に移り変わってきたこと。
- (2) 制御理論そのものが数値計算技法の進歩にともない応用分野を広げ、システムモデルの構成方法や非線形計画法などが普及するとともに、推定理論や最適制御理論が理論面で進歩してきたこと。
- (3) 制御工学者と数理経済学者の交流が盛んになり、予測と計画の理論としての双方の理論の共通性が強く認識されてきたこと。

これらの点から、経済系への制御理論の適用は、十分将来性があるものと考えてよいが、現在の研究の動向を見ると、理論面での適用研究が先行している⁴⁾。代表的な応用研究としては、経済系の安定化政策決定への最適制御理論の応用⁹⁾と経済予測への状態推定理論の応用^{2),3),8)}があげられる。本論では、後者の応用研究を取り上げ、カルマン・フィルターの適用の可能性をさぐりたい。

1. 経済系とカルマン・フィルター

カルマン・フィルターとは、一言で述べるな

らば、「確率的な離散型動的線形系 (Discrete Linear Dynamical System ; DLDS) の t 期までの入出力変数の観測データにもとづいて、 t 期の系の状態量を逐次決定的に最適推定する方法」であるといえる¹⁰⁾。カルマン・フィルターによる推定値は推定誤差の分散を最小とする意味で最適推定値となっている。確率的な DLDS は、つぎなる状態推移式(1)と出力観測式(2)で定義されている。

$$x_{t+1} = Fx_t + Gu_t + A\xi_t \quad (1)$$

$$z_t = Hx_t + B\eta_t \quad (2)$$

ただし、 u_t は入力変数、 x_t は状態変数、 z_t は出力観測変数であり、おのおの l, m, n 次元ベクトル量である。また ξ_t, η_t はシステムの外乱と観測の外乱を意味する確率変数である。カルマン・フィルターは、このような逐次決定的な構造をもつ多次元線形差分方程式系の状態量 x_t をその観測値 z_t にもとづいて推定する方法として開発されたものである¹⁰⁾。(1),(2)式は、もっとも一般的な線形系の表現であり状態方程式表現とよばれている。時系列分析で使われる自己回帰モデルや自己回帰移動平均モデルや通常の線形差分方程式も(1),(2)式で表現できる。これらの表現方法と各表現間の対応関係の研究は実現理論¹³⁾にくわしい。

カルマン・フィルターは表1に示すようないくつかのすぐれた特徴を備えており、おのおのがそ

表 1 カルマン・フィルターの特徴と応用分野

特 徴	応用分野
1. 少ない記憶容量で高速の推定が可能である。	化学プロセス
2. 刻々と得られる観測データにもとづくオンラインの逐次推定手法である。	軌道計算 大気汚染予測
3. 入出力の次数が少なく、状態の数が多い系について、未知の状態量を合理的に推定できる。	軌道計算 河川の流量予測 ガスクロマトグラフ
4. システムの構造変化（パラメータ変化）を学習的に追跡する。測定誤差に対するフィルタリングの機能がある。	原子炉の動特性 化学プロセス ロケットの軌道計算 高速道路交通流予測

の適用事例に生かされている。

カルマン・フィルターを経済予測に適用する場合、表 1 の特徴のうち 3. と 4. がとくに重要であり、研究事例によれば主としてつぎの 2 つのアプローチがある。

① 状態推定方法としての適用

事前に経済系のモデルを適当なパラメータ推

定手法で求めておき、このモデルを用いて状態推定をカルマン・フィルターで精度よく行なうことによって予測精度を高める。文献 (2), (3) は、この方法による。

② パラメータ推定方法としての適用

パラメータの逐次推定手法としてカルマン・フィルターを用いる。経済系のパラメータが時々刻々と変化するものと考え、観測データからモデル修正を行ない、そのモデルを用いて予測する。文献 ^{1), 12)} は、この方法による。

カルマン・フィルターは、DLDS のパラメータ (F, G, H, A, B) が所与のもとで、入出力の観測データ $\{u_t, z_t\}_{t=0}^T$ にもとづいて確率過程 x_t の最小分散推定値を求める状態推定方法であり、前者のアプローチはこの考えにしたがった適用方法である。後者のアプローチは、DLDS を適当な他の入出力表現形式で示したモデル（たとえば、自己回帰移動平均モデル）のパラメータを逐次推定する方法としてカルマン・フィルターを利用する

表 2 経済変数の区分

Type	No.	Name of Variable	Symbol	Nominal Line
Output variable	1	Gross National Expenditure	GNE	$GNE_t^0 = C_t^0 + I_t^0 + S_t^0 + X_t^0 + G_t^0 - M_t^0$
	2	Private Consumption Expenditure	C	$6577.5 \exp(0.0202t) = C_t^0$
	3	Private Fixed Capital Formation	I	$963.0 \exp(0.0359t) = I_t^0$
	4	Increase in Stock	ΔS	$172.0 \exp(0.0347t) = \Delta S_t^0$
	5	Exports	X	$725.0 \exp(0.0310t) = X_t^0$
	6	Imports	M	$649.7 \exp(0.0328t) = M_t^0$
	7	Price Index	P	$61.06 \exp(0.0097t) = P_t^0$
	8	Private Disposal Income	Y^d	$7385.05 \exp(0.0216t) = Y_t^{d0}$
	9	Income of Private Corporation	Y^c	$780.33 \exp(0.0289t) = Y_t^{c0}$
	10	Wage Rate	W	$248.78 \exp(0.0134t) = W_t^0$
	11	Export Price	P^x	$99.40 \exp(-0.00002t) = P_t^{x0}$
	12	Index of Unemployment	L^u	$L^u = L_t^{u0} - L, L_t^{u0} = 0$
Control variable	13	Tax of Private Corporation	T^c	$326.16 \exp(0.0280t) = T_t^{c0}$
	14	Private Tax	T^p	$468.65 \exp(0.0236t) = T_t^{p0}$
	15	Rate of Interest	i	$2.459 \exp(-0.0031t) = i_t^0$
	16	Government Expenditure	G	$2362.26 \exp(0.02295t) = G_t^0$
Data others variable	17	Import Prices	P^m	$114.50 \exp(-0.0028t) = P_t^{m0}$
	18	World Export Prices	P^{wx}	$87.86 \exp(0.00256t) = P_t^{wx0}$
	19	World Import	M^w	$70.75 \exp(0.0164t) = M_t^{w0}$
The others	20	Labour Power	L^l	$40.30 \exp(0.00363t) = L_t^{l0}$
	21	Number of Employee	L	$39.33 \exp(0.00387t)$

(Source : Research series vol. 21, Economic Research Institute, Economic Planning Agency, May 1970)

方法である。これらの2つのアプローチのおおのの事例を次節で紹介し、経済予測への適用の可能性をさぐりたい。

2. 短期マクロ経済予測への適用

日本経済の短期予測にカルマン・フィルターを

1) State transition equation

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} \begin{array}{c} \delta_x^C \\ \delta_{x_1}^N \\ \delta_{x_2}^N \\ \delta_{x_1}^S \\ \delta_{x_2}^S \\ \delta_{x_3}^S \\ \delta_x^V \\ \delta_{x_1}^M \\ \delta_{x_2}^M \\ \delta_x^P \\ \delta_x^{P-d} \\ \delta_x^{P-C} \\ \delta_x^W \\ \delta_x^{W-x} \\ \delta_x^{W-R} \\ \delta_x^{WNE} \end{array} \end{array} (t+1) = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \\ \begin{array}{cccccccccccccccc} .6213 & & & & & & & & & & .162 & & & & & \\ & 1.167 & 1. & & & & & & & & & .147 & & & & \\ & & .502 & 0. & & & & & & & & .216 & & & & \\ .042 & .042 & & .7491 & 1. & 0. & -.042 & .042 & & & & & & & & \\ .1224 & .1224 & & .1445 & 0. & 1. & .1224 & .122 & & & & & & & & \\ .123 & .123 & & .437 & 0. & 0. & -.123 & .123 & & & & & & & & \\ & & & & & & .7952 & & & & & & & 13.31 & & \\ & & & & & & & 1.225 & 1. & & & & & & & \\ & & & & .0144 & & & & .522 & 0. & & & & & & \\ 8.812 & & & & & & & & & .7452 & & .0147 & & & & \\ E-4 & & & & & & & & & & & & & & & \\ .1681 & .1681 & & .1681 & & & .1681 & .168 & & .2609 & & 16.15 & & & & \\ .0653 & .0653 & & .0653 & & & .0653 & .065 & & .7924 & .2.22 & & & & & \\ & & & & & & & & 1.271 & & .8863 & .5232 & & & & \\ & & 5.29 & & & & & & & & .0187 & .7764 & & & & \\ E-4 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 3.993 & 4.53 & & 3.993 & & & 3.993 & 3.99 & & & & & .7593 & & & \\ E-6 & E-5 & & E-6 & & & E-6 & E-6 & & & & & & & & \\ 1. & 1. & & 1. & & & 1. & 1. & & & & & & & & \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} \begin{array}{c} \delta_x^C \\ \delta_{x_1}^N \\ \delta_{x_2}^N \\ \delta_{x_1}^S \\ \delta_{x_2}^S \\ \delta_{x_3}^S \\ \delta_x^V \\ \delta_{x_1}^M \\ \delta_{x_2}^M \\ \delta_x^P \\ \delta_x^{P-d} \\ \delta_x^{P-C} \\ \delta_x^W \\ \delta_x^{W-x} \\ \delta_x^{W-R} \\ \delta_x^{WNE} \end{array} \end{array} (t)$$

$$+ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{cccc} & & & \\ .088 & & 2621 & \\ .4173 & & 1510 & \\ & & & .042 \\ & & & .1224 \\ & & & .123 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & 4.98 & \\ & 1. & & .1681 \\ & & 1891 & .0653 \\ & & & \\ & & & \\ & & & 3.993 \\ & & & E-6 \\ & & & 1. \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} \delta T^c \\ \delta T^p \\ \delta i \\ \delta G \end{array} (t) + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{array}{cccc} & & & .2411 \\ & & & 2.93 \\ & & & 42.71 \\ & & & \\ & 11.1 & -3.11 & 3.830 \\ 14.71 & & & 3.99 \\ 15.6 & & & \\ .0153 & & .0048 & \\ & & 24.67 & \\ & & 7.997 & \\ & & .6286 & \\ .0302 & & .0659 & \\ & & .159 & \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} \delta P^m \\ \delta P^{xw} \\ \delta W^m \\ \text{const.} \end{array} (t) + \text{NOISE}$$

図 1-1) 振動部のモデル (状態推移式)

適用した実験的研究⁸⁾を紹介する。この研究においては、経済企画庁の四半期データにもとづいて、つぎの手順にしたがって状態空間モデルの作成と経済予測を行なっている。

① 範囲の設定

経済系の挙動を表現するうえで必要最小限の変数を選択し、出力変数、政策変数、外生変数の形に分類整理する(表2)。

② モデル構造の設定

各変数の時系列データに対して、長期傾向をあらわす一定成長曲線($z_t^* = a \exp(\gamma t)$)を内挿によって求めノミナル値とする。このノミナル値と実測データ値(z_t)との差($\delta z_t = z_t - z_t^*$)が、多入力多出力の状態空間モデル(摂動モデル)であらわされるものとする。

③ サブシステムの同定

上記の摂動モデルのパラメータを最尤推定法によって求める。多入力多出力系をまとめてパラメータ推定せずに、サブシステムに区分して推定する。各サブシステムについて因果関係の適切さ、次数、パラメータ感度等を検討する。

④ トータルモデルの作成

各サブシステムを組み合わせ、摂動部の線形状態空間モデルを作成する。得られたモデルは、9入力(3外生 δv 、4政策 δu)、16状態 δx 、12出力 δz の状態空間モデルとなった(図1)。

⑤ 予測テスト

トータルモデルに対して、カルマン・フィルターとプレディクターを適用し、予測性能のテストを行なう。ここでは、1953年1期から1964年まで

をフォルタリング区間とし、その後を予測区間としている。用いた状態推定式と予測式は、つぎのとおりである。

状態推定式

$$\begin{aligned}\hat{\delta x}_{t/t} &= \hat{\delta x}_{t/t-1} + W_t(\delta z_t - H\hat{\delta x}_{t/t-1}) \\ \hat{\delta x}_{t+1/t} &= F\hat{\delta x}_{t/t} + G\delta u_t + A\delta v_t \\ P_{t/t-1} &= FP_{t-1/t-1}F^\top + BB^\top \\ P_{t/t} &= (I - W_tH)P_{t/t-1}\end{aligned}$$

ただし、

$$W_t = P_{t/t-1}H^\top(HP_{t/t-1}H^\top + CC^\top)^{-1}$$

予測式

$$\hat{\delta x}_{t_0+i/t_0} = F^i\hat{\delta x}_{t_0/t_0} + \sum_{k=1}^i F^{i-k}(G\delta u_{t_0+i-k} + A\delta v_{t_0+i-k})$$

ただし、 t_0 は予測開始時点、 $\hat{\delta x}_{t/t-1}$ は、 $t-1$ 期までのデータにもとづく t 期の δx_t の推定値を意味する。

予測テストの結果を予測された12個の出力変数のうちの代表的変数である民間消費支出と民間設備投資について示したものが、図2、図3である。この研究では、最尤推定法によって事前にモデルを作成し、状態推定をカルマン・フィルターで精度よく行なうことによって短期経済予測に成功している。

3. 時系列分析への適用

商品需要や価格変動などの時系列分析においては、通常自己回帰(ARモデル)や自己回帰移動平均モデル(ARMAモデル)等が一般に用いられ、モデルのパラメータ推定方法としては回帰分析法、Box-Jenkinsの方法^{9), 11)}などが用いられている。

しかし実際の問題では予測があたらない場合が多く、とくに最近の経済構造の大幅な変動によってこれまでのモデルが使用できなくなった例が多い。予測精度の劣化を構造変化の責任とすることは容易であるが、本来モデルを用いた予測はある程度普遍的なモデルを作成するのがその主旨であり、予測誤差の分析によって構造変化を早めに把握すべきで

図 1-2)

2) Output equation

$$\begin{aligned}\delta C(t) &= \delta x^C(t) + \text{NOISE} & \delta Y^d(t) &= \delta x^{Y^d}(t) + \text{NOISE} \\ \delta I(t) &= \delta x^I(t) + \text{NOISE} & \delta Y^c(t) &= \delta x^{Y^c}(t) + \text{NOISE} \\ \delta AS(t) &= \delta x^{AS}(t) + \text{NOISE} & \delta W(t) &= \delta x^W(t) + \text{NOISE} \\ \delta X(t) &= \delta x^X(t) + \text{NOISE} & \delta P^x(t) &= \delta x^{P^x}(t) + \text{NOISE} \\ \delta M(t) &= \delta x^M(t) + \text{NOISE} & \delta L^g(t) &= \delta x^{L^g}(t) + \text{NOISE} \\ \delta P(t) &= \delta x^P(t) + \text{NOISE} & \delta GNE(t) &= \delta x^{GNE}(t) + \text{NOISE}\end{aligned}$$

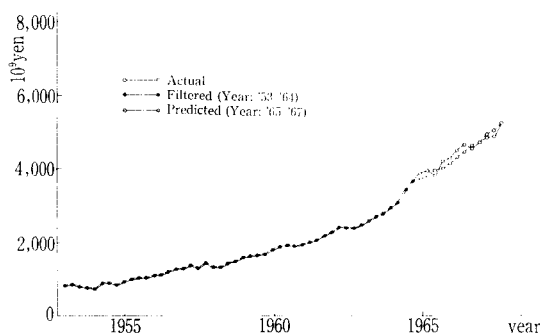


図 2 民間消費支出の予測結果

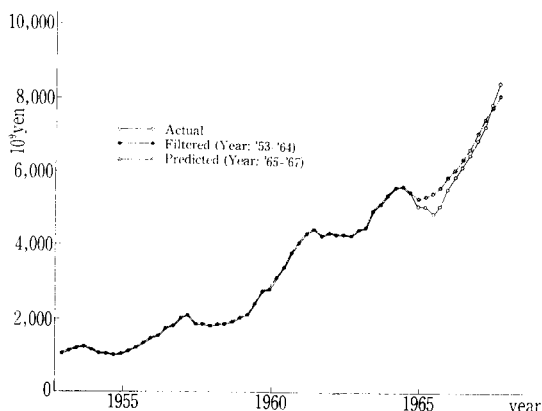


図 3 民間設備投資の予測結果

ある。

そこで本節では、パラメータの変化を観測データと予測値とのずれを用いて逐次的に追跡するような手法を紹介したい。一般に1入力1出力の状態空間モデルの入出力関係は、つぎなる ARMA モデルで表現できる。

$$z_t = \sum_{k=1}^m -a_k z_{t-k} + \sum_{k=1}^m g_k u_{t-k} + \varepsilon_t \quad t=m, m+1, \dots, N$$

ε_t は、誤差過程。 u_t , z_t は入出力変数。

もし、 (z_t, u_t) と ε_t が互いに独立で、 ε_t が平均 0 の独立な誤差過程であるならば、未知パラメータ $\theta = (a_1, a_2, \dots, a_m, g_1, \dots, g_m)$ は、最小二乗法によって次式で推定できる³⁾。

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=m}^N x_t x_t^\top \right)^{-1} \left(\sum_{t=m}^N x_t z_t \right)$$

$$x_t^\top = (z_{t-1}, \dots, z_{t-m}, u_{t-1}, \dots, u_{t-m})$$

このパラメータ θ が、各時点で random walk する場合を考えよう。

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \eta_t \quad E[\eta_t] = 0, \quad E[\eta_i \eta_j] = Q \delta_{ij}$$

この場合、 t 期までの入出力データにもとづく t 期のパラメータ推定値 $\hat{\theta}_t$ は、カルマン・フィルタを適用することによってつぎの adaptive な予測修正式で与えられる。

$$\hat{\theta}_{t/t-1} = \hat{\theta}_{t-1}$$

$$P_{t/t-1} = P_{t-1} + Q$$

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t/t-1} - P_{t/t-1} X_t [X_t^\top P_{t/t-1} X_t + \sigma^2]^{-1} \{X_t^\top \hat{\theta}_{t/t-1} - y_t\}$$

$$P_t = P_{t/t-1} - P_{t/t-1} X_t [X_t^\top P_{t/t-1} X_t + \sigma^2]^{-1} X_t^\top P_{t/t-1}$$

ここで σ^2 は、 y_t の観測誤差分散である。

上記の式を用いれば、パラメータの分散を適当に与えることによってパラメータの変化を逐次的に追跡できる。これは、従来の Adaptive Regression Model の拡張であり、需要予測¹⁾や計量政治学等の分野でも注目されている。Ozkan は、マクロ経済系のパラメータ推定に同様の方法を適用し妥当な成果を得ている¹⁾。薬師寺は、日本の自動車生産への政策介入分析にこの方法を適用している¹²⁾。この方法によれば、経済系の構造変化をパラメータの追跡によって予測できる可能性があり、今後の応用が期待できよう。また、パラメータ推定と状態推定を同時に最適推定する方法も研究が進められている⁷⁾。

ま と め

カルマン・フィルタは従来の計量経済学の予測方法と比べてつぎの2つの利点をもっており、経済予測に適用する際には、本論に紹介した2つの方法が考えられる。

- ① 数少ない入力変数の時系列データから数多くの状態変数を合理的に推定できる。
- ② 経済環境の変化に応じて構造式のパラメータを学習的に逐次推定する方法として利用できる。

今回紹介したマクロ経済モデルでは、状態の数は出力の数に比べてそれほど多くはない。これは、四半期モデルであるため相互依存的な関係が強く、長期の遅れをともなう動学的挙動を示す変数が比較的少ないことに起因している。しかし、従来の計量経済モデルでは、すべての状態変数が直接観測できるものとして予測を行なっている点で改善の余地があり、在庫投資や民間設備投資のような変量の短期の予測手法としては、カルマン・フィルターは有力である。

カルマン・フィルターは前述の利点をもっている一方まだまだむずかしい応用上の問題点をもっている。とくに、非線形な相互依存型の連立方程式体系には使えないこと、変数に制約があったり逐次決定型でも非線形な場合は、拡張型カルマン・フィルター等の複雑な推定アルゴリズムを用いる必要があること等の問題点がある。今回の報告では、まったく新規に状態空間モデルを構成して予測を行なっているが今後の実用化を考える場合、従来から各方面で使われている計量経済モデルの欠点を補う方向で、カルマン・フィルターを組み込んでいくことも考えられる。状態推定理論の経済系への適用は、*Econometrica* 等でも紹介されている⁸⁾ がまだ実験的段階である。理論的研究が先行している現在、実際のデータを用いた事例研究に期待するものである。

参 考 文 献

- 1) T. Ozkan, M. Athans : Application of Kalman Filtering Methods to Parameter Estimation of Macroeconomic Models, *Annals of Economic and Social Measurement*, Cambridge, Mass. (1975)
- 2) K. P. Vishwakarma : Macro Economic Regulation, A Control System Incorporating the Kalman Filter, Rofferdam University Press (1974)
- 3) 宮武信春, 茅陽一 : マクロ経済システムの同定と予測, 計測自動制御学会論文集, 11-6 (1975)

- 4) 青木正直 : 現代制御理論と経済学, 計測と制御, 13-9 (1974)
- 5) D. A. Hibbs, Jr. : On Analyzing the Effects of Policy Interventions, Box-Jenkins and Box-Tiao vs. Structural Equation Models, Research Paper, Department of Political Science, MIT (1974)
- 6) T. F. Cooley, K. D. Wall : Identification Theory for Time-Varying Models, Working Paper, National Bureau of Economic Research, Inc. (1976)
- 7) Y. Bar-Shalom : Optimal Simultaneous State Estimation and Parameter Identification in Linear Discrete-Time Systems, AC-17, IEEE (1972)
- 8) G. C. Chow : Multiperiod Predictions from Stochastic Difference Equations by Bayesian Methods, 41-1, *Econometrica* (1973)
- 9) R. S. Pindyck : Optimal Policies for Economic Stabilization, 41-3, *Econometrica* (1973)
- 10) R. E. Kalman, R. S. Bucy : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Journal of Basic Engineering* (1961)
- 11) 石崎純夫 : 需要予測事例 3 銀行業, 14-1, 事務管理 (1975)
- 12) T. Yakushiji : Dynamics of Interventions ; The Case of the Government and the Automobile Industry in Japan, Ph. D. Dissertation, Department of Political Science, MIT (1977)
- 13) 古田勝久 : システムの実現問題, 13-6, 計測と制御 (1974)

みやたけ・のぶはる

三菱総合研究所 研究員

昭和24年 香川県生まれ

昭和48年 東京工業大学制御工学科修士課程卒業

専門分野 : 制御理論, 交通計画, 経済予測, 意思決定分析