

組合せ理論の応用 (4)

中 村 義 作

4. 光学的な情報処理に利用される重み一定符号

4.1 ビット情報の光学的な識別

レーザーが発明されてから、きわめて性能のよい光源を利用することができるようになり、光学的に情報を処理することが可能になった。とくに、「ホログラフィ」とよばれている光学的技術〔19〕は、光の特徴をみごとにとらえた画期的技術で、いろいろの分野への応用が提案されている。日本電信電話公社の武蔵野電気通信研究所では、このホログラフィを応用して、光学的な情報検索システムをかつて研究試作したことがある〔20〕。このとき、そのシステムに適合する符号として、ここに紹介する重み一定符号も研究された〔21, 22, 23〕。ただし、ホログラフィの知識が皆無でも、重み一定符号の考案された理由は容易に説明されるので、以下では、光学の専

門知識をまったく必要としない。

図 4.1 は、ビットで表示された光の情報を、スリットを用いて識別する 1 つの方法を示している。スリットとしては、対象とする個々の情報のそれぞれに適合するものを 1 枚ずつ用意し、各スリットに識別すべき光をあてる。そして、透過光の強さを比較し、もっとも強い光を通したスリットの情報を識別すべき情報とする。このとき、どの情報に対しても、それに適合するスリットの透過光の強さがすべて同じであると、受光器における処理が容易になる。しかも、原情報に適合しない透過光の強さが、適合する場合よりある一定値以上弱くなることが保証されていれば、受光器の感度などにもとづく誤動作も防げる。図 4.1 では、適合したときの透過光の強さが 3 であるのに対し、適合しない場合は 1 となっている。この要請が重み一定符号に結びつくので、符号理論〔24〕の立場から、もう少し詳しく説明しよう。なお、ホログラフィを利用すると、スリットの枚数がかかなり多くなっても、ただ 1 枚のレンズで、すべての照合を同時に瞬間的に行なうことができる。したがって、図 4.1 は識別の原理を模式的に示したもので、現実のシステムとはいちじるしく異なっていることを付記しておく。

4.2 重み一定符号の例と用語の説明

たとえば、識別される光の情報に 7 ビットが利用できるとし、各ビットに、光があれば 1、なければ 0 を割りあてる。そして、識別に利用される個々の情報を、横ベクトルを用いて、

$$a_0 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$a_1 = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$$

$$a_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$$

$$a_3 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$a_4 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$$

$$a_5 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$a_6 = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$$

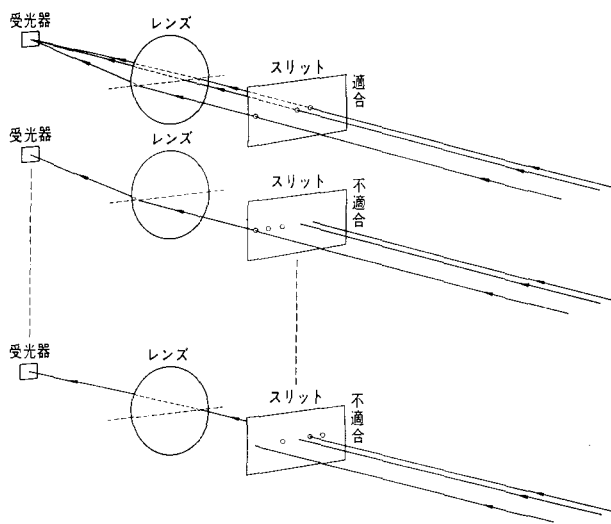


図 4.1

とあらわす。どの情報にも3個の1が含まれているから、それぞれと適合するスリットの透過光の強さはすべて3である。一方、適合しないスリットの透過光の強さを調べるには、上のベクトル表示で、同じ位置の要素がともに1になっているものの個数を数えればよい。たとえば、 $\mathbf{a}_0$ と $\mathbf{a}_1$ では、1番目の要素だけがともに1のため、 $\mathbf{a}_0$ の光を $\mathbf{a}_1$ のスリットにあてたときと、 $\mathbf{a}_1$ の光を $\mathbf{a}_0$ のスリットにあてたときの透過光の強さは、いずれも1となる。同じことを、あらゆる2つの情報の組合せについて調べてみると、適合しない場合の透過光の強さはすべて1であることが確かめられる。つまり、上の $\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_6$ までの7種を識別情報に用いると、透過光の強さが3であるか、1であるかによって、情報の識別が可能になる。これは、重み3、半距離2の重み一定符号とよばれるもので、以下では、この種のものを考察の対象とする。

ここで、符号理論に親しみの薄い読者のために、上の例を借りて、若干の概念と用語を説明しておこう。上の $\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_6$ までは、それぞれ符号語とよばれ、その全体、

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6\}$$

は符号とよばれる。符号語の構成に用いられるビットの個数(上の例では7)は符号語の長さで、符号語の要素にあられる1の個数は符号語の重みである。上の例の符号語は長さ7で、どれも重み3である。そして、1つの符号に属するすべての符号語の重みが一定のとき、その符号を重み一定符号とよぶ。なお、1つの符号に属する符号語の長さは、つねに同じであるとする。最後に、半距離とは、 $\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_1$ までの半距離を例にとると、 $\mathbf{a}_0$ で要素が1となっている位置(1, 2, 3番目)の $\mathbf{a}_1$ の0の要素の個数(2, 3番目の要素が0で、個数は2)であるが、4.3で数学的に定義する。

4.3 重み一定符号の定義

これまでの説明で、光学的なビット情報のスリットによる識別と、それに対する重み一定符号の役割りが理解されたと思うので、一般の重み一定符号に関して若干の考察を進める。

n 個の2進数字の系列 $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_{n-1}$ を長さ n の符号語といい、横ベクトル、

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1})$$

であらわす。ここに、符号語の各要素は、

$$\mathbf{a}_j \in \{0, 1\}, j=0, 1, 2, \cdots, n-1$$

で、長さ n のすべての符号語の集合は、ベクトル空間、

$$V^n = \{0, 1\}^n$$

をつくる。一般に、 V^n の任意の部分集合を、長さ n の符号という。符号語 $\mathbf{a}$ の重みは、

$$w(\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{a}_j \quad (4.1)$$

で定義される。 $w(\mathbf{a})$ は、ベクトル $\mathbf{a}$ の要素の中にあられる1の個数である。

長さ n の2つの符号語、

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1})$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1})$$

に対し、 $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ までの半距離 $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を、

$$\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{a}_j (1 - \mathbf{b}_j) \quad (4.2)$$

で、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との会合数 $\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を、

$$\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{a}_j \mathbf{b}_j \quad (4.3)$$

で定義する。式(4.1)、(4.2)から、

$$\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = w(\mathbf{a}) - \mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (4.4)$$

である。

長さ n の任意の符号 $\mathbf{R}$ に対し、それに属するすべての符号語の順序対に対する半距離の最小値を、符号 $\mathbf{R}$ の半距離とよぶ。これを d であらわせば、

$$d = \min_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R} \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{b}}} \delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (4.5)$$

である。長さ n 、半距離 d の符号の中で、それに属する符号語の数が最大なものを、長さ n 、半距離 d の最良の符号とよぶ。符号理論では、ほとんどの場合、最良の符号の構成法に興味をそそがれる。

符号 $\mathbf{R}$ において、それに属するすべての符号語の重みが等しいとき、 $\mathbf{R}$ を重み一定符号とよぶ。重み一定符号に属する任意の2つの符号語 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して、

$$\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \delta(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (4.6)$$

が成り立つ。これは、式(4.3)、(4.4)から明らかである。長さ n 、半距離 d 、重み m の重み一定符号の中で、それに属する符号語の数が最大なものを、長さ n 、半距離 d 、重み m の最良の重み一定符号とよぶ。そして、その符号語数を $K(n, d, m)$ であらわす。4.4では、これの上限を求め、それに関連して3種類の最良の重み一定符号を定義する。

4.4 符号語数の上限と各種の最良の重み一定符号

長さ n 、半距離 d 、重み m の最良の重み一定符号が見いだされたとし、これを $\mathbf{R}(n, d, m)$ であらわす。そして、各符号語を、ベクトル表示で、

$$\mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_{i0}, \mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \cdots, \mathbf{a}_{i, n-1})$$

$$i=0, 1, 2, \cdots, K-1 \quad (4.7)$$

とかく、ここに、 K は $K(n, d, m)$ の略記である。

いま、 n 個の点の集合を、

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_{n-1}\}$$

で定義し、 $a_{ij}=1$ のときは符号語 a_i が点 X_j を含み、 $a_{ij}=0$ のときは符号語 a_i が点 X_j を含まない、と解釈する。すると、重みが m であるから、どの符号語も X の中の m 点を含む。ここで、 $R(n, d, m)$ に属する 2 つの符号語の会合数の最大値を λ とおくと、 X の中の任意の $(\lambda+1)$ 点を含む符号語は、たかだか 1 個しか存在しない。 X から $(\lambda+1)$ 点を選ぶ仕方、の数は、

$$\binom{n}{\lambda+1} \text{ 通り}$$

である。一方、1 個の符号語に含まれる m 個の点から $(\lambda+1)$ 点を選ぶ仕方、の数は、

$$\binom{m}{\lambda+1} \text{ 通り}$$

である。よって、いかに効率よく符号語をつくっても、その総数が、

$$\binom{n}{\lambda+1} / \binom{m}{\lambda+1}$$

を越えることはない。ところで、式(4.4)、(4.5)に注意すると、

$$\lambda = m - d \quad (4.8)$$

が成りたっている。よって、これを代入すれば、

$$K(n, d, m) \leq \binom{n}{m-d+1} / \binom{m}{m-d+1} \quad (4.9)$$

を得る。式(4.9)の等号を満たす符号が存在するとき、これを S 形の重み一定符号とよび、 $R_s(n, d, m)$ であらわす。

式(4.9)は、 n, d, m の値によって、さらに条件を強くすることができる。 h_j を、

$$h_j = \sum_{i=0}^{K-1} a_{ij}, \quad j=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.10)$$

で定義する。これは、点 X_j を含む符号語の個数である。これらの各符号語から第 j 番目の要素だけを除くと、これらは長さ $(n-1)$ 、半距離 d 、重み $(m-1)$ の重み一定符号を構成する。したがって、

$$K(n-1, d, m-1) \geq h_j \quad (4.11)$$

である。

さて、 $R(n, d, m)$ の各符号語の重みは m であるから、最良の重み一定符号に対しては、

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_j = mK(n, d, m)$$

となる。よって、すべての j に対する h_j の最大値を $h_{\max}$ とすれば、

$$nh_{\max} \geq mK(n, d, m)$$

となり、式(4.11)を代入すると、

$$K(n, d, m) \leq \lfloor (n/m)K(n-1, d, m-1) \rfloor \quad (4.12)$$

を得る。ここに、 $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大整数とした。ところで、

$$K(n-m+d, d, d) \leq \lfloor (n-m+d)/d \rfloor$$

は明らかであるから、

$$K(n, d, m) = \left\lfloor \frac{n}{m} \left\lfloor \frac{n-1}{m-1} \left[\dots \left\lfloor \frac{n-m+d}{d} \right\rfloor \dots \right] \right\rfloor \right\rfloor \quad (4.13)$$

を得る。式(4.13)では、整数部分をとるという端数の切り捨てが内側のかっこからつぎつぎ行なわれるが、どのかっこ内も整数そのものであると、式(4.13)は式(4.9)に一致する。

つぎに、 $K(n, d, m)$ の別の上限を与える。2 つの符号語の会合数の最大値 λ は式(4.8)で与えられるから、

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} a_{kj} \leq m-d, \quad i \neq k$$

であり、すべての i, k について加えると、

$$\sum_{i=0}^{K-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} a_{kj} \leq (m-d)K(K-1)$$

を得る。この左辺の総和の順序を変えたのち、式(4.10)に注意すると、

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_j(h_j-1) \leq (m-d)K(K-1) \quad (4.14)$$

を得る。ところで、

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_j = mK$$

は、すべての符号語の要素の中にあられる 1 の総数であり、

$$(mK)^2 / n \leq \sum_{j=0}^{n-1} h_j^2$$

が成りたつ。よって、これらを式(4.14)に代入すれば、

$$(mK)^2 / n - mK \leq (m-d)K(K-1)$$

となり、 K について解いたのち、 K を $K(n, d, m)$ とかきなおせば、

$$K(n, d, m) \leq dn / [dn - m(n-m)], \quad dn > m(n-m) \quad (4.15)$$

を得る。式(4.15)の等号を満たす符号が存在するとき、これを B 形の重み一定符号とよび、 $R_b(n, d, m)$ であらわす。式(4.9)と式(4.15)は、S. M. Johnson がみちびいたもの [25] である。

さて、式(4.12)の漸化式を s 回 ($0 \leq s \leq m-d$) 繰り返して適用すると、

$$K(n, d, m) \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \left\lfloor \frac{n-1}{m-1} \left[\dots \left\lfloor \frac{n-s+1}{m-s+1} K(n-s, d, m-s) \right\rfloor \dots \right] \right\rfloor \right\rfloor$$

を得る。よって、各かっこ内の端数を切り捨てなければ、

$$K(n, d, m) \leq \left\{ \binom{n}{s} / \binom{m}{s} \right\} K(n-s, d, m-s)$$

となる。このとき、

$$d(n-s) > (m-s)(n-m)$$

が成りたてば、 $K(n-s, d, m-s)$ に式(4.15)を適用して、

$$K(n, d, s) \leq \left\{ \binom{n}{s} / \binom{m}{s} \right\} \frac{d(n-s)}{d(n-s) - (m-s)(n-m)} \quad (4.16)$$

を得る。式(4.16)の等号を満たす符号が存在するとき、これを A 形の重み一定符号とよび、 $R_a(n, d, m)$ であらわす。 A 形の重み一定符号において、とくに、

$$s=m-d, \quad \text{または} \quad s=0$$

とおくと、これらは S 形、または B 形の重み一定符号となる。

4.5 ブロック計画(とくに t 計画)

これまででは、もっぱら重み一定符号の性質を調べてきたが、これからが組合せ理論の応用である。というのは、組合せ理論のなかで盛んに研究されているブロック計画が、最良の重み一定符号と密接に関連しているからである。このため、まずブロック計画について、簡単な復習をしておく〔6〕。

任意の正整数を v とし、 v を法とする剰余類を、

$$P_v = \{0, 1, 2, \dots, v-1\}$$

であらわす。 P_v の k_j 個 ($j=0, 1, 2, \dots, b-1$) の要素からなる集合を b 個つくり、これらを B_j ($j=0, 1, 2, \dots, b-1$) であらわす。そして、これらの集合を、

$$B = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_{b-1}\}$$

とかく。ただし、通常の集合の概念と異なり、 $B_i = B_k$ であっても、 B の中では別のものとみなして、並記するものとする。 P_v の各要素を点、 B_j を大きさ k_j のブロックとよび、順序対 (P_v, B) を配図 (configuration) とよぶ。また、配図 (P_v, B) において、各ブロック間になんらかの正則性をもたせたとき、この配図をブロック計画 (block design) という。

ブロック計画の中で、とくに重要なものの1つは t 計画 (t design) とよばれるものである。これを説明しよう。 P_v から任意に1つの点を選ぶと、これを要素を含むブロックの個数が定まる。点 i ($i=0, 1, 2, \dots, v-1$) を含むブロックの個数を r_i であらわし、これを i 点の繰り返し数とよぶ。また、 t 個の点 $i_1, i_2, \dots, i_t$ を共通に含むブロックの個数を、これらの点の会合数とよぶ。すると、配図 (P_v, B) がつぎの3条件を満たすとき、これをパラメータ v, b, r, k, λ の t 計画とよぶ。

- (i) 各ブロック B_j の大きさ k_j は、 j に無関係に一定値 k ($k < v$) である。
 - (ii) 各点 i の繰り返し数 r_i は、 i に無関係に一定値 r ($r < b$) である。
 - (iii) t ($t \leq k$) 個の点の会合数は、これらの点の選び方に無関係に一定値 λ ($\lambda < r$) である。
- 上の t 計画に対しては、パラメータの間に、

$$vr = bk, \quad \lambda \binom{v}{t} = b \binom{k}{t} \quad (4.17)$$

が成りたつので、 v, k, λ, t だけを指定して、この t 計画を $D_t(v, k, \lambda)$ であらわす。これが存在するとき、任意の整数 u ($0 \leq u < t$) に対して、

$$\lambda_u = \lambda \binom{v-u}{t-u} / \binom{k-u}{t-u}$$

も整数となり、 $D_t(v, k, \lambda)$ は $D_u(v, k, \lambda_u)$ とも解釈される。また、 P_v の中の特定の1点を除くことによって、 $D_t(v, k, \lambda)$ から $D_{t-1}(v-1, k-1, \lambda)$ をつくることもできる。

4.6 Steiner 系と S 形の重み一定符号

$D_t(v, k, \lambda)$ において、 $\lambda=1$ のときを Steiner 系とよび、ふつう $S(t, k, v)$ であらわす。以下では、この Steiner 系が S 形の重み一定符号と1対1に対応することを示す。

まず、 $S(t, v, k)$ から S 形の重み一定符号をみちびく。 $S(t, v, k)$ の任意のブロック B_j ($j=0, 1, 2, \dots, b-1$) をとり、これに符号語 a_j をつぎのように対応させる。 B_j が点 i ($i \in P_v$) を含んでいるとき、

$$a_{ji} = 1$$

とし、含んでいないとき、

$$a_{ji} = 0$$

とする。すると、 a_j はベクトル表示で、

$$a_j = (a_{j0}, a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{j, v-1})$$

となり、長さ v 、重み k の符号語となる。Steiner 系では、任意の t 点の会合数が1であるから、上の方法で得られる b 個の符号語 a_j ($j=0, 1, 2, \dots, b-1$) からなる重み一定符号では、その半距離は、

$$d = k - t + 1$$

となる。一方、式(4.17)の第2式で、

$$\lambda = 1, \quad t = k - d + 1$$

とおくと、

$$b = \binom{v}{k-d+1} / \binom{k}{k-d+1}$$

となる。よって、式(4.9)に注意すると、この符号は S の重み一定符号 $R_s(v, k-t+1, k)$ であることがわかる。

つぎに、 $R_s(n, d, m)$ から Steiner 系をみちびく。 $R_s(n, d, m)$ の任意の符号語 a_i ($i=0, 1, 2, \dots, K$) をとり、これにブロック B_i をつぎのように対応させる。

$$a_{ij} = 1$$

のとき B_i は点 j ($j \in P_n$) を含み、

$$a_{ij} = 0$$

のとき B_i は点 j を含まないとする。すると、 B_i のブロックの大きさは m となる。もとの符号の半距離は d であるから、 K 個のブロック B_i ($i=0, 1, 2, \dots, K-1$) が

らなる配図(P_n, B)では、 $(m-d+1)$ 個の点の会合数はたかだか1である。

さて、集合 P_n から $(m-d+1)$ 点を選ぶ仕方の数は、

$$\binom{n}{m-d+1} \text{ 通り}$$

で、ブロック B_i に属する m 点から $(m-d+1)$ 点を選ぶ仕方の数は、

$$\binom{m}{m-d+1} \text{ 通り}$$

である。よって、ブロックの個数 K が式(4.9)の右辺であらわされることに注意すれば、 P_n の任意の $(m-d+1)$ 点の会合数はすべて1となるはずである。このことは、配図(P_n, B)が $S(m-d+1, m, n)$ であることを示す。

以上で、Steiner 系と S 形の重み一定符号の1対1の対応が証明された。

4.7 BIBD と B 形の重み一定符号

$D_t(v, k, \lambda)$ において、 $t=2$ のときをつり合い不完備形ブロック計画(Balanced Incomplete Block Design, 略して BIBD)とよび、ふつう $D(v, k, \lambda)$ であらわす。以下では、この BIBD が B 形の重み一定符号と1対1に対応することを示す。

まず、 $D(v, k, \lambda)$ から B 形の重み一定符号をみちびく、 $D(v, k, \lambda)$ の b 個のブロック $B_j (j=0, 1, 2, \dots, b-1)$ に対し、 a_{ij} を、

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \notin B_j \text{ のとき} \\ 1, & i \in B_j \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義し、 v 個の符号語を、

$$\alpha_i = (a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i, b-1}), \quad i=0, 1, 2, \dots, v-1$$

のようにつくる。各符号語の重みは $D(v, k, \lambda)$ における各点の繰り返し数 r であるから、これらは長さ b 、重み r の重み一定符号を構成する。また、任意の2点の会合数は λ であるから、この符号の半距離 d は $r-\lambda$ となるので、結局この符号は長さ b 、半距離 $r-\lambda$ 、重み r の重み一定符号となる。

符号語の個数 v を $b, r-\lambda, r$ であらわすため、式(4.17)で $t=2$ とおくと、

$$vr = bk, \quad \lambda v(v-1) = bk(k-1) \quad (4.18)$$

を得る。これから、 k を消去するようにして v を求めると、若干の計算ののち、

$$v = (r-\lambda)b / [(r-\lambda)b - r(b-r)] \quad (4.19)$$

を得る。よって、式(4.15)に注意すれば、上につくった符号は $R_b(b, r-\lambda, r)$ であることがわかる。なお、 t 計画の条件(iii)より $r < \lambda$ であり、また式(4.19)の右辺の分母は、つぎのようにしてつねに正となる。この分母は、

$$r^2 - \lambda b$$

であるが、式(4.18)の第2式の両辺に r をかけたのち、第1式を代入すれば、

$$\lambda bk(v-1) = vr^2(k-1)$$

$$\frac{\lambda b}{r^2} = \frac{v(k-1)}{k(v-1)} = \frac{1-1/k}{1-1/v}$$

を得る。しかるに、 t 計画の条件(i)より $k < v$ であるから、右辺は1より小さい。

つぎに、 $R_b(n, d, m)$ から BIBD をみちびく。 $R_b(n, d, m)$ の K 個の符号語 $\alpha_i (i=0, 1, 2, \dots, K-1)$ のベクトル表示を、

$$\alpha_i = (a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i, n-1})$$

とし、 K 個の点の集合 P_K からとった n 個のブロックを、

$$B_j = \{i | a_{ij} = 1\}, \quad j=0, 1, 2, \dots, n-1$$

で定義する。 B_j の集合を、

$$B = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}\}$$

とかけ、配図(P_K, B)をつくる。もとの符号の会合数は d であるから、この配図の任意の2点の会合数はたかだか $(m-d)$ である。よって、 P_K から2点を選ぶ組合せ数を考えると、2点の会合数の延べ数(これを Y であらわす)は、

$$Y \leq (m-d) \binom{K}{2}$$

を満たす。この K に式(4.15)の右辺を代入すれば、

$$Y \leq dm n(m-d)(n-m) / 2[dn - m(n-m)]^2 \quad (4.20)$$

を得る。

一方、 P_K の各点の繰り返し数は m であり、

$$N = mK = dm n / [dn - m(n-m)] \quad (4.21)$$

は B の各 B_j に含まれる点の延べ数となる。よって、ブロック B_j の大きさを k_j とすれば、 k_j 個の点から2点を選ぶ仕方の数は、

$$\binom{k_j}{2} \text{ 通り}$$

となり、上の Y は、

$$Y = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k_j}{2}, \quad \text{ただし} \quad \sum_{j=0}^{n-1} k_j = N$$

とあらわされるはずである。いま、 N を n の倍数とすれば、

$$Y \geq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{N/n}{2} = n \binom{N/n}{2}$$

となり、式(4.21)を代入して、

$$Y \geq dm n(m-d)(n-m) / 2[dn - m(n-m)]^2 \quad (4.22)$$

を得る。また、 N が n の倍数でなければ、 N を n 個の等しい整数にわけられないので、 Y は式(4.22)の右辺より大きくなって等号は成り立たない。よって、 N が n の倍数であるときにかぎって、式(4.20)、(4.22)を同時に満たす Y が存在し、

$$Y = dm n(m-d)(n-m) / 2[dn - m(n-m)]^2$$

となる。このときは、上の考察から知られるように、 P_K の任意の2点の会合数は $\lambda=m-d$ となる。つまり、配図(P_K, B)は $D(K, mK/n, m-d)$ であることがわかる。

以上で、BIBDとB形の重み一定符号の1対1の対応が証明された。

4.8 S形, B形の重み一定符号の例

ブロック計画の具体的な構成法に対しては、いろいろの著書(たとえば[5]など)に紹介されているので、ここでは、それによるS形, B形の重み一定符号の例を示す。

9個の点からなる集合 $P_0=\{0, 1, 2, \dots, 8\}$ に対し、Steiner系 $S(2, 3, 9)$ は、

$$\begin{aligned} B_0 &= \{0, 1, 2\}, & B_1 &= \{3, 4, 8\} \\ B_2 &= \{5, 6, 7\}, & B_3 &= \{0, 3, 7\} \\ B_4 &= \{1, 4, 5\}, & B_5 &= \{2, 6, 8\} \\ B_6 &= \{0, 4, 6\}, & B_7 &= \{1, 7, 8\} \\ B_8 &= \{2, 3, 5\}, & B_9 &= \{0, 5, 8\} \\ B_{10} &= \{1, 3, 6\}, & B_{11} &= \{2, 4, 7\} \end{aligned}$$

で与えられる。これに対応する $R_8(9, 2, 3)$ は、

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \alpha_1 &= (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1) \\ \alpha_2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \\ \alpha_3 &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \\ \alpha_4 &= (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \\ \alpha_5 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ \alpha_6 &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) \\ \alpha_7 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\ \alpha_8 &= (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \\ \alpha_9 &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\ \alpha_{10} &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ \alpha_{11} &= (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

となる。

上の $S(2, 3, 9)$ は $D(9, 3, 1)$ というBIBDでもあるので、これから $R_8(12, 3, 4)$ をつくると、

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ \alpha_1 &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) \\ \alpha_2 &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\ \alpha_3 &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ \alpha_4 &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \alpha_5 &= (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) \\ \alpha_6 &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \\ \alpha_7 &= (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \\ \alpha_8 &= (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

を得る。

4.9 A形の重み一定符号について

A形の重み一定符号については、それと1対1に対応させられる具体的なブロック計画はわかっていない。しかし、ある種の直交計画[5]から、A形の重み一定符号のみちびかれることはわかっている[22]。しかし、この説明には若干の紙数を要するので、ここでは割愛する。(つづく)

参考文献

- [5] Hall, M., *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, 1967. (邦訳)岩堀信子訳, 組合せ理論, 吉岡書店, 1971.
 - [6] 永尾汎, 群とデザイン, 岩波書店, 1974.
 - [19] 辻内順平, 村田和美, 光学情報処理, 朝倉書店, 1974.
 - [20] 石井明, 他4名, “光学的文献検索システム——PANDORAについて——,” 電子通信学会論文誌, **56C**, 12(1973), 653—660.
 - [21] 池野信一, 中村義作, “重み一定符号,” 電子通信学会論文誌, **54A**, 7(1971), 410—417.
 - [22] 苗村憲司, 中村義作, 池野信一, “重み一定符号とブロック計画,” 電子通信学会論文誌, **54A**, 12(1971), 671—678.
 - [23] 中村義作, 池野信一, 苗村憲司, “重み一定符号の最良性,” 電子通信学会論文誌, **55A**, 7(1972), 354—359.
 - [24] 宮川 洋, 岩垂好裕, 今井秀樹, 符号理論, 昭晃堂, 1973.
 - [25] Johnson, S. M., “A new upper bound for errorcorrecting codes,” *IRE Trans.*, **IT-8**, 3(1962), 203—207.
- (なかむら・ぎさく 信州大学工学部情報工学科)

次号予告

特集・医療のSD

自動化総合健診センターを含む医療システム

分析の試み

野城 真理

B型肝炎のシミュレーション

桜井 勉朗

システムダイナミックスの疾病対策への応用

柳川 洋・橋本 勉

医療需要の分析への1つのアプローチ

開原 成允

総合報告 割当問題

古林 隆

解説 組合せ理論の応用(5)

中村 義作