

割 当 問 題

古 林 隆

割当問題は、ORの中でもっとも古くから知られている問題のひとつであって、いささか“こけ”がつきかけているといってもよいかもしれないが、割当問題の二面——最大割当問題と最適割当問題の両方を詳述した単行本はほとんど出版されていない。というのは、前者は組合せの問題としてあつかわれ、後者は線形計画問題（輸送問題）としてあつかわれることが多いからである。ここでは上述の二面にわたって、すでに知られていることを整理して記述するとともに、最近の話題のひとつであるマトロイド構造を導入した「独立割当問題」にもふれることにする。

1. 最大割当問題

1.1 問題の表現

2つの有限集合 N_1 , N_2 と $N_1 \times N_2$ の1つの部分集合 A が与えられているものとする。とくに断らないかぎり、
 $N_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$, $N_2 = \{1, 2, \dots, n_2\}$
 とする。

A の部分集合

$$X = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$$

がつぎの条件を満たすとき、 X を割当 (assignment) という。

- (i) $i_1, i_2, \dots, i_m$ のどの2つも互いに異なる。
- (ii) $j_1, j_2, \dots, j_m$ のどの2つも互いに異なる。

$$\partial_1 X = \{i_1, i_2, \dots, i_m\},$$

$$\partial_2 X = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$$

を用いることにすると、(i), (ii) はつぎのようにあらわすことができる。

$$|\partial_1 X| = |\partial_2 X| = |X| \quad (=m)$$

割当の中で、要素数最大のものを最大割当 (maximal assignment) という。

〈例 1.1〉 n_1 人の作業者と n_2 種類の作業があり、各作業者の担当可能な作業がわかっているとする。1人がたかだか1つずつ作業を担当するとして、できるだけ多く

の作業に、それを担当する作業者をきめるには、

$$A = \{(i, j) \mid \text{作業者 } i \text{ は作業 } j \text{ を担当することができる}\}$$

として、最大割当を求めればよい。

〈例 1.2〉 n 人の作業者と n 種類の作業があって、作業者 i が作業 j を処理する時間 t_{ij} が与えられているとする。全員が作業を終えるまでの時間が最小になるように、 n 人に1つずつ異なる作業を割り当てたい。すなわち、

$$\max_{(i,j) \in X} t_{ij}$$

が最小になるような大きさ n の割当 X を求めたい。このような問題をボトルネック型割当問題というが、これを解くには、最大割当問題をくりかえし解けばよい〔3〕,〔17〕。

2部グラフ $G(N_1, N_2; E)$ (N_1, N_2 は点の集合注1, E は枝の集合で、 $(i, j) \in E \Rightarrow i \in N_1, j \in N_2$ を満たしている) において、同一の点に接続しないように選んだ枝の部分集合をマッチング (matching) という。

$$A = E$$

とおくことによって、2部グラフにおけるマッチングと割当は同一視することができる。一例を図 1.1 にあげる。

つぎに、2部グラフに2点 s, t と、点 s から N_1 の各点に至る枝および N_2 の各点から点 t に至る枝をつけ加えた拡大グラフ $G^*(N^*, E^*)$ を考える。

$$(N^* = N_1 \cup N_2 \cup \{s, t\},$$

$$E^* = E \cup \{(s, i) \mid i \in N_1\} \cup \{(j, t) \mid j \in N_2\})$$

ここで、 E に属する枝の容量を ∞ 、その他の枝の容量を1とする。図 1.1 (a) の拡大グラフを図 1.2 に示す。このとき、点 s から点 t への最大流の中には、枝の流量が0または1のものが存在するが、そのような最大流は最大割当と1対1に対応する。すなわち最大割当問題は、 $G^*(N^*, E^*)$ における最大流問題と考えてもよい。

注1 N_1 と N_2 の同じ番号の要素(点)が混同される心配があれば、 N_2 の各要素には n_1 を加えておけばよい。

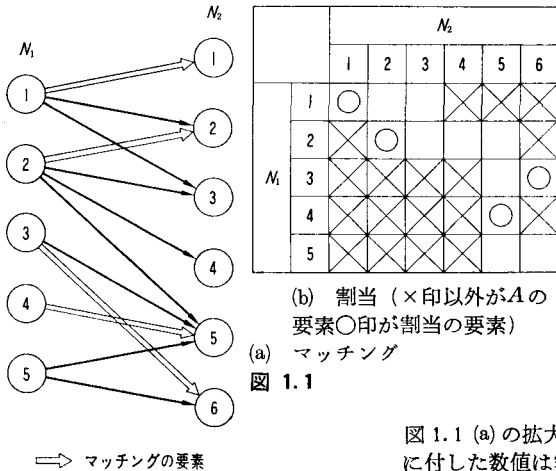


図 1.1

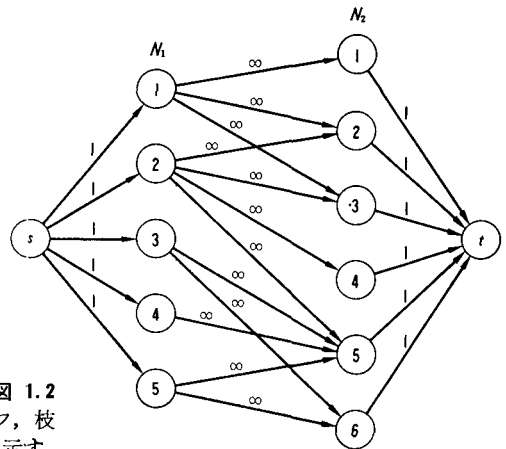


図 1.2

図 1.1 (a) の拡大グラフ, 枝に付した数値は容量を示す

1.2 解法

N_1 の要素と N_2 の要素が交互に並んでいる交互列 (マッチングの用語では, 交互路 (alternating path))

$R = (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_r, j_r)$ ($i_k \in N_1, j_k \in N_2$) が, つぎの条件を満たすとき, R は割当増加列 (マッチングでは増加路 (augmenting path)) であるという.

(i) $i_1 \notin \partial_1 X$.

(ii) $j_r \notin \partial_2 X$.

(iii) $(i_k, j_{k-1}) \in X$ ($k=1, 2, \dots, r-1$) ($r>1$ のとき).

R が割当増加列であれば,

$R^+ = \{(i_k, j_k) \mid k=1, 2, \dots, r\}$,

$R^- = \{(i_k, j_{k-1}) \mid k=2, \dots, r\}$ ($r=1$ のときは $R^- = \emptyset$)

において,

$X - R^- + R^+ \rightarrow X$

とすることにより, 大きさが 1 だけ大きい割当が得られる. 逆に, X が最大割当であれば, 割当増加列が存在しないことも示すことができる.

定理 1.1 割当 X が最大割当であるための必要十分条件は, X に関する割当増加列が存在しないことである.

上の定理より, 最大割当を求めるには, まず 1 つの割当を見つけて, それに関する割当増加列が存在するかどうかを調べ, 存在すれば大きさが 1 だけ大きい割当をつくるということをくりかえせばよい.

[A1.1]

手順 1 $X = \emptyset$ とする.

手順 2 X に関する割当増加列が存在するかどうか調べる.

(1) $N_{11} = N_1 - \partial_1 X$, $N_{10} = N_1 - N_{11}$, $N_{20} = \partial_2 X$,

$N_{21} = \emptyset$, $p_i = 0$ ($i \in N_{11}$) とする.

(2) N_{11} の要素を 1 つ選ぶ. それを i とする.

(3) $(i, j) \in A$ でかつ $j \in N_2 - \partial_2 X$ なる j が存在すれば, $q_j = i$ において, 手順 3 に進む (割当増加列が見つかった).

(4) $(i, j) \in A$ でかつ $j \in N_{20}$ であるすべての j に対して, $q_j = i$ とおき,

$N_{20} - \{j\} \rightarrow N_{20}$,

$N_{21} + \{j\} \rightarrow N_{21}$

とする.

(5) $N_{11} - \{i\} \rightarrow N_{11}$.

(6) $N_{11} \neq \emptyset$ ならば, (2) にもどる.

(7) $N_{21} = \emptyset$ ならば, 終了 (X は最大割当である).

(8) N_{21} の要素を 1 つ選ぶ. それを j とする.

(9) $(i, j) \in X$ である i に対して,

$p_i = j$ とおき,

$N_{10} - \{i\} \rightarrow N_{10}$,

$N_{11} + \{i\} \rightarrow N_{11}$

とする.

(10) $N_{21} - \{j\} \rightarrow N_{21}$.

(11) $N_{21} \neq \emptyset$ ならば, (8) にもどる.

$N_{21} = \emptyset$ ならば, (2) にもどる.

手順 3 割当の増加を行なう.

(1) (q_j, j) を X に加える.

(2) $i = q_j$ とおく.

(3) $p_i = 0$ ならば, 手順 2 にもどる. (割当の大きさが 1 だけ大きくなった).

(4) (p_i, j) を X から除く.

(5) $j = p_i$ において, (1) にもどる.

1.3 被覆

N_1 の部分集合 Y_1 , N_2 の部分集合 Y_2 の対 (Y_1, Y_2) 注2 がつぎの条件を満たすとき, (Y_1, Y_2) を (A) の被覆

(covering)という。

$$(i, j) \in A \Rightarrow i \in Y_1 \text{ または } j \in Y_2.$$

被覆の中で要素最小のものを最小被覆という。図 1.1 (b)に示した A では、 $\{1, 2\}$, $\{5, 6\}$ は被覆であり、最小である。被覆に関するいくつかの定理をあげておく。証明は、文献 [4], [5]などを参照されたい。

はじめに、 $\Gamma(Y_1)$ を次式で定義しておく。

$$\Gamma(Y_1) = \{j \mid i \in Y_1, (i, j) \in A\}.$$

定理 1.2 任意の $Y_1 \subset N_1$ に対して

$$(Y_1, \Gamma(N_1 - Y_1)) \text{ は被覆である.}$$

定理 1.3 (Y_1, Y_2) が最小被覆であれば、

$$\Gamma(N_1 - Y_1) = Y_2$$

定理 1.4 最小被覆の大きさは、

$$\min_{Y_1 \subset N_1} \{ |Y_1| + |\Gamma(N_1 - Y_1)| \}$$

に等しい。

系 最小被覆の大きさは、

$$|N_1| - \max_{Y_1 \subset N_1} \{ |Y_1| - |\Gamma(Y_1)| \}$$

に等しい。

$|Y_1| - |\Gamma(Y_1)|$ を Y_1 の不足度という。 $Y_1 \subset N_1$ についての最大値は非負である ($\emptyset \subset N_1$ であるから)。割当の大きさと被覆の大きさの間には、つぎの定理が成り立つ。

定理 1.5 任意の割当 X と任意の被覆 (Y_1, Y_2) に対して、

$$|X| \leq |Y_1| + |Y_2|.$$

系 任意の割当 X と任意の $Y_1 (\subset N_1)$ に対して、

$$|X| \leq |Y_1| + |\Gamma(N_1 - Y_1)|.$$

定理 1.6 (König の定理) 最大割当の大きさは、

$$\min_{Y_1 \subset N_1} \{ |Y_1| + |\Gamma(N_1 - Y_1)| \}$$

に等しい。

これは、グラフ $G^*(N^*, E^*)$ に、最大流=最小切断定理を適用することによって証明される[4]。

定理 1.7 (König-Egenvéry の定理) 最大割当の大きさは、最小被覆の大きさに等しい。

定理 1.6 と定理 1.4 より証明できるが、[A 1.1] を用いて最大割当を求めたときの最終段階で (手順 2(7)で終了したとき)、

$$Y_1 = N_{10},$$

$$Y_2 = \partial_2 X - N_{20}$$

注 2 $N_1 \cup N_2$ の部分集合と考えてもよい。ただし N_1 の任意の要素と N_2 の任意の要素は区別できるものとす。

とにおいて、つぎの事柄を示すことにより直接証明することもできる。

(1) (Y_1, Y_2) は被覆である。

(2) 手順 2 (11) で $N_{21} = \emptyset$ となり、(2)にもどるとき、

$$|N_{10}| = |N_{20}|$$

である。

(3) $|Y_1| + |Y_2| = |X|$ 。

1.4 N_1 の部分集合を飽和させる割当

N_1 のある部分集合 N_1' に対して、

$$N_1' \subset \partial_1 X$$

となる割当 X を、 N_1' を飽和させる割当という。

N_1 を飽和させる割当は、最大割当である。

定理 1.8 (König-Hall の定理) N_1 を飽和させる割当が存在するための必要十分条件は、 N_1 の任意の部分集合 Y_1 に対して、

$$|Y_1| \leq |\Gamma(Y_1)|$$

が成り立つことである。

定理 1.4 の系と定理 1.7 より証明できるが、 N_1 の大きさに関して帰納法を適用することによって証明することもできる[5]。

系 1 N_1 のある部分集合 N_1' を飽和させる割当 X が存在するための必要十分条件は、 N_1' の任意の部分集合 Y_1' に対して、

$$|Y_1'| \leq |\Gamma(Y_1')|$$

が成り立つことである。

系 2 N_1 のある部分集合 N_1' を飽和させる割当 X が存在するための必要十分条件は、 N_1 の任意の部分集合 Y_1 に対して、

$$|N_1' \cap Y_1| \leq |\Gamma(N_1' \cap Y_1)|$$

が成り立つことである。

定理 1.9 N_1 を飽和させる割当が存在しなければ、最小被覆 (Y_1, Y_2) に対して、

$$|N_1 - Y_1| > |\Gamma(N_1 - Y_1)|$$

が成り立つ。

定理 1.8, 定理 1.3 より証明できる。

他にも、いくつかの定理が、文献[4]に示されている。

2. 最適割当問題

2.1 問題の表現

つぎに、 A の要素 (i, j) に対して重み(費用) c_{ij} が定められている場合を考える。 X が割当であるとき、

$$c(X) = \sum_{(i,j) \in X} c_{ij}$$

を割当 X の重みという。

最大割当(または与えられた大きさの割当)の中で、重みを最小にするものを最割当 (optimal assignment) といい、最割当を求めよという問題を、最割当問題または単に割当問題という。

一般には、

$$|N_1| = |N_2| (=n \text{ とする}),$$

$$A = N_1 \times N_2$$

である ($A \ni N_1 \times N_2$ のときは、 $N_1 \times N_2 - A$ の要素 (i, j) に対して $c_{ij} = \infty$ とすればよい。)

〈例 2.1〉 〈例 1.2〉 において、処理時間の総和が最小になるように、1 人に 1 つずつ作業を割り当てなければ、

$$c_{ij} = t_{ij}$$

において、最割当を求めればよい。

〈例 2.2〉 ある製品について、 n 個の生産地と n 個の消費地がある。各生産地の生産量も各消費地の消費量も一定で等しいとき、総輸送費を最小にするような輸送計画を求めるには、生産地 i から消費地 j への製品単位あたりの輸送費を c_{ij} として、最割当を求めればよい。

このように、割当問題はヒッチコック型輸送問題の特殊な場合に当たっている (したがって、ネットワークにおける最小費用流問題の特殊な場合でもある。)

〈例 2.3〉 n 個の点から成るグラフ G において枝 (i, j) の長さ d_{ij} が与えられているとする。 G を、点も枝も共有しないいくつかの閉路に分割し、閉路の長さの総和を最小にしたい。このときは、

$$c_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & (i, j) \text{ が } G \text{ の枝であるとき,} \\ \infty & \text{その他,} \end{cases}$$

において、最割当を求めればよい。

最割当は、つぎの線形計画問題を解くことによって求めることができる。

$$\begin{aligned} [P] \text{ 条件} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

のもとで、

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

を最小にせよ。

問題 $[P]$ の最適解の中には、 x_{ij} が 0 または 1 であるものが存在する [7]。そのような最適解において、

$$\hat{X} = \{(i, j) \mid x_{ij} = 1\}$$

とおけば、 $\hat{X}$ は最適割当である。

$[P]$ の双対問題は、つぎのようになる注 3。

$[D]$ 条件 $v_j - u_i \leq c_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$,
のもとで、

$$w = \sum_{j=1}^n u_j - \sum_{i=1}^n v_i$$

を最大にせよ。

$[P]$ 、 $[D]$ に相補定理を適用すると、つぎの定理が得られる。

定理 2.1 $[P]$ の解 $x = \bar{x}$ が、 $[D]$ の 1 つの解 $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ に対して、

$$\bar{v}_j - \bar{u}_i < c_{ij} \Rightarrow \bar{x}_{ij} = 0 \quad (2.1)$$

を満たすならば、 $x = \bar{x}$ は $[P]$ の最適解である。(このとき、 $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ は $[D]$ の最適解である)

これよりつぎの 2 つの定理がみちびかれる。

定理 2.2 $[D]$ の 1 つの解 $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ が得られているとする。

$$\begin{aligned} \text{条件} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, n), \\ & x_{ij} = 0 \quad \text{または} \quad 1 \quad (i, j=1, 2, \dots, n), \\ & \bar{v}_j - \bar{u}_i < c_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0 \end{aligned}$$

のもとでの $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$ の最大値が n に等しいならば、この問題の最適解は、 $[P]$ の最適解である。

定理 2.3 $[D]$ の 1 つの解 $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ が得られているとする。

$$A = \{(i, j) \mid \bar{v}_j - \bar{u}_i = c_{ij}\}$$

とするときの最大割当 $\hat{X}$ の大きさが n に等しいならば、次式により定めた $x = \hat{x}$ は、 $[P]$ の最適解である。

$$\hat{x}_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in \hat{X}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

なお、 (c_{ij}) の第 i 行の要素すべてに α_i を、第 j 列の要素すべてに β_j を加えて、

$$c_{ij} + \alpha_i + \beta_j \longrightarrow c_{ij}$$

としても、最割当は変わらないから、一般に、

$$c_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j)$$

と考えておいてよい。

2.2 解法

一般のネットワークにおける最小費用流問題の解法はすべて、2 部グラフ用に直すことによって使えるが、こ

注 3 条件 $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ に対応する双対変数を $(-u_i)$ としている。

ここではプライマル・デュアル法にかぎって発展順に3つ紹介する。

[A 2.1] ハンガリア法 [1], [2]

手順1 [D]の初期解を求める。

- (1) $-(\min_k c_{ik}) \longrightarrow u_i (\forall i)$
- (2) $c_{ij} + u_i \longrightarrow \bar{c}_{ij} (\forall i, j)$
- (3) $\min_k \bar{c}_{kj} \longrightarrow v_j (\forall j)$
- (4) $\bar{c}_{ij} - v_j \longrightarrow \tilde{c}_{ij} (\forall i, j)$
- (5) $\sum_j v_j - \sum_i u_i \longrightarrow w$

手順2 $A = \{(i, j) | \tilde{c}_{ij} = 0\}$ として、最大割当 $\hat{X}$ を求める。 $|\hat{X}| = n$ ならば終了。

手順3 [D]の解を改良する。

手順2におけるAの最小被覆を (Y_1, Y_2) とする。

- (1) $\min_{i \in Y_1, j \in Y_2} \tilde{c}_{ij} \longrightarrow \theta$
- (2) $u_i - \theta \longrightarrow u_i (i \notin Y_1)$
- (3) $v_j - \theta \longrightarrow v_j (j \in Y_2)$
- (4) $\bar{c}_{ij} + \theta \longrightarrow \bar{c}_{ij} (i \in Y_1, j \in Y_2)$
- (5) $\tilde{c}_{ij} - \theta \longrightarrow \tilde{c}_{ij} (i \notin Y_1, j \in Y_2)$
- (6) $w + (n - |\hat{X}|) \theta \longrightarrow w$

手順2にもどる。

手順1を終了したとき、

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j \geq 0 (\forall i, j) \quad (2.2)$$

が成り立っていて、 $(\bar{c}_{ij})$ の各行各列には少なくとも1つ0が存在する。

手順3をはじめるときには、

$$\bar{c}_{ij} = 0 \Rightarrow i \in Y_1 \text{ または } j \in Y_2$$

が成り立っているから、 $\theta > 0$ である。また、終了したときにも(2.2)が成り立ち、 w の値は、

$$(n - |\hat{X}|) \theta (> 0)$$

だけ大きくなっているから、[D]の改良解が得られたことになる $(|\hat{X}| = |Y_1| + |Y_2|)$ であることに注意。

ただ、新たな $(\bar{c}_{ij})$ に対して手順2で最大割当を求めたとき、前回より $|\hat{X}|$ が大きくなるとは限らない。必ず前回より $|\hat{X}|$ が大きくなるようにするには、手順3をつぎのように改めればよい。

[A 2.2] 伊理の方法 [8], [9]

手順1, 手順2は、[A 2.1]と同じ。

手順3, (1) 2部グラフ $G(N_1, N_2; N_1 \times N_2)$ において、枝 (i, j) ($i \in N_1, j \in N_2$)の順方向の距離 d_{ij} および逆方向の距離 d_{ji} をつぎのように定める。

$$d_{ij} = c_{ij} \quad (i \in N_1, j \in N_2) \text{ 注4,}$$

注4 $\hat{X}$ に属する枝 (i, j) については、

$$d_{ij} = \infty \text{ としてもよい。}$$

$$d_{ji} = \begin{cases} -c_{ij} & (j \in N_2, i \in N_1, (i, j) \in \hat{X}), \\ \infty & (\text{その他}). \end{cases}$$

(2) $N_1 - \partial_1 \hat{X}$ に属する一点 i_1 からの最短距離を求める注5. $i \in N_1$ に至る最短距離を u_i , $j \in N_2$ に至る最短距離を v_j とする。ただし、

$$u_{i_1} = 0, \\ u_i = \infty \quad (i \in N_1 - \partial_1 \hat{X} - \{i_1\})$$

とする。

$$(3) \quad c_{ij} + u_i - v_j \longrightarrow \bar{c}_{ij} \quad (\forall i, j)$$

として、手順2にもどる。

手順3において、 i_1 から $N_2 - \partial_2 \hat{X}$ に属するある点への最短路が、

$$R = (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_r, j_r) \quad (j_r \in N_2 - \partial_2 \hat{X})$$

とあらわされるとする。

$$R^+ = \{(i_k, j_k) | k=1, \dots, r\},$$

$$R^- = \{(i_k, j_{k-1}) | k=2, \dots, r\} \quad (r=1 \text{ のときは } R^- = \phi)$$

とおくと、 $(d_{ij}), (d_{ji})$ の定め方から、

$$\hat{X} \cap R^+ = \phi, \quad R^- \subset \hat{X}$$

である。

$$\hat{X} - R^- + R^+ \longrightarrow \hat{X}, \quad (2.3)$$

$$w - c(R^-) + c(R^+) \longrightarrow w \quad (2.4)$$

とすることによって、大きさが1だけ大きい割当が得られる $(c(R^+) - c(R^-))$ は、 R の距離すなわち、 i_1 から j_r への最短距離である。したがって、手順3を行なった後の手順2は、最大割当問題を解かずに、(2.3), (2.4)にしたがって、新たな割当を求めるだけでよい(このときは手順3で $(\bar{c}_{ij})$ を求める必要もない)。

ところで、手順3であつかう最短路問題では、枝の距離の中に負のものがあらわれるので、ダイクストラ法が使えない。

枝の距離がすべて非負になるようにして、ダイクストラ法を適用し、計算量を制約したのが富沢の方法である。

[A 2.3] 富沢の方法 [10]

手順1 $N_1^{(1)} = \{1\}, N_2^{(1)} = \{1\}, X^{(1)} = \{(1, 1)\},$

$$u_1^{(1)} = 0, v_1^{(1)} = c_{11}, l = 2 \text{ とする。}$$

手順2

$$(1) \quad v_l^{(l-1)} = 0,$$

$$u_l^{(l-1)} = \max \left\{ 0, \max_{j \in N_2^{(l-1)}} (v_j^{(l-1)} - c_{lj}) \right\} \text{ とする。}$$

$$(2) \quad N_1^{(l)} = N_1^{(l-1)} \cup \{l\},$$

$$N_2^{(l)} = N_2^{(l-1)} \cup \{l\} \text{ とする。}$$

2部グラフ $G^{(l)}(N_1^{(l)}, N_2^{(l)}; N_1^{(l)} \times N_2^{(l)})$ において

注5 $N_1 - \partial_1 \hat{X}$ に属するすべての点からの最短距離の最小値を求めてもよい。このときは $u_i = 0 (i \in N_1 - \partial_1 \hat{X})$ となる。

枝 (i, j) の順方向の距離 d_{ij} および逆方向の距離 d_{ji} をつぎのように定める.

$(i, j) \in X^{(l-1)}$ のとき, $d_{ij}=d_{ji}=0$,

その他の (i, j) ($i \in N_1^{(l)}, j \in N_2^{(l)}$)に対しては,

$$d_{ij}=c_{ij}+u_i^{(l-1)}-v_j^{(l-1)},$$

$$d_{ji}=\infty.$$

(3) $l \in N_1^{(l)}$ から $i \in N_1^{(l)}$ に至る最短距離 Δu_i ($\Delta u_i = 0$ とする), $j \in N_2^{(l)}$ に至る最短距離 Δv_j および $l \in N_2^{(l)}$ に至る最短距離 R を求める.

(4) $u_i^{(l)}=u_i^{(l-1)}+\Delta u_i$ ($i \in N_1^{(l)}$),

$$v_j^{(l)}=v_j^{(l-1)}+\Delta v_j \quad (j \in N_2^{(l)})$$

とする.

手順3 $R=(i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_r, j_r)$

$$(i_1=l \in N_1^{(l)}, j_r=l \in N_2^{(l)})$$

とあらわされたとする.

$$R^+ = \{(i_k, j_k) \mid k=1, 2, \dots, r\},$$

$$R^- = \{(i_k, j_{k-1}) \mid k=2, 3, \dots, r\} \quad (r=1 \text{ のときは } R^- = \emptyset),$$

$$X^{(l)} = X^{(l-1)} - R^- + R^+$$

とする.

手順4 $l=n$ ならば終了. $l < n$ ならば,

$$l+1 \rightarrow l$$

として, 手順2にもどる.

この解法の妥当性を示すために, まず, つぎに示す問題 $[P^{(l)}], [D^{(l)}]$ ($l=1, 2, \dots, n$) を考える.

$[P^{(l)}]$ 条件 $\sum_{j=1}^l x_{ij}=1 \quad (i=1, 2, \dots, l),$

$$\sum_{i=1}^l x_{ij}=1 \quad (j=1, 2, \dots, l),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, l)$$

のもとで,

$$z^{(l)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l c_{ij} x_{ij}$$

を最小にせよ.

$[D^{(l)}]$ 条件 $v_j - u_i \leq c_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, l)$

のもとで,

$$w^{(l)} = \sum_{j=1}^l v_j - \sum_{i=1}^l u_i$$

を最大にせよ.

$[P^{(l)}], [D^{(l)}]$ は, 互いに双対である. したがって,

定理2.1と同様の定理が成り立つ.

割当 $X^{(l)}$ に対して,

$$x_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in X^{(l)}, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases} \quad (2.5)$$

とおくことによって, $[P^{(l)}]$ の1つの解 $x^{(l)}=(x_{ij}^{(l)})$ が得られる. 常に, (2.5)により $X^{(l)}$ と $x^{(l)}$ の対応づけ

がなされているとする.

定理 2.4 $x^{(l-1)}, (u^{(l-1)}, v^{(l-1)})$ ($2 \leq l \leq n$) が, それぞれ $[P^{(l-1)}], [D^{(l-1)}]$ の最適解であるとする, 手順2, 手順3で得られる $x^{(l)}, (u^{(l)}, v^{(l)})$ は, それぞれ $[P^{(l)}], [D^{(l)}]$ の最適解である.

証明は, 一般のネットワークにおける最小費用流の場合[11]と同様にして, つぎの(1), (2), (3)を示していくことによって行なわれる.

(1) $x^{(l)}$ は, $[P^{(l)}]$ の解である.

(2) $(u^{(l)}, v^{(l)})$ は, $[D^{(l)}]$ の解である.

(3) すべての (i, j) ($i \in N_1^{(l)}, j \in N_2^{(l)}$) に対して,

$$x_{ij}^{(l)} (v_j^{(l)} - u_i^{(l)} - c_{ij}) = 0$$

(相補定理の条件)が成り立つ.

$x_{11}=1, (u_1, v_1) = (0, c_{11})$ は, あきらかに, それぞれ $[P^{(1)}], [D^{(1)}]$ の最適解であるから, 定理2.4により $x^{(n)}$ は $[P^{(n)}]$ すなわち $[P]$ の最適解である.

なお, 手順2で定める枝の距離 d_{ij}, d_{ji} が非負であることは, つぎのようにして示される.

(a) $i \in N_1^{(l-1)}, j \in N_2^{(l-1)}, (i, j) \notin X^{(l-1)}$

のとき.

$(u^{(l-1)}, v^{(l-1)})$ は, $[D^{(l-1)}]$ の解であるから,

$$v_j^{(l-1)} - u_i^{(l-1)} \leq c_{ij}.$$

ゆえに, $d_{ij}=c_{ij}+u_i^{(l-1)}-v_j^{(l-1)} \geq 0$.

(b) $i=l, j \in N_2^{(l-1)}$ のとき,

$$\begin{aligned} d_{lj} &= c_{lj} + \max \left\{ 0, \max_{k \in N_2^{(l-1)}} (v_k^{(l-1)} - c_{lk}) \right\} - v_j^{(l-1)} \\ &\geq \max_{k \in N_2^{(l-1)}} (v_k^{(l-1)} - c_{lk}) - (v_j^{(l-1)} - c_{lj}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(c) $i \in N_1^{(l-1)}, j=l$ のとき.

$$v_l^{(l-1)} = 0.$$

$u_i^{(l-1)}$ は, $G^{(l-1)}$ における $l-1 \in N_1$ から,

$i \in N_1$ に至る最短距離であるから, $G^{(l-1)}$ で

$d_{ij} \geq 0$ ($\forall i, j$) ならば, $u_i^{(l-1)} \geq 0$ である.

よって, $d_{il}=c_{il}+u_i^{(l-1)}-v_l^{(l-1)} \geq 0$.

(d) $i=l, j=l$ のとき.

$$v_l^{(l-1)} = 0, u_l^{(l-1)} \geq 0.$$

よって, $d_{ll}=c_{ll}+u_l^{(l-1)}-v_l^{(l-1)} \geq 0$.

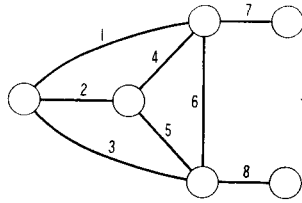
3. 独立割当問題

3.1 問題の表現

N_1, N_2 にマイロイド構造^{注6}を導入した割当問題が,

注6 マトロイドについては, たとえば文献[12]を参照されたい. 文献[15]にも簡単な説明が含まれている.

図 3.1 ある村の道路網 (数字は枝の番号)



最近注目されている。 $\mathcal{F}_1(\subset 2N_1)$, $\mathcal{F}_2(\subset 2N_2)$ をそれぞれ独立集合の族とするマトロイド $M_1(N_1, \mathcal{F}_1)$, $M_2(N_2, \mathcal{F}_2)$ が与えられているとする。

割当 X に対して、

$$\partial_1 X \in \mathcal{F}_1,$$

$$\partial_2 X \in \mathcal{F}_2$$

が成り立つとき、 X は独立割当 (independent assignment) であるという。独立割当の中で要素最大のものを最大独立割当という。最大独立割当についても、定理 1.7 と同様の定理が成り立つ[13]。さらに、 A の要素 (i, j) に重み c_{ij} が定められているとき、最大独立割当の中で、重みを最小にするものを最適独立割当という。

少し具体的な例をあげよう。

〈例 3.1〉 図 3.1 に示すグラフは、ある村の主要道路網を示したものである。まだ舗装されていないので、一部を舗装することにして、近くの土木工事会社 9 社に、それぞれ 2 枝線の見積りを出させたところ表 3.1 の結果を得た。つぎの条件のもとで、費用が最小になるように、舗装する枝線およびそこを担当する会社を決定せよ。

(i) 任意の主要地点 (グラフの点) 間には、舗装路を通してゆけるようにする。

(ii) 1 つの会社には、ただだか 1 枝線しか担当させない。

(iii) 1 つの群の中で割り当てられる会社は、ただだか 2 社とする。

$$N_1 = \{1, 2, \dots, 8\},$$

$$N_2 = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\},$$

表 3.1 工事費の見積額

会社 枝	第 I 群			第 II 群			第 III 群		
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
1					30		20		
2	10								
3	10				40	50			
4		10							
5		20		20					
6			10	20			30		40
7			30					10	
8						70		20	60

$A = \{(i, j) \mid \text{会社 } j \text{ は枝線 } i \text{ の工事見積を出した}\},$
 $c_{ij} ((i, j) \in A) = (\text{会社 } j \text{ が枝線を舗装するときの費用の見積額})$
 とする。

枝線 i を会社 j に担当させる。 $\Leftrightarrow (i, j) \in X$ によって、 X を定めると、 X は割当になる。条件 (i) および費用を最小にしたいという要求から、 $\partial_1 X$ は、図 3.1 のグラフの木でなければならない。木は、枝の集合 N_1 の部分集合で、閉路を含まない (極大) 集合であるから、 N_1 に関する独立集合の族としては、

$\mathcal{F} = \{I \mid I \subset N_1, I \text{ は閉路を含まない}\}$ とおけばよい。つぎに、

$$N_{21} = \{11, 12, 13\},$$

$$N_{22} = \{21, 22, 23\},$$

$$N_{23} = \{31, 32, 33\}$$

とおくと、条件 (iii) より、

$$|\partial_2 X \cap N_{2k}| \leq 2 \quad (k=1, 2, 3)$$

が成り立たなければならない。そこで、 N_2 に関する独立集合の族としては、

$$\mathcal{F}_2 = \{J \mid J \subset N_2, |J \cap N_{2k}| \leq 2 \quad (k=1, 2, 3)\}$$

とおけばよい。

3.2 解法

最適割当を求めるための解法としては、プライマル・デュアル法[15]、プライマル法[16]がすでに提案されている。ここでは、2 節の割当問題にあわせて、プライマル・デュアル法について述べる。

[A 3.1] プライマル・デュアル法

手順 1 $X^{(0)} = \phi$, $c^{(0)} = 0$, $l = 0$ とする。

手順 2 (1) $X^{(l)}$ に関する補助グラフ $G^{(l)}(N^{(l)}, A^{(l)})$ をつぎのようにしてつくる (X は $X^{(l)}$ の略、図 3.2 参照)。

$$(a) \quad N^{(l)} = N_1 \cup N_2 \cup \{s, t\}$$

$$(b) \quad A^{(l)} = (A - X) \cup X^* \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_t$$

ここで、 $X^* = \{(j, i) \mid (i, j) \in X\}$,

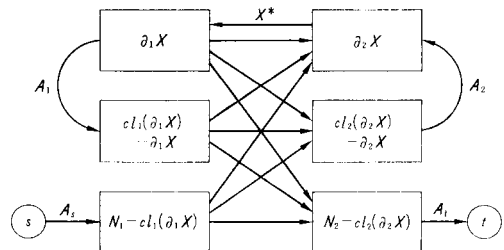


図 3.2 $G^{(l)}$

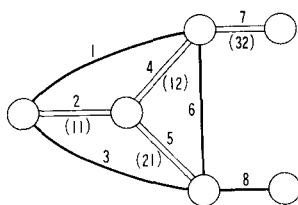


図 3.3 $X^{(4)}$ ()内は会社番号

$$A_1 = \{(i, i') \mid i \in \partial_1 X, \\ i' \in cl_1(\partial_1 X) - \partial_1 X, \\ \partial_1 X - \{i\} + \{i'\} \in \mathcal{F}_1\}, \\ A_2 = \{(j', j) \mid j \in \partial_2 X, \\ j' \in cl_2(\partial_2 X) - \partial_2 X, \\ \partial_2 X - \{j\} + \{j'\} \in \mathcal{F}_2\}, \\ A_s = \{(s, i) \mid i \in N_1 - cl_1(\partial_1 X)\}, \\ A_t = \{(j, t) \mid j \in N_2 - cl_2(\partial_2 X)\}.$$

ここで、 $cl_1(\cdot)$ 、 $cl_2(\cdot)$ は、それぞれ M_1 、 M_2 における閉包注7をあらわす。

- (c) 枝の距離をつぎのように定める。
 $(i, j) \in A - X$ のとき $d_{ij} = c_{ij}$,
 $(j, i) \in X^*$ のとき $d_{ji} = -c_{ij}$.
 その他の枝の距離(順方向のみ)は0とする。
- (2) $G^{(l)}$ において、 s から t への最短路の中で、本数最小のものを求める。最短路を R 、最短距離を v_l とする。 s から t への路が存在しなければ、 $X^{(l)}$ は最大独立割当であるから終了する。

手順3

$$R^+ = \{(i, j) \mid \text{枝}(i, j) \text{ は } R \text{ に含まれていて}, \\ (i, j) \in A - X^{(l)}\}, \\ R^- = \{(i, j) \mid \text{枝}(j, i) \text{ は } R \text{ に含まれていて}, \\ (j, i) \in X^*\}$$

とすると、

$$X^{(l+1)} = X^{(l)} - R^- + R^+, \\ c^{(l+1)} = c^{(l)} + v_l$$

とおき、 l の値を1だけ増して、手順2にもどる。

割当問題の解法[A2.2]または[A2.3]と本質的に異なる部分は、手順2で、 A_1 と A_2 を考えるとところである。また、最短路が2本以上存在するときは、もっとも本数の少ないものを選ばなければならないところも注意を要する。

注7 $Y_1 \in \mathcal{F}_1$ のとき、
 $cl_1(Y_1) = \{i' \mid Y_1 + \{i'\} \in \mathcal{F}_1\} \cup Y_1$
 である。 $i' \in cl_1(Y_1) - Y_1$ に対して、
 $Y_1 + \{i'\} - \{i\} \in \mathcal{F}_1$
 となる $i \in Y_1$ が少なくとも1つ存在する。

表 3.2 最短距離、最短路

$i \backslash j$	11	12	13	21	22	23	31	32	33	u_i
1										30
2	10									30
3	10									30
4		10								30
5		20								30
6			10	20						30
7										10
8										60
v_j	40	40	40	50	60	70	50	20	60	

u_i, v_j は最短距離、--- は最短路を示す

〈例 3.1〉に適用するとつぎようになる。ただし、 $X^{(4)}$ まで求められているとして、 $X^{(5)}$ を求めることにする。
 $X^{(1)} = \{(2, 11)\}$, $c^{(1)} = 10$,
 $X^{(2)} = \{(2, 11), (4, 12)\}$, $c^{(2)} = 20$,
 $X^{(3)} = \{(2, 11), (4, 12), (7, 32)\}$, $c^{(3)} = 30$,
 $X^{(4)} = \{(2, 11), (4, 12), (5, 21), (7, 32)\}$, $c^{(4)} = 50$
 (図 3.3)。

ここでは、グラフ $G^{(l)}$ を描かずに表の形で処理する。表 3.2 の○で囲った位置は $X^{(4)}$ の要素を示す。ここは、 N_2 のほうから N_1 に向かって枝が存在し、距離は、記された数値に-1をかけたものである。 N_1 の要素で→がついているのは、 s からの枝が存在するものである。同様に、 N_2 の要素で↑がついているのは、 t への枝が存在するものである。 N_1 間の枝、 N_2 間の枝は、欄外に記されている。たとえば、 $13 \in N_2$ を、 $\partial_2 X^{(4)} = \{11, 12, 21, 32\}$ に入れると、 N_{21} の要素が3になって、独立集合でなくなるから、

$$13 \in cl_2(\partial_2 X^{(4)})$$

であり、13の代わりに11または12を除くと、独立集合になるので、13から11および12に向かって枝が存在する。 N_1 のほうでは、 $\partial_1 X^{(4)} = \{2, 4, 5, 7\}$ であり、1, 3または6を入れたら、閉路ができるので、

$$cl_1(X^{(4)}) - X^{(4)} = \{1, 3, 6\}$$

である。いま、2を除くと、代わりに、1, 3を加えても独立集合になるので、2からは1および3に向かって枝が存在する。

この表の上で s から (この場合は8からと同じ) の最短距離を求めると、表の u_i, v_j のようになる。最短路

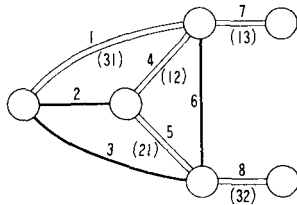


図 3.4 $X^{(s)}$ ()内は会社番号

は, $\dots \rightarrow$ で示されている.

$$R = (s, 8, 32, 7, 13, 11, 2, 1, 31, t),$$

$$R^+ = \{(8, 32), (7, 13), (1, 31)\} \quad (\text{表中}\square\text{で囲まれたところ}),$$

$$R^- = \{(7, 32), (2, 11)\},$$

$$v_t = 50$$

であるから,

$$\begin{aligned} X^{(s)} &= X^{(t)} - R^- + R^+ \\ &= \{(1, 31), (4, 12), (5, 21), (7, 13), (8, 32)\}, \\ c^{(s)} &= 50 + 50 = 100 \end{aligned}$$

となる(図 3.4).

実は, $G^{(t)}$ (または表 3.2)では, もう 1 本最短路が存在する. それは,

$$R' = (s, 8, 32, 7, 13, 12, 4, 6, 21, 5, 3, 11, 2, 1, 31, t)$$

である.

$$R'^+ = \{(8, 32), (7, 13), (6, 21), (3, 11), (1, 31)\},$$

$$R'^- = \{(7, 32), (4, 12), (5, 21), (2, 11)\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} X^{(s)'} &= X^{(t)} - R'^- + R'^+ = R'^+, \\ \partial_1 X^{(s)'} &= \{1, 3, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

となり,

$$\partial_1 X^{(s)'} \notin \mathcal{F}_1$$

である(図 3.5).

参 考 文 献

- [1] Kuhn, H. W., "The Hungarian Method for the Assignment Problem," *Naval Research Logistic Quarterly* 2 (1955), 83-97.
- [2] Churchman, C. W., R. A. Ackoff and E. L. Arnoff, *Introduction to Operations Research*, John Wiley & Sons, New York, 1959 (森口繁一監訳, 紀伊国屋書店).
- [3] Ford, L. R., Jr., and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton, University Press, Princeton, 1962.
- [4] Berge, C., *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Publishing Co., London, 1973 (伊理正夫他訳, サイエンス社).
- [5] Liu, C. L., *Introduction to Combinatorial*
- [6] Yaspan, A., "On Finding a Maximal Assignment," *Operations Research* 14 (1966), 646-651.
- [7] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [8] Iri, M., "A New Method of Solving Transportation-Network Problems," *J. Operations Research Soc. of Japan* 3 (1960), 27-87.
- [9] Iri, M., *Network Flow, Transportation and Scheduling: Theory and Algorithms*, Academic Press, New York, 1969.
- [10] Tomizawa, N., "On Some Techniques Useful for Solution of Transportation Network Problems," *Networks* 1 (1971), 173-194.
- [11] 伊理正夫・古林隆「ネットワーク理論」日科技連出版, 1976.
- [12] Welsh, D. J. A., *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.
- [13] 富沢信明・伊理正夫, 「行列積 $A \times B$ の階数を決定する方法と回路の一意解の存在判定問題への応用」電子通信学会論文誌 57-A (1974), 834-841.
- [14] 富沢信明・伊理正夫, 「独立割当問題」の解法と回路の複雑度決定問題への応用」電子通信学会論文誌 57-A (1974), 627-629.
- [15] Iri, M., and N. Tomizawa, "An Algorithm for Finding an Optimal Independent Assignment," *J. Operations Research Soc. of Japan* 19 (1976), 32-57.
- [16] Fujishige, S., "A Primal Approach to the Independent Assignment Problem," *J. Operations Research Soc. of Japan* 20 (1977), 1-15.
- [17] Lawler, E. L., *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

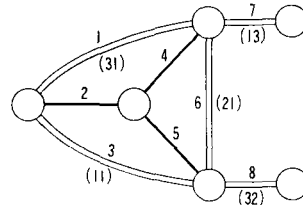


図 3.5 $X^{(s)'} ()$ 内は会社番号

Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1969 (伊理正夫他訳, 共立出版).

- [18] 伊理正夫・古林隆「ネットワーク理論」日科技連出版, 1976.
- [19] Welsh, D. J. A., *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.
- [20] 富沢信明・伊理正夫, 「行列積 $A \times B$ の階数を決定する方法と回路の一意解の存在判定問題への応用」電子通信学会論文誌 57-A (1974), 834-841.
- [21] 富沢信明・伊理正夫, 「独立割当問題」の解法と回路の複雑度決定問題への応用」電子通信学会論文誌 57-A (1974), 627-629.
- [22] Iri, M., and N. Tomizawa, "An Algorithm for Finding an Optimal Independent Assignment," *J. Operations Research Soc. of Japan* 19 (1976), 32-57.
- [23] Fujishige, S., "A Primal Approach to the Independent Assignment Problem," *J. Operations Research Soc. of Japan* 20 (1977), 1-15.
- [24] Lawler, E. L., *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.