特集　カルマン・フィルター

# カルマン・フィルター適用上の問題点

石谷　久

カルマン・フィルターの特色はその簡明な逐次状態推定の定式化にあり，きわめて簡単な実時間演算により適当な推定を得られるという実用性から，今後多様な対象への適用が期待される．しかしこの実用的アルゴリズムも適用対象の問題設定を誤ると，誤った結果をみちびいたり取りあつかいが困難となる傾向がある．

本文ではこのフィルターを現実に応用する際，陥りやすい問題点や注意事項等を筆者の経験も含めて簡単に紹介したい．近年カルマン・フィルターについてはすぐれた解説書が多数出版されており[1)~5)]，その特徴や使用上の注意も十分紹介されているので，詳細については別途参照されたい．

## 1. 基本的特徴

周知のようにカルマンフィルターは適当な前提条件のもとで，さまざまな意味で最適な逐次状態推定値を与えるが[8)]，その本質および応用上の特徴はつぎの点に要約されよう．

(1) 線形モデルおよび加法性の多次元正規雑音を前提としているので，動特性による状態遷移後もその前提がくずれず，取りあつかいも容易であり，また最小二乗法が確率的意味をもつ．

(2) 事前情報にもとづいたベイズ的推定方式，すなわち状態変数の推定値の他にその分散をも推定し，つぎの観測情報を得たときにその分散を考慮して最尤値を求めるので，データの欠損時でも予測を含めて常時状態推定値を得るとともに，その質の評価も可能である．また逐次推定の計算式も容易に導出され，計算能率を損うことなくデータ蓄積とともに推定精度を向上できるので，観測が順次得られる場合の実時間推定に適している．

(3) 上記の定式化により，動的モデルにあらわれる系雑音の影響は状態推定値の確率遷移方程式を用いて容易に定式化でき，制御情報として必要な動的システムの逐次状態推定に適当である．

以上の特徴からこのフィルターはつぎのような状況の問題に適用したとき，もっともその効果を発揮する．

(1) 適当な事前情報（観測対象，動特性，誤差情報，状態量初期値）のもとで，逐次的に観測値が得られ，かつ（ある前提条件のもとで）最良な状態推定値を可能なかぎり短時間で得る必要がある場合．たとえばこの推定値が以後の制御則決定に反映されるような最適フィードバック制御系の一部を構成している場合に有効である．

(2) 対象系が線形形に定式化される場合．一般にこの仮定は成立しないが，線形近似を行なうため展開する基準軌道に十分近い軌道上の運動が実現され，線形化可能な場合に有効である．たとえばあらかじめ定められた目標軌道上を運動させるためにフィードバック制御が行なわれている系でこの制御を行なうために状態推定を行なう場合はこの条件が満たされる．


© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

(3) 状態推定を行なう時間的余裕が十分にあってかならずしもこのアルゴリズムを必要としないが，系雑音等が存在する場合，あるいはブロック化された独立な観測値が逐次与えられる場合．（制約条件つきの最小二乗推定アルゴリズム——一般にラグランジェの未定定数を導入する——は結局カルマン・フィルターを拡張したスムーザに一致する[4]．）

ロケットの誘導制御を行なうための実時間状態推定を行なう状況は上の条件をほぼ完全に満たしており，カルマン・フィルターがこの方面から有力な手法として有名になったのも当然のことと思われる．

筆者の関与する東大のロケット飛翔実験でも電波誘導方式を検討する際，その実時間軌道推定にまずこのフィルターを適用し，ほとんど標準的定式化で実用化が可能であった．適用対象ならびに目的を簡単に示すため[6]，**図1**，**図2**にM3Cロケット（現在M3Hロケット）の飛翔計画および誘導プログラムのタイムチャートを示す．この軌道推定結果にもとづいて姿勢制御基準を逐次修正するので，発後射60～170秒の間がとくに重要である．

第1段目は無誘導のため外乱の影響を受けやすく，フィルターは実質的には60秒から開始される．後述の問題および計算機能力を考慮して，0.1秒ごとのレーダーデータを20点まとめた代表値に対して，2秒ごとに逐次推定（ならびに誘導計算）を行なっている．前段ロケットの燃焼終了後（次段の制御修正がもっとも効果的で重要な時期にあたる．）の軌道長半径 $a$（軌道エネルギーをあらわし，自由落下中は一定であるが，制御上重要なパラメータである．）の推定結果を**図3**に示す．これは制御系の精度に比べ十分な推定精度（1/5以下）であった．

この例では，近距離にあるロケットを短時間のうちに制御するため，実時間性，すなわち推定速度とその安全性（観測値の欠落，異常データに対して致命的判断にいたることを防止すること）がもっとも重要であり，この点に関して教科書的利用では多少の困難が感じられる．

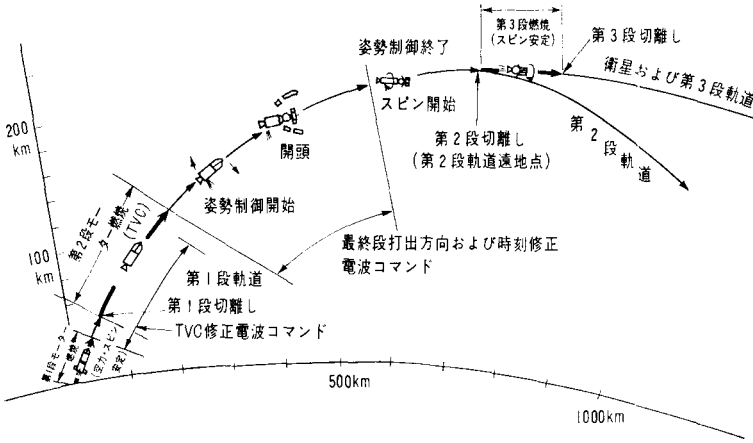


**図1** M3Cロケットの飛翔計画

TVC : Thrust Vector Control（推力軸制御）

注：電波誘導により TVC，または第3段打出し方向（スピン軸）の基準角度（ジャイロ系から与えられる）を修正し，衛星軌道精度を向上する．

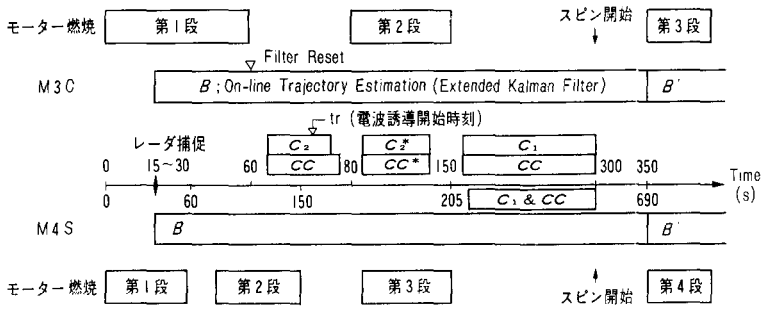


**図2** 誘導プログラムのタイムチャート例(秒時は概略値)

$B$; 実時間軌道推定（別に常時必要なデータ処理，燃焼停止した場合の落下点予測がレーダ捕捉期間を通じて行なわれている．）

$B'$; 衛星軌道の予測・表示

$C_1$; 最終段打出しに関する誘導計算・解の表示

$C_2$; 摂動による TVC 修正に関する誘導計算・解の表示

$CC$; Command 送信可能時間

$C_2$*; 第2段燃焼中の TVC 修正


© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

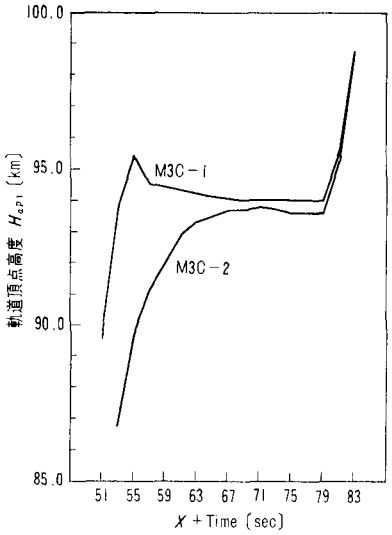


図 3-1　オンライン½段間軌道推定

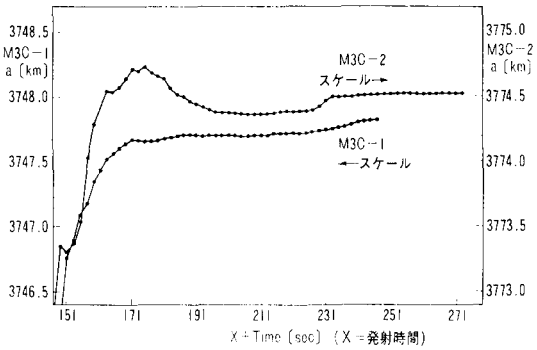


図 3-2　オンライン第2段自由飛翔軌道推定

これらの問題につき，その現象，要因，対応策等を具体的に示してみたい．なお惑星間飛翔の場合は長時間観測で精度が問題となる．宇宙計画におけるフィルター応用については，とくに実用的立場からの展望が文献 (7) に要約されているので参照されたい．

また，以後の説明のため，フィルターの基本式をつぎにまとめて示す．

対象系　$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{w}_k$　(1)

観測モデル　$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{H}_k\,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{n}_k$　(2)

ただし，$\boldsymbol{x}_k$，$\boldsymbol{y}_k$ はそれぞれ $t_k$ 時点の状態量，観測値を示す $n$，$m$ 次ベクトル．$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{n}$ はそれぞれ，系および観測雑音で平均 $\boldsymbol{o}$，分散はそれぞれ $Q$，$R$ とし，独立と考える．一般に(1)には既知の操作量が存在するが，推定モデルでは本質的でないので省略する．カルマン・フィルターは，観測値を得た時点で次式にしたがう．

$$P_k'=\boldsymbol{\Phi}_{k,\,k-1}\,P_{k-1}\,\boldsymbol{\Phi}_k{}^t{}_{,\,k-1}+Q_{k-1} \qquad (3)$$

$$K_k=P_k'\,H_k{}^t\,[H_k\,P_k'H_k{}^t+R_k]^{-1} \qquad (4)$$

$$P_k=P_k'-K_k\,H_k\,P_k' \qquad (5)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\,\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+K_k(\boldsymbol{z}_k-H_k\boldsymbol{\Phi}_{k,\,k-1}\,\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}) \qquad (6)$$

ここで $P_k$ は $\boldsymbol{x}_k$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ の分散（推定値）を示し，$\hat{\boldsymbol{x}}_o$，$P_o$ は与えられるものとする．逆行列演算が複雑になるが，(4) (5) はつぎの方程式

$$P_k{}^{-1}=[P_k']^{-1}+H_k{}^t\,R_k{}^{-1}\,H_k \qquad (4)'$$

$$K=P_k\,H_k{}^t\,R_k{}^{-1} \qquad (5)'$$

に置換できる．

## 2.　応用上の問題点と現実的対応

### 2-1.　線形仮定

現実に線形仮定が成立することはほとんどないが，非線形フィルターは実時間推定としては非現実的である．したがって一般に適当な基準軌道のまわりで線形展開を行ない，残差線形モデルに対してカルマン・フィルターを適用する．すなわち，

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \qquad (7)\ (8)$$

において，適当な基準軌道 $\boldsymbol{x}_o$，$\boldsymbol{z}_o$ を導入し，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_o+\Delta\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_o+\Delta\boldsymbol{z} \qquad (9)\ (10)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_o=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_o)\qquad \boldsymbol{z}_o=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_o) \qquad (11)\ (12)$$

とおき，残差項　$\Delta\boldsymbol{x}$，$\Delta\boldsymbol{z}$ の線形近次式

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}=[\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{x}o}\,\Delta\boldsymbol{x},$$

$$\Delta\boldsymbol{z}=[\partial\boldsymbol{g}/\partial\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{x}o}\,\Delta\boldsymbol{x} \qquad (13)\ (14)$$

に対してフィルターを適用する．したがって $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$ の $\Delta\boldsymbol{x}$ に関する2次以上の影響が無視できること，すなわち実際の軌道 $\boldsymbol{x}$ に十分近い $\boldsymbol{x}_o$ を用いる必要がある．カルマン・フィルターの特徴は，カルマンゲイン $K$ があらかじめ計算可能で実時間処理においては，単純な (6) のみを実行すればよい点にある．$\boldsymbol{x}_o$ が事前に定まらない場合は，すべての計算を実時間で行なう必要を生じ計算機にいちじ


© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

るしい負担を強いる他，その安定性等に問題を生じることになる．

現実に非線形の影響は，推定値のバイアスと誤差分布の歪，とくに分布の非対称性による平均値のバイアスや高次モーメントによる最尤値のバイアス等が問題になる[3]．$\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{n}$ の分布が十分知られている場合は，複雑な計算により歪んだ確率分布を求めながら真の最尤推定を行なうことも意味があるが，仮定にもとづく正規分布の歪を多量な計算により求めることは実用的ではない．

以上より図1の例においては，追尾開始（レーダー捕捉）時点$t_0$から一定の時間のデータにもとづいて飛翔状態を最小二乗推定で求め，これを$\boldsymbol{x}_0(t_0)$とし，以後各ステップごとの推定値(8)を新たな基準軌道$\boldsymbol{x}_0(t)$として線形近似を行なう拡張カルマン・フィルターを用いた．この場合モデルの非線形性は$P_0$または$R$の範囲内ではそれほど顕著ではない（残差項は平均して線形項の 1/100 程度）ことが確認されている．

さらに計算量を軽減するため，非線形性のとくに少ない(13)については，事前の予定軌道における値をあらかじめ計算して利用したが，結果に対する影響は認められなかった．前述のように飛翔前の予定軌道を$\boldsymbol{x}_0$として利用できれば実時間演算は簡単になるが，外乱の大きい場合非線形項による誤差が拡大する．とくに$R$が小さく$\Delta\boldsymbol{x}$が大きい場合は，十分に観測情報を活用できなくなるので(11)(12)の求解は不可欠である．なお非線形モデルを線形化する場合，状態量の選択の自由度が高く，この結果が必要計算量，推定精度に影響する．上例では(13)(14)の直交性の高い変数として観測値およびその微分値を状態変数に採用し，計算量を大幅に減少させた．なお拡張カルマン・フィルターは初期値が悪く($P_0$大)，$t_0$付近で推定が不安定な場合，$\boldsymbol{x}_0$も振動する傾向があるので注意を要する．

### 2-2. 前提条件の妥当性

推定問題において，正しいシステムモデル（観測機構を含む）の利用が重要なことはいうまでもなく，システム方程式(1)または(7)に誤りがあれば，当然推定値にバイアスを生じる．これは一般の回帰分析に共通な問題であるが，カルマン・フィルターにおいては，観測値の蓄積とともに$P$および$K$が減少する，すなわち観測にもとづく修正能力が低下する点に問題がある．モデルが誤っていて安定系（$\Phi$の固有値の実数部がすべて負）でない場合には推定値が真値から際限なくはずれてゆく現象（発散という）がおこる[3)8)]．

モデルに誤差のある場合の発散現象については文献(8)に検討されており，発散を防止するため適当な$Q$の導入が有効なことが示される．実際(1)の誤差は無定位の$\boldsymbol{w}$で吸収可能であり，式を近似した場合には当然$\boldsymbol{w}$，したがって$Q$の導入が必要である．発散は別として推定値のバイアスも問題となるが，これは$\bar{\boldsymbol{w}}=\bar{\boldsymbol{n}}=0$でない場合以外に$P_0$，$Q$，$R$に誤差が存在するときも生じ得る．

一般の回帰分析でも同じ問題があるが，少なくともカルマン・フィルターで用いる仮定(線形モデル，白色ガウス性雑音）であれば十分検定する手法が存在する．文献(9)他に，推定残差項$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{z}_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$の独立性を用いて最適性を検定し，棄却された場合$Q$，$R$を推定して修正するという適応フィルターが示される．このような操作が可能であれば非常に有効であるが演算量が多く，少なくとも前例の場合実時間処理は困難であった．検定を行なうには本質的にデータを集積して一括処理する必要があり，カルマン・フィルターの利点が損なわれる．また従来提案された適応フィルターは定常状態を対象としているが，現実に実時間推定を要求される場合は過渡的な状態変化が必要であって，事後的に誤差を知っても活用しにくいことが多い．

なお現実の観測系では調整不良等にもとづく未知のバイアス誤差がかならず存在し，$\bar{\boldsymbol{n}}=0$が満たされない．このときは一般にそのバイアスを状態量として，同時に推定すればよいとされている


© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

が，軌道推定の例ではその初期分散$P_0$および$Q$（仮定による）でバイアス値はほとんど一意的に定まってしまい，実データから検出することは困難であった．

このように実用上可観測でない状態にあると，推定結果は一応得られるが，その値は仮定次第で，ある範囲内はいかようにも変化する．したがってバイアスが問題になる場合は，観測系の設定または選択段階で十分注意する必要がある．また実時間で推定を行なう場合は，$Q$，$R$が状況に応じて変動することが多い．（$R$が大きいとき，異常データが入りやすい．）

この点からも事前に仮定した定常的な$Q$，$R$を用いた$K$の事前計算値を用いることは危険が多い．したがって，その時点の$Q$，$R$を適当に仮定または検定しつつ，実時間演算でフィルターの計算を行なう必要があり，その場合も長時間のデータによる推定では危険が残る．

以上の点を考慮して，前例では一定時間のデータを蓄積し，簡単な多項式モデルに回帰してサンプルの$R$を推定し，この結果をフィルター演算に反映させるとともに，フィルター演算の負担を軽減している．この場合回帰モデルの適合性が高く，教科書的利用による結果とほとんど差がないことが確認されている．

### 2-3. 計算の安定性

カルマン・フィルターの計算(3)～(6)においては，正定値であるべき$P$が計算誤差の影響を受けやすいことがよく知られている[7]．事前に$K$まで求解する場合は，ソフトウエアで計算精度をあげることができ，また解の妥当性も検討できる．しかし実時間演算では，計算時間の制約から要求精度を事前によく算定し，効率よく定式化することが必要である．可観測で$Q=0$の場合は$P$は0行列に近づき，計算誤差の影響を受けやすくなるが，この$P$は全データを同時に用いた平滑による推定分散に等しいので一般の推定問題における擬逆行列の特異性と同じ問題となる．

フィルターではこの困難な計算を毎回行なう点に問題があり，実時間推定が必要でなければ平滑のほうが望ましい．$P$の特異性は，その固有値によってあらわされるが，浮動小数点演算では乗除算の桁落ちはないので，$P$の対角成分を正規化した$\boldsymbol{x}$の相関行列の固有値（正）の最大値$\lambda_1$と最小値$\lambda_n$の比が計算精度を算定する基準となる．本来可観測な系でも，データの取得状況によっては一時的に特異に近づくこともあり，生じ得るさまざまな状況について$\lambda_n/\lambda_1$が十分計算精度におさまっていることを確認する必要がある．

近年この問題に対してきわめて有効とされるSquare Root Filter[10]が注目を集めている．これは$P$を$\Lambda\Lambda^t$なる正定行列の平方に分解し，この$\Lambda$に対する漸式化を求めるもので，$\Lambda$の固有値は，$P$の固有値の平方根，すなわち前述の比が$\sqrt{\lambda_n/\lambda_1}$となるので，必要桁数は1/2でよいことになる．計算量は増加するが，2倍精度の計算より有利であろう．

$P$を正規化した相関行列の固有値は，状態変数の選択にも依存する．観測系が定まると$\boldsymbol{z}$は一意に定まるが，前述のように線形近似系では$\boldsymbol{x}$に任意性があるので$P$が特異になりにくいものを選ぶことが重要である．前例では計算の簡単な軌道パラメータ（$\Phi$が単位行列になる）を状態変数に選ぶと8桁必要なものが，観測値とその時間微分を選んだ場合は2桁に減少し，その精度の演算でほとんど同じ結果を得た．

現実的な対応法としては他に，$Q$を人為的に挿入して$P$を有限の値に留める考え方もある．これは一見情報を無駄するように見えるが，$P$が$O$ということは以後の観測値を利用しないことを意味するので，$Q$によって$P$の下限を設定するほうが最新の情報を重点的に利用する結果となる．$P=0$となってからなお観測をつづけたいという場合は$Q\neq 0$を仮定することに他ならない．Limited Memory Filter[3]も計算精度に関しては一般のフィルターと同じ問題があり，適当な$Q$を選択する


© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ほうがより現実的と思われる.

以上，計算能力に一定の限界がある場合の実時間推定の立場から，カルマン・フィルターをそのまま適用する場合の問題点を示した．これらの問題は対象の性質を十分把握して，適当な近似を用いた定式化や単純な処理を付加することにより，ほとんど推定結果に影響を与えず，安全性を高めしかも計算必要量のみを軽減する可能性が残されているように思える.

## 参考文献


1) R. S. Bucy & P. D. Joseph, *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*, Interscience Publishers, 1968.

2) H. W. Sorrenson, Kalman Filtering Techniques, *Advances in Control Systems* Vol. 3, Academic Press, 1966.

3) A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, 1970.

4) A. E. Bryson & Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Company, 1969.

5) 有本卓，カルマン・フィルター，産業図書，1977.

6) 野村，石谷，馬場，前田，科学観測衛星打上げにおける電波誘導方式，計測と制御. Vol. 14, No. 11. p. 836.

7) 西村敏充，米国の宇宙計画におけるカルマン・フィルターの応用 I，II，システムと制御，Vol. 18, No. 10, p. 560, No. 11, p. 613.

8) R. J. Fitzgerald, Divergence of the Kalman Filter, *IEEE. Trans.* Vol. AC-16, No. 6, p. 736.

9) R. K. Mehra, On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering, *IEEE Trans.* Vol. AC-15, No. 2, p. 175,

10) P. G. Kaminsky, A. E. Bryson and S. F. Schmidt, Discrete Spuare Root Filtering : A Survey of Current Technigues, *IEEE Trans.* Vol. AC-16, No. 6, p. 727.



いしたに・ひさし　1941年生

1964年　東京大学工学部電気工学科卒

1969年　東京大学宇宙航究研究所勤務

現在同助教授



© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.