解説

# 組合せ理論の応用（3）

中村義作

## 3. 帰還型クロック処理における状態数の数えあげ

### 3.1 電子交換に見られる帰還型クロック処理

電子計算や電子交換における情報処理では，一定時間ごとに発生するクロック・パルスにもとづいて，要求がしばしば離散的に処理される．ここに紹介する帰還型クロック処理も，日本電信電話公社で開発した電子交換機の中で具体的にあらわれたものであるが，その内容を説明すると技術的になりすぎるので，待ち行列モデルの立場から説明する．

処理を要求して，呼(客)がシステムに到着する．処理装置は1台で，1つのクロック・パルスの発生からつぎのクロック・パルスの発生までの一定時間を，個々の呼の処理にあてる．もちろん，呼は先着順に処理されるので，このままでは，一定処理時間の単純な離散的待ち行列モデルにしかすぎない．実は，図3.1に見られるように，どの呼にも2回の処理が必要である．しかも，1回目の処理終了時から2回目の処理開始時までに，正確に$n$クロック分の時間経過が要求される．このため，1回目の処理終了時から$n$クロックを経過した呼は，他のすべての呼に優先して処理される．そして，2回目の処理も，相続く2つのクロック・パルス間の一定時間でなされる．つまり，処理時間の割り当て方に関しては，1回目の処理と2回目の処理はまったく同じである．

ところで，1回目の処理終了時から正確に$n$クロック経過後に2回目の処理を行なうことについて，はたしてどの呼にも矛盾なく適用できるかという疑問を抱くかもしれない．しかし，どのクロック・パルス発生時にも，1回目の処理はたかだか1個しか終了しないため，2回目の処理を要求するいくつかの呼が，同じ時刻の処理開始を主張して競合することはあり得ない．

この特殊な待ち行列モデルは，電子交換機内部の時間の計測に関連して生じたものであるが，これの待ち行列理論の立場からの解析〔12〕を紹介しようとは考えていない．この待ち行列モデルには，おもしろい組合せの問題が存在し，それを以前に検討したことがあるので〔13〕，その問題だけを紹介していく．したがって，以下の考察に待ち行列理論の知識は要求されず，ただ図3.1のモデルから，組合せ問題がどのようにして生まれるかを理解してもらえば，それで十分である．

### 3.2 状態の記述

いま，システムへ多くの呼が到着し，1回目の処理を要求して，多数の呼が待ち行列に並んでいるとする．すると，処理装置はどのクロック・パルス時も手待ちの状態とならず，帰還による2回目の処理か，新規到着による1回目の処理のいずれかを行なっている．そして，今後の各クロックにおける処理が2回目，1回目のどのような系列になるかは，$n$クロック前から1クロック前までの過去$n$回の処理の様相によって完全に決定される．これを，簡単な例で説明しよう．

$n$を5とし，1回目の処理終了時から，正確に5クロック経過後に2回目の処理を行なうものとする．5クロ

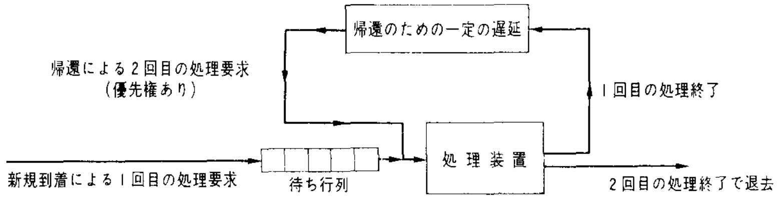


図 3.1

ック前から1クロック前までの間に処理された5個の呼に対し，それが1回目の処理であれば1，2回目の処理であれば，$-1$とかく．すると，現時点から見た過去5回の処理は，たとえば，

$$A_0=(1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1)$$

とあらわされる．ここに，古い処理ほど，右にかくことにした．したがって，うえの$A_0$では，4クロック前の処理だけが2回目で，その他はすべて1回目の処理である．いま，つぎに処理すべき呼をきめるため，5クロック前の処理を見ると，1回目の処理がなされている．このため，その呼の2回目の処理が優先され，つぎのクロック・パルス時には，状態が$A_0$から，

$$A_1=(-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1)$$

に移る．そこで，さらに5クロック前を見ると，今度は2回目の処理がなされており，その呼はシステムから退去している．したがって，待ち行列の先頭の呼の1回目の処理が行なわれ，状態は$A_1$から，

$$A_2=(1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

に移る．同じようにして，状態の推移をつぎつぎに見ると，

$$\begin{aligned}
A_0 &=(\ \ 1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ -1,\ \ \ 1)\\
A_1 &=(-1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ -1)\\
A_2 &=(\ \ 1,\ -1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ \ \ 1)\\
A_3 &=(-1,\ \ \ 1,\ -1,\ \ \ 1,\ \ \ 1)\\
A_4 &=(-1,\ -1,\ \ \ 1,\ -1,\ \ \ 1)\\
A_5 &=(-1,\ -1,\ -1,\ \ \ 1,\ -1)\\
A_6 &=(\ \ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ \ 1)\\
A_7 &=(-1,\ \ \ 1,\ -1,\ -1,\ -1)\\
A_8 &=(\ \ 1,\ -1,\ \ \ 1,\ -1,\ -1)\\
A_9 &=(\ \ 1,\ \ \ 1,\ -1,\ \ \ 1,\ -1)\\
A_{10} &=(\ \ 1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ -1,\ \ \ 1)
\end{aligned}$$

となり，10クロック後の$A_{10}$で最初の$A_0$に戻る．もちろん，以後は同じ系列が巡回してあらわれるだけである．

さて，これらの状態を表示するのに，図3.2のようにすると便利である．円周を十等分し，時計まわりの5個の点に，$A_0$の状態を記入する．そして直径上の向かい合った点に，それの負の値をつける．こうして，10個の点に1か$-1$がつけられたら，時計まわりの相続く5点の値を1つの状態表示とみなす．すると，反時計まわりの1/10周ずつの回転で，クロックごとに推移するつぎつぎの状態があらわれてくる．すなわち，図3.2は，多くの呼が待ち行列に並んでいるという条件で，巡回的に推移しうるすべての状態をあらわしている．

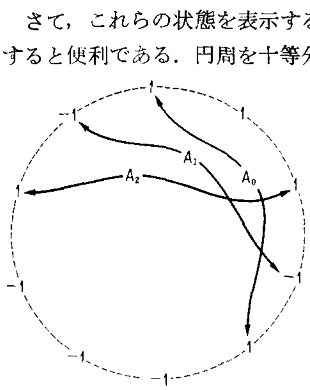


図 3.2

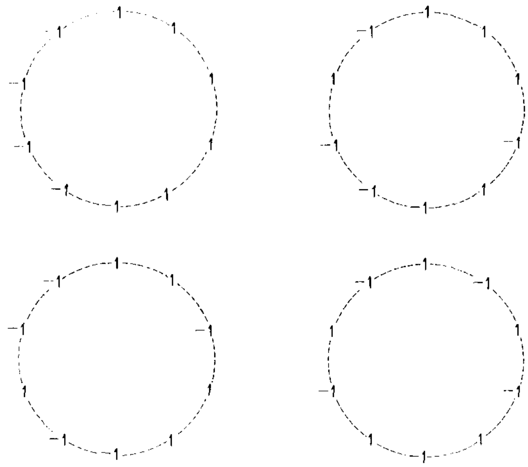

図 3.3

## 3.3 組合せ問題の定式化

図3.2では，推移できるすべての状態を記述したが，同種の配列は他にもいくつか存在する．$n=5$について具体的に調べてみると，図3.3の4種類であることがわかる．これらの4種類の配列は，待ち行列に呼が並んでいるかぎり，その中だけで巡回的に状態が推移し，待ち行列に呼がなくなると，1つの配列から他の配列へ移行する可能性がでてくる．図3.1の待ち行列モデルの解析では，図3.3に例示したような異種の配列の把握が大切であり，これによって，問題を個々の配列の中の巡回的推移のもとでの解析と，配列相互間の移行に関する解析にわけることができる．以下では，この解析のもとになる異種の配列の個数の求め方を調べる．

まず，これまでの考察をふまえて，待ち行列モデルとは独立に，卑近な形で組合せ問題だけを提起する．

「$n$を任意の自然数とし，$n$個の白玉と$n$個の黒玉，合わせて$2n$個の玉を円陣に配列する．このとき円陣の直径上に向かい合う2個の玉は異なる色であるものとする．いま，配列の中の隣接関係はそのままにしながら適当に回転させるとき，2つの配列が一致すれば，それらは同じパターンに属しているとみなす．すると，異なるパターンの数は全部で何とおりか．ここに，裏返しも含めて一致させられる配列は，異なるパターンに属するものとする．」

うえの円陣配列の問題が，図3.1の待ち行列モデルを

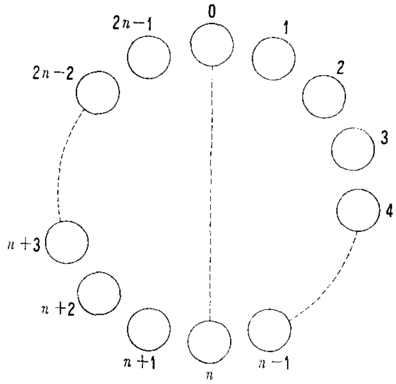


図 3.4

反映していることは明らかであろう．

### 3.4 予備考察

図3.4のように，玉を配置する $2n$ 個の場所に，0から $2n-1$ までの通し番号をつける．そして，1つの配列($B$ とする)の場所 $i$ ($i=0, 1, 2, \cdots, 2n-1$)の玉の色を $Y_i(B)$ であらわす．直径上に白玉と黒玉が向かい合うという条件は，

$$Y_i(B) \neq Y_{i+n}(B), \quad i=0, 1, 2, \cdots, n-1 \quad (3.1)$$

であらわされる．また，2つの配列 $B_1$ と $B_2$ が同じパターンに属する(適当な回転で一致する)ということは，

$$Y_i(B_1)=Y_{i+j}(B_2), \quad i=0, 1, 2, \cdots, n-1 \quad (3.2)$$

を満たす $j$ が存在することである．ただし，$Y_i(\cdot)$ の添字 $i$ は，一般に (mod. $2n$) で見るものとする(以後も同じ)．

いま，配列 $B$ を時計まわりに $s/2n$ 周だけ回転して得られる配列を $g^s(B)$ であらわす．定義によって，

$$Y_i[g^s(B)]=Y_{i+s}(B), \quad i=0, 1, 2, \cdots, n-1 \quad (3.3)$$

である．統一性をとるため，$g^0(B)$ は $B$ そのものをあらわすとする．$g^s$ を配列 $B$ から配列 $g^s(B)$ への置換とみなせば，$2n$ 個の置換

$$g^0, \ g^1, \ g^2, \ \cdots, \ g^{2n-1}$$

は位数 $2n$ の巡回(置換)群をつくる〔14〕が，以下では，群に関する予備知識を必要としない．

さて，1つの配列 $B$ に対し，

$$g^0(B), \ g^1(B), \ g^2(B), \ \cdots, \ g^{2n-1}(B)$$

の中に，$B$ と一致する配列が何個あるかを考えてみる．もちろん，配列 $B$ の選び方でその個数は変わるが，$g^0(B)$ は $B$ そのものであるから，少なくとも1個は存在する．他にも $B$ と一致する配列 $g^s(B)$ がいくつかあるときは，そのような $s$ の最小数を $s_m$ とする．すると，

$$g^{2s_m}(B)=g^{s_m}[g^{s_m}(B)]=g^{s_m}[B]=B$$

に注意すれば，

$$g^0(B)=g^{s_m}(B)=g^{2s_m}(B)=g^{3s_m}(B)=\cdots=B$$

が成り立つ．そして，この中には $g^{2n}(B)$ も含まれているはずである．なぜならば，もし $g^{2n}(B)$ が含まれていないとすると，

$$js_m<2n<(j+1)s_m$$

を満たす $j$ が存在し，

$$g^{js_m}(B)=g^{2n}(B)$$

から，

$$g^{2n-js_m}(B)=B$$

がみちびかれる．ここに，

$$0<2n-js_m<s_m$$

であるが，これは，$s_m$ が $g^s(B)=B$ となる $s$ の最小の正数であるという定義と矛盾する．

以上の考察から，$B$ と一致する配列は，$B$ を $s_m/2n$ 周ずつ回転するごとに，正確にあらわれることがわかった．そこで，1周する間に $B$ と一致する配列の個数を，

$$d(B)=2n/s_m \quad (3.4)$$

であらわし，配列 $B$ の巡会数とよぶ．巡会数はつねに奇数であることが，以下のようにして証明される．

もし，配列 $B$ の巡会数が偶数で，これを $2t$ とかけたとすると，

$$g^{2n/2t}(B)=g^{n/t}(B)=g^{t(n/t)}(B)=g^n(B)=B$$

で，式(3.3)を参照すれば，

$$Y_{i+n}(B)=Y_i(B), \quad i=0, 1, 2, \cdots, n-1$$

となる．しかし，これは白玉と黒玉が直径上で向かい合うという式(3.1)の条件と矛盾する．

これで，巡会数は奇数であることが証明されたが，この性質はパターンの種類を数えあげるときにきわめて有用である．

### 3.5 $n=2^k$ に対するパターンの個数

円陣に配列される玉の個数は，白玉 $n$ 個，黒玉 $n$ 個の $2n$ 個であるが，この中から $n$ 個を勝手に選び，図3.4の場所0から場所 $n-1$ までに適当に置く．すると，残りの $n$ 個の場所には，白玉と黒玉を直径上に向かい合わせるという条件によって，置く玉の種類(白・黒)が自動的にきまる．したがって，円周方向の回転も許さなければ配列の仕方の総数は，

$$2^n=2^{2^k}$$

である．

この中から，1つの配列 $B$ を選ぶとき，これの巡会数 $d(B)$ は $2n$ の奇約数である．ところが，$n=2^k$ であるから，

$$d(B)=1$$

は明らかである．つまり，どの配列をとっても，1周するまでの途中の状態で，もとの配列と一致するようなこ

とは起こらない．したがって，配列$B$の回転から，同じパターンに属する$2n$個の配列，

$$g^0(B),\ g^1(B),\ g^2(B),\ \cdots,\ g^{2n-1}(B)$$

をつくるとき，これらの配列はすべて異なる．これから，$2n$個の玉の配列に対するパターンの個数を$F(n)$とすれば，

$$F(n)=2^n/2n,\quad n=2^k \text{のとき}$$

が得られる．

### 3.6 一般の$n$に対するパターンの個数(準備)

$n$が2のベキ乗でないときは，$n$の値に応じて，いろいろの巡会数をもつ配列があらわれる．しかし，基本的な考え方は，まえの場合と同じである．まず，円周方向の回転も許さないとして，$2^n$個の配列をつくっておく．そして，これらを巡会数別に分類する．巡会数は$n$の奇約数であるが，その具体的内容はいまは問わない．巡会数を小さい順に，

$$d_1(=1),\ d_2,\ \cdots,\ d_r(\leqq n)$$

とかき，$d_j$の巡会数をもつ配列の個数を$N(d_j)$とする．すると，以下のようにして，巡会数別にパターンの個数を数えあげることができる．

まず，同じパターンに属するどの配列も，同じ巡会数をもっていることに着目する．これは，同じパターンに属するすべての配列は，その中の1つの配列の適当な回転で得られることから明らかである．このため，同じ巡会数をもつ配列の集合から，それらを含むパターンの個数は決定される．

$d_j$の巡会数をもつ$N(d_j)$個の配列の中から，1つの配列$B$を任意に選ぶ．$B$を$1/2n$周ずつ回転して，

$$g^0(B),\ g^1(B),\ g^2(B),\ \cdots,\ g^{2n-1}(B)$$

をつくるとき，巡会数の定義によって，

$$g^0(B)=g^{2n/d_j}(B)=B$$

$$g^0(B)\neq g^i(B),\quad 0<i<2n/d_j$$

である．したがって，配列$B$を1周する間に，

$$g^0(B),\ g^1(B),\ \cdots,\ g^{2n/d_j-1}(B)$$

という系列が$d_j$回あらわれる．これから，配列$B$を含むパターンは，全部で$2n/d_j$個の配列を含んでいる．このことは，$N(d_j)$個のすべての配列についていえるので，巡会数が$d_j$となるパターンの個数は，

$$N(d_j)/(2n/d_j)=d_jN(d_j)/2n$$

となる．したがって，これをすべての巡会数に対して加えると，パターンの総数$F(n)$として，

$$F(n)=\sum_{j=1}^{r}d_jN(d_j)/2n \tag{3.5}$$

を得る．

ところで，式(3.5)は$N(d_j)$が得られたものとしての解であり，現実には$N(d_j)$の解析が困難である．そこで，さらにくふうを行なう．

$$\sum_{j=1}^{r}d_jN(d_j)$$

は，巡会数$d_j$の配列$B$を$d_j$個と数えて加えたものであるが，これは，配列$B$に対して，

$$g^0(B),\ g^{2n/d_j}(B),\ g^{4n/d_j}(B),\ \cdots,\ g^{2n(d_j-1)/d_j}(B)$$

を数えたことと同じである．つまり，

$$g^s(B)=B,\quad 0\leqq s<2n \tag{3.6}$$

を満たす$s$の個数となっている．これをすべての配列について加えたものがうえの総和であるが，このことは，

$$g^s(B)=B \tag{3.7}$$

を満たす配列の個数を先に求めてから，それをすべての$s$について加えても，同じであることを示している．そこで，$2^n$個の配列のうち，式(3.7)を満たす配列の個数を$\Psi(g^s)$とすると，

$$\sum_{j=1}^{r}d_jN(d_j)=\sum_{s=0}^{2n-1}\Psi(g^s)$$

を得る．これを式(3.5)に代入すれば，$F(n)$は，

$$F(n)=\sum_{s=0}^{2n-1}\Psi(g^s)/2n \tag{3.8}$$

ともあらわされる．式(3.8)は，バーンサイドの定理〔15〕として知られている定理を，ここの問題に適応する形に変形したものである．ただし，バーンサイドの定理の本質は，ここの説明でつくされている．

### 3.7 オイラーの関数とメビウスの反転式

数えあげに関する組合せ問題では，オイラーの関数とメビウスの反転式がときとして有用である．ここの問題もその例で，これらについての簡単な復習をしておく．ただし，証明までを行なうと紙数を要するので，それは整数論の参考書〔16〕にゆだねざるを得ない．

$n$を任意の自然数とする．$n$より小さい自然数の中で，$n$と互いに素なものの個数を$\varphi(n)$であらわす．$\varphi(n)$はオイラーの関数とよばれる．素数$p$に対しては，$p$以下のどの自然数も$p$と互いに素なので，

$$\varphi(p)=p-1$$

となる．また，$p^k$に対しては，$p$の倍数だけが$p^k$と素でないので，

$$\varphi(p^k)=p^k(1-1/p)$$

となる．一般に，$n$を素数のベキ乗に分解して，

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

とかくとき，

$$\varphi(n)=n(1-1/p_1)(1-1/p_2)\cdots(1-1/p_r) \tag{3.9}$$

が成り立つ．

$q$が$n$を割り切ることを，$q|n$とかく．すると，

$$\sum^{q|n}\varphi(q)=n \tag{3.10}$$

という重要な関係が成り立つ．さらに，$h$を$n$以下の自然数とし，$h$と$n$の最大公約数を$(h,\ n)$であらわす．

$$q=(h,\ n) \tag{3.11}$$

とおいて，$q$と$n$から逆に式(3.11)を満たす$h$の個数を求めると$\varphi(n/q)$を得る．

自然数$n$に対するメビウスの関数$\mu(n)$は，

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n\text{が}1\text{のとき}\\ 0, & n\text{が素数の}2\text{乗で割れるとき}\\ (-1)^r, & n\text{が異なる}r\text{個の素数の積のとき}\end{cases}$$

で定義される．式(3.10)に対応して，

$$\sum^{q|n}\mu(q)=0,\ \ n>1 \tag{3.12}$$

という関係が成り立つ．

$\alpha(n)$を任意の整数論的関数とする．ここに，整数論的関数とは，定義域と値域がともに整数となる関数である．いま，$\beta(n)$を，

$$\beta(n)=\sum^{q|n}\alpha(q) \tag{3.13}$$

で定義される整数論的関数とする．メビウスの関数を用いると，

$$\alpha(n)=\sum^{q|n}\mu(n/q)\beta(q) \tag{3.14}$$

が成り立つ．式(3.14)は，メビウスの反転式とよばれている．

### 3.8 一般の$n$に対するパターンの個数(導出)

式(3.7)に戻り，これを満たす配列$B$の個数$\Psi(g^s)$を求める．円陣に配列する白玉と黒玉の個数$n$を任意の自然数とし，その最大の奇約数を$m$とおけば，

$$n=2^km,\ \ k\geqq 0$$

である．任意の配列$B$の巡会数$d(A)$は，円陣をつくる玉の総数$2n$の奇約数であるから，$m$の約数でもある．したがって，

$$g^s(B)=B$$

を満たす$s$は，

$$2n/d(B)=2^{k+1}[m/d(B)]$$

の倍数でなければならず，$0\leqq s<2n$に注意すると，

$$s=2^{k+1}h,\ \ 0\leqq h<m \tag{3.15}$$

とかかれることがわかる．そこで，

$$g^{2Kh}(B)=B,\qquad \text{ただし}\quad K=2^k \tag{3.16}$$

とおき，これを満たす配列$B$の個数を求める．

$h$が$m$の約数(すなわち，$2Kh$が$2n$の約数)のときは，$2n$個の玉の中の相続く$2Kh$個ずつが同じ系列でくり返せばよく，これには$2Kh$個の半分の$Kh$個の玉の色を自由にきめればよい．したがって，

$$\Psi(g^{2Kh})=2^{Kh}=2^{nh/m},\qquad h|m\text{のとき} \tag{3.17}$$

を得る．

$h$が$m$の約数でないときは，$h$と$m$の最大公約数を，

$$q=(h,\ m)$$

とおけば，式(3.16)を満たす配列の集合と，

$$g^{2Kq}(B)=B,\qquad \text{ただし}\quad K=2^k \tag{3.18}$$

を満たす配列の集合とは一致する．なぜならば，$h$は$q$の倍数であるから，式(3.18)を満たす配列は，明らかに式(3.16)も満たす．また，式(3.16)を満たす配列$B$に対し，$g^{2Kh}$の回転をつぎつぎに施して，

$$g^0(B),\ \ g^{2Kh}(B),\ \ g^{4Kh}(B),\ \ \cdots$$

の系列をつくると，最大公約数の性質によって，$g$の指数にはmod. $2n$で$2Kq$がかならずあらわれる．このことは，式(3.18)も満たしていることを示す．よって，式(3.16)を満たす配列の個数は，式(3.17)をみちびくときと同様にして，

$$\Psi(g^{2Kh})=\Psi(g^{2Kq})=2^{Kq}=2^{nq/m} \tag{3.19}$$

$$\text{ただし，}q=(h,\ m)$$

を得る．式(3.19)は，特別な場合として式(3.17)を含むので，$\Psi(g^{2Kh})$に対する一般式である．すでに述べたように，$q=(h,\ m)$を満たす$q$の個数は$\varphi(m/q)$であるから，式(3.8)をかきなおすと，

$$F(n)=\sum^{q|m}\varphi(m/q)2^{nq/m}/2n,\ \ n=2^km \tag{3.20}$$

を得る．式(3.20)は，パターンの個数を与える所望の結果である．

また，巡会数別のパターンの個数を求めるには，メビウスの反転式に式(3.19)を用いればよい．すなわち，巡会数が$d$の配列に対するパターンの個数を$F_d(n)$とおくと，

$$F_d(n)=\sum^{q|t}\mu(t/q)2^{Kq}/2Kt,\qquad t=m/d \tag{3.21}$$

を得る．

これで，与えられた組合せ問題は解決したが，小さい$n$について$F(n)$と$F_d(n)$を具体的に求めてみると，表3.1を得る．

表 3.1

| $F(n)$ | $F_d(n)$による内訳 | | |
|---|---|---|---|
| $F(2)=1$ | $F_1(2)=1$ | | |
| $F(3)=2$ | $F_1(3)=1$, | $F_3(3)=1$ | |
| $F(4)=2$ | $F_1(4)=2$ | | |
| $F(5)=4$ | $F_1(5)=3$, | $F_5(5)=1$ | |
| $F(6)=6$ | $F_1(6)=5$, | $F_3(6)=1$ | |
| $F(7)=10$ | $F_1(7)=9$, | $F_7(7)=1$ | |
| $F(8)=16$ | $F_1(8)=16$ | | |
| $F(9)=30$ | $F_1(9)=28$, | $F_3(9)=1$, | $F_9(9)=1$ |
| $F(10)=52$ | $F_1(10)=51$, | $F_5(10)=1$ | |
| $F(11)=94$ | $F_1(11)=93$, | $F_{11}(11)=1$ | |
| $F(12)=172$ | $F_1(12)=170$, | $F_3(12)=2$ | |

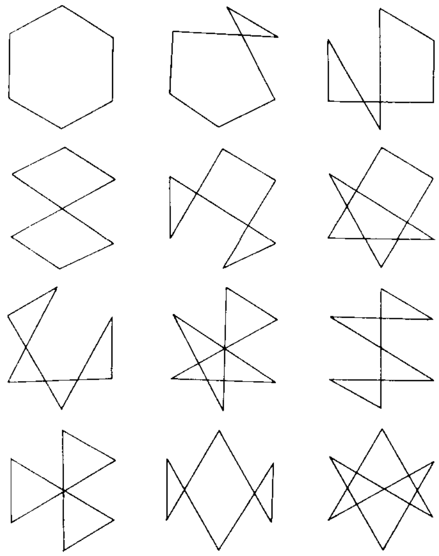

図 3.5

### 3.9 類似の組合せ問題と若干の補足

帰還型クロック処理の待ち行列モデルに関連づけて 1 つの組合せ問題を提起し，数えあげの問題をいろいろと検討してきたが，実は，他にも類似の組合せ問題が存在する．たとえば，円周を $n$ 等分し，それらを結ぶハミルトン閉路を考える．閉路の位置を固定すれば，$(n-1)!$ 個のハミルトン閉路を得るが，回転や裏返しで重なるものを同じパターンとみなすと，類似の数えあげ問題が生ずる．参考までに，$n=6$ に対する全パターンを示すと，図 3.5 となる．また，何種類かの玉で首飾りをつくるとき，可能な首飾りのパターンの総数も，同種類の問題に属する．前者のハミルトン閉路の問題は，かつて筆者が検討したもの〔17〕であるが，それより以前に，後者も含む一般的問題を岩堀氏が検討していた〔18〕．本報告とあわせて読めば，参考となろう．(つづく)

#### 参考文献


〔12〕 村尾洋，“帰還遅れのある帰還型 Discrete Time Queue について，” 日本ＯＲ学会秋季研究会，1970.

〔13〕 中村義作，村尾洋，“ある円陣配列に関する組合せ問題，” 日本ＯＲ学会秋季研究会，1972.

〔14〕 秋月康夫，鈴木通夫，高等代数学 I，岩波全書，1957.

〔15〕 Liu，C. L.，*Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968. (邦訳) 伊理正夫他訳，組合せ理論入門 ( I )，共立全書，1972.

〔16〕 高木貞治，初等整数論講義，共立出版，1974.

〔17〕 中村義作，“パズルと組合せ理論，” 数理科学，115(1973)，5-11.

〔18〕 岩堀長慶，“対称回路の個数の計算法，” 数理科学，19(1965)，36-40.



(なかむら・ぎさく　信州大学工学部情報工学科)