総合報告

# 逐次決定過程としての動的計画論 (II)

岩 本 誠 一

## §4. 動的計画における逆定理

線形計画，あるいは一般に非線形計画における基本定理は双対定理である．本節では，動的計画においても，そのクラスを限定すれば，線形計画における双対定理に対応する定理——逆定理——が成立することを述べる．これまで特殊な型の動的計画やマルコフ型決定過程における双対定理は線形計画問題に変換することによって論じられている[23, 37, 38等]．しかし，動的計画本来の型における双対定理らしきものは，逆定理をのぞいて，他に報告されていないように思われる．事実，筆者が1977年4月のカナダでの動的計画国際会議で各国の研究者と情報交換したかぎりでは，逆定理は耳新しいものに感じられたようである[33]．われわれは逆定理を3つの型で述べる．Iは逆定理の本質をあらわしているが，IIが応用上有効である．IIIは動的計画論の中心をなしている[13, 14, 16, 24, 26, 27, 30, 33—35]．

2変数関数 $f(x,y): R^2_+ \to R^1_+$ は $x$ を任意に固定すると $y$ の狭義増加(非減少)関数であるとき，$R^2_+$ 上で狭義増加(非減少)性をもつ関数という．このような関数の族は§3.1で定義された $R^2_+$ 上で狭義増加(非減少)性をもつ再帰型関数を含む．連続関数 $f, g: R^2_+ \to R^1_+$, $u, v: R^1_+ \to R^1_+$ に対して，関数 $T(f;g)u$, $S(g;f)v: R^1_+ \to R^1_+$ をそれぞれ，

$$T(f;g)u(c) = \mathop{\mathrm{Max}}_{\substack{x \geq 0,\, y \geq 0 \\ g(x,y) \leq c}} f(x, u(y))$$

$$S(g;f)v(c) = \mathop{\mathrm{Min}}_{\substack{x \geq 0,\, y \geq 0 \\ f(x,y) \geq c}} g(x, v(y))$$

で定義する．$\boldsymbol{F}$ を $R^1_+$ から $R^1_+$ への連続狭義増加関数の全体とすると，$T(f;g)$ と $S(g;f)$ は $\boldsymbol{F}$ 上の互いに逆な作用素となっている．

補題2（逆命題） $f, g: R^2_+ \to R^1_+$ を $R^2_+$ 上で狭義増加性をもつ関数，$u$, $v$ を $\boldsymbol{F}$ の元とする．このとき，

(i) $T(f;g)u$, $S(g;f)v$ も $\boldsymbol{F}$ の元である．

(ii) とくに，$u$ が $v$ の逆関数ならば，$T(f;g)u$ も $S(g;f)v$ の逆関数である．

この逆命題は以下の逆定理の基礎になっている．

例題7 $f(x,y)=xy, g(x,y)=x+\dfrac{y}{x}$, $u(c)=v(c)=c$ とすると，$u, v \in \boldsymbol{F}$ で，$u$ と $v$ は互いに逆関数になっている．このとき，

$$T(f;g)u(c) = \mathop{\mathrm{Max}}_{\substack{x+\frac{y}{x} \leq c \\ x,y>0}} xy = \frac{2^2}{3^3}c^3$$

$$S(g;f)v(c) = \mathop{\mathrm{Min}}_{\substack{xy \geq c \\ x,y>0}} \left(x+\frac{y}{x}\right) = \frac{3}{2^{2/3}}c^{1/3}$$

だから，$T(f;g)u$, $S(g;f)v \in \boldsymbol{F}$ で，しかも両者は互いに逆関数になっている．

関数 $f(x,y)=\min(x^p, y^q)$, $g(x,y)=\max(x^r, y^s)$ $(p, q, r, s>0)$ はかならずしも $R^2_+$ 上で狭義増加性はないが非減少性をもつ関数である．このような関数についても逆命題は成立する．たとえば，

例題7′ $f(x,y)=\min(x,y)$, $g(x,y)=\max(x,y)$, $u(c)=c^p$, $v(c)=c^{1/p}$ $(p>0)$ とすると，$T(f;g)u(c)=\min(c, c^p)$, $S(g;f)v(c)=\max(c, c^{1/p})$ は互いに逆関数になっている．

逆命題の証明等の詳論は[24, 34]，種々の具体例は[14, 16]で与えられている．

つぎに，$R^N_+$ 上で狭義増加性をもつ再帰型関数 $f, g$: $R^N_+ \to R^1_+$ に対して，

主問題 I　$\mathrm{Max}\ f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$

　s.t. (i) $g(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leq c\ (\geq 0)$

　　(ii) $x_n \geq 0\quad 1 \leq n \leq N$,

逆問題 I　$\mathrm{Min}\ g(y_1, y_2, \cdots, y_N)$

　s.t. (i)′ $f(y_1, y_2, \cdots, y_N) \geq c\ (\geq 0)$

　　(ii)′ $y_n \geq 0\quad 1 \leq n \leq N$

を考える．これらは問題1，2で $p=q=1$ の場合であるから，動的計画 $\boldsymbol{D}$ で表現される．$f$, $g$ は再帰型だから，$(N-n+1)$ 部分動的計画 $\boldsymbol{D}_{N-n+1}$ で表現される $(N-n+1)$ 部分問題

(11) $\mathrm{Max}\ f_n(x_n; f_{n+1}(x_{n+1}; \cdots; f_{N-1}(x_{N-1}; f_N(x_N))\cdots))$

(12) s.t. (i) $g_n(x_n; g_{n+1}(x_{n+1}; \cdots; g_{N-1}(x_{N-1}; g_N(x_N))\cdots)) \leq c$

(13) 　(ii) $x_k \geq 0\quad n \leq k \leq N$,

(14) $\text{Min } g_n(y_n; g_{n+1}(y_{n+1}; \cdots; g_{N-1}(y_{N-1}; g_N(y_N))\cdots))$

(15) $\text{s.t. (i)}' \ f_n(y_n; f_{n+1}(y_{n+1}; \cdots; f_{N-1}(y_{N-1}; f_N(y_N))\cdots)) \geqq c$

(16) $\text{(ii)}' \ y_k \geqq 0 \quad n \leqq k \leqq N$

が考えられる．$u^{N-n+1}(c)$を(11)—(13)の最大値，$v^{N-n+1}(c)$を(14)—(16)の最小値とすれば，$u^N(c)$は主問題Ｉの最大値，$v^N(c)$は逆問題Ｉの最小値である．

定理２（逆定理Ｉ） $u^{N-n+1}$と$v^{N-n+1}$は$\boldsymbol{F}$の元で，両者は互いに逆関数である（$1 \leqq n \leqq N$）．とくに，主問題Ｉの最大値関数は逆問題Ｉの最小値関数の逆関数である．

逆定理Ｉは，両問題のうち一方を解けば，その逆関数が他方の解であることを示している．この点，計算上便利である．たとえば，

例題８ 主問題 $\text{Max} \prod_1^N x_n$ s.t. (i) $\sum_1^N x_n \leqq c\ (\geqq 0)$ (ii) $x_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$ は，再帰式を解くことによって，$u^1(c)=c,\ u^2(c)=\dfrac{c^2}{2^2},\ \cdots,\ u^N(c)=\dfrac{c^N}{N^N}$をもつことがわかる．したがって，逆定理Ｉより，

逆問題 $\text{Min} \sum_1^N y_n$ s.t. (i)′ $\prod_1^N y_n \geqq c\ (\geqq 0)$ (ii)′ $y_n \geqq 0$ $1 \leqq n \leqq N$ は $v^1(c)=(u^1)^{-1}(c)=c,\quad v^2(c)=(u^2)^{-1}(c)=2\sqrt{c},\ \cdots,\ v^N(c)=(u^N)^{-1}(c)=N \times \sqrt[N]{c}$をもち，この最小値は$v^N(c)=N\sqrt[N]{c}$で与えられる．もちろん，この逆問題の $v^1,\ v^2,\ \cdots,\ v^N$ は図２であらわされたように再帰式を解いても求めることができる．

逆定理Ｉは $R^N_+$ 上で非減少性をもつ再帰型関数についても多くの場合成り立っている．たとえば，

例題８′ 主問題 $\text{Max} \sum_1^N x_n$ s.t. (i) $\max_{1 \leqq n \leqq N} r(x_n) \leqq c$ $(\geqq 0)$ (ii) $x_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$

逆問題 $\text{Min} \max_{1 \leqq n \leqq N} r(y_n)$ s.t. (i)′ $\sum_1^N y_n \geqq c\ (\geqq 0)$ (ii)′ $y_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$

（ただし $r: R^1_+ \to R^1_+$ は連続狭義増加関数）

に対しては，$u^{N-n+1}(c)=(N-n+1)r^{-1}(c),\ v^{N-n+1}(c)=r(c/(N-n+1))$ は互いに逆関数になっている．ここに$g(x_1, x_2, \cdots, x_N)=\max_{1 \leqq n \leqq N} r(x_n)$は $R^N_+$ 上で狭義増加性はないが非減少性をもつ再帰型関数である．逆定理Ｉについては［16］がくわしい．

さて$f$，$g$は逆定理Ｉと同様に$R^N_+$上で狭義増加性をもつ再帰型関数，$u_n: R^1_+ \to R^1_+$ は上への連続狭義増加関数，$v_n$は$u_n$の逆関数（$1 \leqq n \leqq N$）として，つぎの問題対を考える：

主問題Ⅱ $\text{Max } f(u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_N(x_N))$

$\text{s.t. (i)} \quad g(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq c\ (\geqq 0)$

$\text{(ii)} \quad x_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$

逆問題Ⅱ $\text{Min } g(v_1(y_1), v_2(y_2), \cdots, v_N(y_N))$

$\text{s.t. (i)}' \quad f(y_1, y_2, \cdots, y_N) \geqq c\ (\geqq 0)$

$\text{(ii)}' \quad y_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$

とくに $u_n(x)=v_n(x)=x$ とすれば，問題対Ⅱは問題対Ｉになる．このようにⅡはＩに連続狭義増加な変数変換を施した型になっている．主問題Ⅱの最大値関数と最大点（最大値を与える点）関数の対と，逆問題Ⅱの最小値関数と最小点関数の対の間には，つぎの逆関係が成立する：

定理３（逆定理Ⅱ） (i) 主問題Ⅱが連続狭義増加な最大値関数 $U$ と，最大点関数 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*)$ をもつための必要十分条件は逆問題Ⅱが連続狭義増加な最小値関数 $U^{-1}$ と，最小点関数 $(u_1 \circ x_1^* \circ U^{-1},\ u_2 \circ x_2^* \circ U^{-1},\ \cdots,\ u_N \circ x_N^* \circ U^{-1})$をもつことである．ただし∘は関数の合成．

(ii) 逆問題Ⅱが連続狭義増加な最小値関数$V$と，最小点関数 $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_N)$ をもつための必要十分条件は主問題Ⅱが連続狭義増加な最大値関数$V^{-1}$と，最大点関数$(v_1 \circ \hat{y}_1 \circ V^{-1}, v_2 \circ \hat{y}_2 \circ V^{-1}, \cdots, v_N \circ \hat{y}_N \circ V^{-1})$ をもつことである．

逆定理Ⅱは $f$，$g$ を非減少性をもつ再帰型関数にしても成立する［35］．主問題Ⅱは定理１にもとづく再帰式を逐次解くことによって最大値関数と最大点関数が求められる．逆問題Ⅱも同様に最小値関数と最小点関数が計算される．しかし，逆定理Ⅱを用いれば，逆問題Ⅱの解は主問題Ⅱの解の合成と逆演算によって求められる．

例題９ 主問題 $\text{Max} \prod_1^N x_n$ s.t. (i) $\sum_1^N r(x_n) \leqq c\ (\geqq 0)$

(ii) $x_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$

逆問題 $\text{Min} \sum_1^N r(y_n)$ s.t. (i)′ $\prod_1^N y_n \geqq c\ (\geqq 0)$

(ii)′ $y_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$

（ただし $r: R^1_+ \to R^1_+$ 狭義増加な凸関数）

において$u_n(x)=v_n(x)=x$ $1 \leqq n \leqq N$として再帰式を解くと，$u^{N-n+1}(c)=(r^{-1}(c/(N-n+1)))^{N-n+1}$より，主問題は最大値関数$U(c)=u^N(c)=(r^{-1}(c/N))^N$になり，その最大点関数$(x_1^*(c),\ x_2^*(c),\ \cdots,\ x_N^*(c))=(r^{-1}(c/N),\ r^{-1}(c/N),\ \cdots,\ r^{-1}(c/N))$が得られる．したがって，逆定理Ⅱによれば，逆問題に対しては再帰式を解くことなく，最小値関数$V(c)=U^{-1}(c)=Nr(\sqrt[N]{c})$，最小点関数$(\hat{y}_1(c), \hat{y}_2(c),\ \cdots,\ \hat{y}_N(c))=((u_1 \circ x_1^* \circ U^{-1})(c),\ (u_2 \circ x_2^* \circ U^{-1})(c), \cdots, (u_N \circ x_N^* \circ U^{-1})(c))=(\sqrt[N]{c}, \sqrt[N]{c}, \cdots, \sqrt[N]{c})$が得られる．もちろん，この解は再帰式を解いても得られる．

例題９′ 主問題 $\text{Max } x_1+\min(x_2, x_3+x_4)$

$\text{s.t. (i)} \ \max(x_1,\ x_2+\max(x_3, x_4)) \leqq c\ (\geqq 0)$

$\text{(ii)} \ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$

逆問題 $\text{Min } \max(y_1, y_2+\max(y_3, y_4))$

$\text{s.t. (i)}' \ y_1+\min(y_2, y_3+y_4) \geqq c\ (\geqq 0)$

$\text{(ii)}' \ y_1, y_2, y_3, y_4 \geqq 0$

は $U(c)=\dfrac{5}{3}c,\ x_1^*(c)=c,\ x_2^*(c)=\dfrac{2}{3}c,\ x_3^*(c)=x_4^*(c)=\dfrac{1}{3}c,\ V(c)=\dfrac{3}{5}c,\ \hat{y}_1(c)=\dfrac{3}{5}c,\ \hat{y}_2(c)=\dfrac{2}{5}c,\ \hat{y}_3(c)=\hat{y}_4(c)=\dfrac{1}{5}c$をもつ．$u_n(x)=v_n(x)=x$ $1 \leqq n \leqq 4$として，$U^{-1}=V,\ \hat{y}_n=u_n \circ x_n^* \circ U^{-1}$ $1 \leqq n \leqq 4$ が成立している．

$u_n$, $v_n$ がかならずしも恒等関数でない例題は[14, 35]にあげられている．逆定理IIは例題 8, 8′ についても成立している．また，逆定理IIは特別な場合として逆命題，逆定理 I をそれぞれ含んでいる．

§1の動的計画は種々の最適化問題を表現していたが，このように定義された動的計画は，そのクラスを限定すれば，逆動的計画が定義でき，逆定理IIIが成立する．そのために，まず，$N$段主動的計画をつぎの7つの要素で与える：

$(\mathrm{Max},\ \{S_n\}_{1\leq n\leq N+1},\ \{R_n\}_{1\leq n\leq N+1},\ \{A_n\}_{1\leq n\leq N},\ \{f_n\}_{1\leq n\leq N},\ k,\ \{T_n\}_{1\leq n\leq N})$

ただし$\{R_n\}$以外は§1で述べられているが，各要素にはつぎの制約が課されている：(1)$S_n$は$R^1$の区間，(2)$R_n$は$R^1$の区間で，第 $n$ 利得空間という，(3)“集合” $A_n$ は§1のとおり，写像 $A_n: S_n\to 2^{A_n}$ はつぎの(17)で定義される，(4)第 $n$ 利得関数 $f_n=f_n(a_n;r_{n+1}):A_n\times R_{n+1}\to R_n$ は上への連続関数で，各 $f_n(a_n;\cdot)$ $(a_n\in A_n)$ は狭義増加，(5)$k: S_{N+1}\to R_{N+1}$ は上への連続狭義増加関数，(6) $T_n: S_n\times A_n\to R^1$ は連続関数で，各 $T_n(\cdot, a_n)$ $(a_n\in A_n)$ は狭義増加で，各 $s_n\in S_n$ に対して $T_n(s_n, a_n)\in S_{n+1}$ となる $a_n\in A_n$ が存在する．このとき $A_n(s_n)$を，

$$(17)\quad A_n(s_n)=\{a_n\in A_n \mid T_n(s_n, a_n)\in S_{n+1}\}\quad s_n\in S_n\quad 1\leq n\leq N$$

で定義する．主動的計画は最大値問題

$$\mathrm{Max}\ f_1(a_1;f_2(a_2;\cdots;f_N(a_N;k(s_{N+1}))\cdots))$$
$$\mathrm{s.t.}\ (\mathrm{i})\quad T_n(s_n,a_n)=s_{n+1}\quad 1\leq n\leq N$$
$$(\mathrm{ii})\quad a_n\in A_n(s_n)\quad 1\leq n\leq N$$

を表現している．これに対して逆動的計画をつぎで定義する：

$(\mathrm{Min},\ \{R_n\}_{1\leq n\leq N+1},\ \{S_n\}_{1\leq n\leq N+1},\ \{A_n\}_{1\leq n\leq N},\ \{g_n\}_{1\leq n\leq N},\ l,\ \{U_n\}_{1\leq n\leq N})$

ただし　$g_n=g_n(a_n;s_{n+1})=(T_{na_n})^{-1}(s_{n+1}):A_n\times S_{n+1}\to S_n$

$l=l(r_{N+1})=k^{-1}(r_{N+1}): R_{N+1}\to S_{N+1}$

$U_n=U_n(r_n,a_n)=(f_n{}^{a_n})^{-1}(r_n): R_n\times A_n\to R_{n+1}$.

このとき“状態” $r_n$ における可能な決定空間 $B_n(r_n)$を

$$B_n(r_n)=\{a_n\in A_n \mid U_n(r_n,a_n)\in R_{n+1}\}\quad r_n\in R_n\quad 1\leq n\leq N$$

で定義する．この逆動的計画は最小値問題

$$\mathrm{Min}\ g_1(a_1;g_2(a_2;\cdots;g_N(a_N;l(r_{N+1}))\cdots))$$
$$\mathrm{s.t.}\ (\mathrm{i})'\quad U_n(r_n,a_n)=r_{n+1}\quad 1\leq n\leq N$$
$$(\mathrm{ii})'\quad a_n\in B_n(r_n)\quad 1\leq n\leq N$$

を表現している．すなわち，主動的計画と逆動的計画では，最適子の交換，状態(空間)と利得(空間)の交換，利得関数と状態変換の“逆の意味”での交換，終端利得関数の逆変換がなされている．このとき，両計画の最適利得関数と最適政策の対の間にはつぎの逆関係が成立する：

定理4(逆定理III)　主(逆)動的計画が連続狭義増加な最適利得関数$\{w^0, w^1, \cdots w^N\}$と，最適政策$\{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \cdots, \tilde{\mu}_N\}$をもつための必要十分条件は逆(主)動的計画が連続狭義増加な最適利得関数 $\{(w^0)^{-1}, (w^1)^{-1}, \cdots, (w^N)^{-1}\}$と，最適政策 $\{\tilde{\mu}_1\circ(w^N)^{-1}, \tilde{\mu}_2\circ(w^{N-1})^{-1}, \cdots, \tilde{\mu}_N\circ(w^1)^{-1}\}$ をもつことである．

逆定理IIIを応用してみよう．たとえば $(N-1)$ 段計画について，

例題10　Max，$S_n=R_n=A_n=R^1{}_+$，$f_n(a_n;r_{n+1})=a_nr_{n+1}$, $k(s_N)=s_N$, $T_n(s_n,a_n)=s_n-a_n$ とすれば，$(N-1)$段主動的計画は，

$$\mathrm{Max}\Big(\prod_1^{N-1}a_n\Big)\times s_N\ \mathrm{s.t.}\ (\mathrm{i})\ \ s_n-a_n=s_{n+1}\ \ 1\leq n\leq N-1,$$
$$(\mathrm{ii})\ \ 0\leq a_n\leq s_n\quad 1\leq n\leq N-1$$

すなわち，$s_1=c$，$a_n=x_n$ $1\leq n\leq N-1$，$s_N=x_N$ に書きなおせば，例題8の主問題，

$$\mathrm{Max}\ \prod_1^N x_n\ \ \mathrm{s.t.}\ (\mathrm{i})\ \sum_1^N x_n\leq c\ \ (\mathrm{ii})\ \ x_n\geq 0\ \ 1\leq n\leq N$$

を表現している．この主動的計画は，例題8と同様に，再帰式を解いて，最適利得関数 $\{u^0, u^1, \cdots, u^{N-1}\}$ と最適政策 $\{\pi_1{}^*, \pi_2{}^*, \cdots, \pi_{N-1}{}^*\}$ を得る．ただし，

$$u^n(s_{N-n})=(s_{N-n}/(n+1))^{n+1}$$
$$\pi_n{}^*(s_n)=s_n/(N-n+1).$$

他方，これに対する逆動的計画はつぎで与えられる：

Min，$R_n=S_n=A_n=R^1{}_+$，$g_n(a_n;s_{n+1})=(T_{na_n})^{-1}(s_{n+1})=a_n+s_{n+1}$, $l(r_N)=k^{-1}(r_N)=r_N$, $U_n(r_n,a_n)=(f_n{}^{a_n})^{-1}(r_n)=r_n/a_n$.

したがって，この計画は，

$$\mathrm{Min}\Big(\sum_1^{N-1}a_n\Big)+s_N\ \ \mathrm{s.t.}\ (\mathrm{i})'\ \ r_n/a_n=r_{n+1}\ \ 1\leq n\leq N-1,$$
$$(\mathrm{ii})'\ \ a_n>0\ \ 1\leq n\leq N-1$$

すなわち例題8の逆問題を表現している．よって，逆定理IIIにより，逆動的計画は最適利得関数$\{(u^0)^{-1}, (u^1)^{-1}, \cdots, (u^{N-1})^{-1}\}$ と最適政策 $\{\pi_1{}^*\circ(u^{N-1})^{-1}, \pi_2{}^*\circ(u^{N-2})^{-1}, \cdots, \pi_{N-1}{}^*\circ(u^1)^{-1}\}$ をもつ．ただし，$v^n=(u^n)^{-1}$, $\hat{\sigma}_n=\pi_n{}^*\circ u^{N-n}$ とおけば，

$$v^n(r_{N-n})=(n+1)\sqrt[n+1]{r_{N-n}}\quad \hat{\sigma}_n(r_n)=\sqrt[N-n+1]{r_n}.$$

もちろん，この解は再帰式

$$v^0(r_N)=l(r_N)=r_N$$
$$v^n(r_{N-n})=\min_{a_n>0}\ [a_n+v^{n-1}(r_{N-n}/a_{N-n})]$$
$$1\leq n\leq N-1$$

を解いても得られる．

つぎの例題の主(逆)動的計画の第 $n$ 利得(状態)空間は $n$ に依存して変化している：

例題10′　Max，$S_n=R^1{}_+$，$R_n=[0, N-n+1)$，$A_n=R^1{}_+$, $f_n(a_n;r_{n+1})=a_n/(1+a_n)+r_{n+1}$, $T_n(s_n,a_n)=s_n-$

$a_n$, $k(s_N)=s_N/(1+s_N)$ を要素にもつ $(N-1)$ 段主動的計画は,

$$\mathrm{Max}\ \sum_1^N \frac{x_n}{1+x_n}\quad \mathrm{s.t.}\ (\mathrm{i})\ \sum_1^N x_n \leqq c(\geqq 0)$$

$$(\mathrm{ii})\ x_n \geqq 0\quad 1\leqq n\leqq N$$

を表現し, $\pi_n{}^*(s_n)=s_n/(N-n+1)$, $u^n(s_{N-n})=(n+1)s_{N-n}/(n+1-s_{N-n})$ なる最適政策 $\{\pi_1{}^*,\pi_2{}^*,\cdots,\pi_{N-1}{}^*\}$ と最適利得関数 $\{u^0,u^1,\cdots,u^{N-1}\}$ をもつ. 他方, 逆動的計画は要素

$\mathrm{Min},\ g_n(a_n;s_{n+1})=a_n+s_{n+1}, U_n(r_n,a_n)=-a_n/(1+a_n)+r_n,\ l(r_N)=r_N/(1-r_N)$

をもち, したがって,

$$\mathrm{Min}\ \sum_1^N y_n\ \ \mathrm{s.t.}\ \ (\mathrm{i})'\ \sum_1^N \frac{y_n}{1+y_n}\geqq c(\in[0,N))$$

$$(\mathrm{ii})'\ y_n\geqq 0\quad 1\leqq n\leqq N$$

を表現している. 逆定理IIIより, 逆動的計画は最適政策 $\{\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\cdots,\hat{\sigma}_{N-1}\}$ と最適利得関数 $\{v^0,v^1,\cdots,v^{N-1}\}$ をもつ. ただし,

$$\hat{\sigma}_n(r_n)=r_n/(N-n+1-r_n)$$

$$v^n(r_{N-n})=(n+1)r_{N-n}/(n+1-r_{N-n})$$

逆定理IIIについては [13, 26, 27, 30] がくわしい. また例題 7, 7′, 8, 8′, 9, 9′ の最大(小)値問題は主(逆)動的計画で表現される.

## §5. 不等式への応用

前述の主問題I・逆問題Iの最大・最小値関数を求めることによって, 古典的な不等式 [21, 22] を証明することができる. 逆に, これらの不等式を用いれば, 主問題I・逆問題Iの最大・最小値関数を容易に求めることができる. このように問題対Iの最適値関数を(たとえば, 動的計画の再帰式を用いて) 求めることは不等式の証明と同等である. このアプローチのヒントは[21]による. 詳論は[36]に譲るとして, 以下, 基本定理と系と応用例をあげよう.

定理 5 (i) $U:R^1{}_+\to R^1{}_+$ を連続狭義増加関数とする. このとき, 主問題Iが最大値関数 $U$ をもつための必要十分条件は,

(a) $f(x_1,x_2,\cdots,x_N)\leqq U(g(x_1,x_2,\cdots,x_N))$
$(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in R^N{}_+$

(b) 任意の $c\geqq 0$ に対して $(x_1{}^*(c),x_2{}^*(c),\cdots,x_N{}^*(c))\in R^N{}_+$ が存在して $g(x_1{}^*(c),x_2{}^*(c),\cdots,x_N{}^*(c))=c,\ f(x_1{}^*(c),x_2{}^*(c),\cdots,x_N{}^*(c))=U(c)$ となる.

(ii) $V:R^1{}_+\to R^1{}_+$ を連続狭義増加関数とするとき, 逆問題Iが最小値関数 $V$ をもつための必要十分条件は,

(a)′ $g(y_1,y_2,\cdots,y_N)\geqq V(f(y_1,y_2,\cdots,y_N))$
$(y_1,y_2,\cdots,y_N)\in R^N{}_+$

(b)′ 任意の $c\geqq 0$ に対して $(\hat{y}_1(c),\hat{y}_2(c),\cdots,\hat{y}_N(c))\in R^N{}_+$ が存在して $f(\hat{y}_1(c),\hat{y}_2(c),\cdots,\hat{y}_N(c))=c$, $g(\hat{y}_1(c),\hat{y}_2(c),\cdots,\hat{y}_N(c))=V(c)$ となる.

系 (i) 主問題Iが連続狭義増加な最大値関数 $U:R^1{}_+\to R^1{}_+$ をもつならば, つぎの不等式が成立する:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_N)\leqq U(g(x_1,x_2,\cdots,x_N))$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in R^N{}_+$$

等号はある $c\geqq 0$ に対して $x_n=x_n{}^*(c)$ $1\leqq n\leqq N$ のときにかぎり成立する. ただし $(x_1{}^*,x_2{}^*,\cdots,x_N{}^*):R^1{}_+\to R^N{}_+$ は最大点関数. とくに, 各 $x_n{}^*$ が連続狭義増加ならば, 等号条件は $(x_1{}^*)^{-1}(x_1)=(x_2{}^*)^{-1}(x_2)=\cdots=(x_N{}^*)^{-1}(x_N)$.

(ii) 逆問題Iが連続狭義増加な最大値関数 $V:R^1{}_+\to R^1{}_+$ をもつならば, つぎの不等式が成立する:

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_N)\geqq V(f(y_1,y_2,\cdots,y_N))$$
$$(y_1,y_2,\cdots,y_N)\in R^N{}_+.$$

等号はある $c\geqq 0$ に対して $y_n=\hat{y}_n(c)$ $1\leqq n\leqq N$ のときにかぎり成り立つ. ただし $(\hat{y}_1,\hat{y}_2,\cdots,\hat{y}_N):R^1{}_+\to R^N{}_+$ は最小点関数. とくに, 各 $\hat{y}_n$ が連続狭義増加ならば, 等号条件は $(\hat{y}_1)^{-1}(y_1)=(\hat{y}_2)^{-1}(y_2)=\cdots=(\hat{y}_N)^{-1}(y_N)$.

定理 5 と系は任意の関数 $f$, $g:R^N{}_+\to R^1{}_+$ に対して成立するが, とくに $f$, $g$ が $R^N{}_+$ 上で狭義増加性をもつ再帰型関数ならば, 再帰式によって最大・最小値関数を求める“方法”がある. このような意味で, 動的計画論と不等式論とは密接な関係があるといえる. 上記の定理 5, 系における $U$, $V$ は互いに逆関数であることに注目すれば, (i) および (ii) で得られた不等式は同値である.

例題11 例題 8 を再び考察する. この主問題の最大値関数は $U(c)=u^N(c)=c^N/N^N$, 最大点関数は $(x_1{}^*(c),x_2{}^*(c),\cdots,x_N{}^*(c))=(c/N,c/N,\cdots,c/N)$ だから, 系(i)より,

$$\prod_1^N x_n\leqq\Big(\sum_1^N x_n\Big)^N\Big/N^N\quad (x_1,x_2,\cdots,x_N)\in R^N{}_+$$

すなわち, 算術幾何不等式

$$\sqrt[N]{x_1x_2\cdots x_N}\leqq(x_1+x_2+\cdots+x_N)/N$$
$$x_n\geqq 0\quad 1\leqq n\leqq N$$

を得る. ただし等号は $x_1=x_2=\cdots=x_N$ のときに成り立つ. 系(ii)に訴えても, これと同等な不等式

$$\sum_1^N y_n\geqq N\times\sqrt[N]{\prod_1^N y_n}\quad (y_1,y_2,\cdots,y_N)\in R^N{}_+$$

を得る. 逆に, 算術幾何不等式を用いれば, 例題 8 の主問題は, 不等式

$$\prod_1^N x_n\leqq\Big(\sum_1^N x_n\Big)^N/N^N\leqq c^N/N^N$$

における等号と制約条件 (i) (ii) をすべて満たす $x_1,x_2,\cdots,x_N$ は $x_1=x_2=\cdots=x_N=c/N$ にかぎるから, 最大値

関数 $U(c)=c^N/N^N$ をもつことがわかる．つぎに，例題 8′についても，同様にすると，不等式(等号条件)

$$\sum_1^N x_n \leqq N\times r^{-1}(\max_{1\leqq n\leqq N} r(x_n)) \text{ on } R^N{}_+,$$
$$(r(x_1)=r(x_2)=\cdots=r(x_N))$$

が得られる．例題 9，9′ についてはそれぞれ，

$$\prod_1^N x_n \leqq \left(r^{-1}\left(\sum_1^N r(x_n)/N\right)\right)^N \text{ on } R^N{}_+,$$
$$(r(x_1)=r(x_2)=\cdots=r(x_N)),$$
$$x_1+\min(x_2, x_3+x_4)\leqq\frac{5}{3}\max(x_1, x_2+\max(x_3, x_4)) \text{ on } R^4{}_+ \ (x_1/3=x_2/2=x_3=x_4)$$

が成立する．

このように $f$，$g$ を適当に選んで主問題 I（または逆問題 I）を構成し，その最大（または最小）値関数 $U$（または $V$）を求めると，定数 $a_n>0$ $1\leqq n\leqq N$ に対して，

Minkowski：$$\sum_1^N(a_n+x_n)^p \underset{(>)}{\leqq} \{(\sum_1^N a_n{}^p)^{1/p}+(\sum_1^N x_n{}^p)^{1/p}\}^p \text{ on } R^N{}_+ \quad \begin{matrix} p>1 \\ (0<p<1)\end{matrix}$$

Hölder：$$\sum_1^N a_n x_n \underset{(>)}{\leqq} (\sum_1^N a_n{}^q)^{1/q}\cdot(\sum_1^N x_n{}^p)^{1/p} \text{ on } R^N{}_+ \quad \begin{matrix} p>1 \\ (0<p<1)\end{matrix}$$

Jensen：$$f(\sum_1^N a_n x_n/\sum_1^N a_n)\leqq\sum_1^N a_n f(x_n)/\sum_1^N a_n \text{ on } R^N{}_+ \ (f: R^1{}_+\to R^1{}_+, \text{凸})$$

Milne & Crystale：$$\sum_1^N\{a_n x_n/(a_n+x_n)\} \leqq (\sum_1^N a_n)(\sum_1^N x_n)/\sum_1^N(a_n+x_n) \text{ on } R^N{}_+$$

などの不等式と対応する等号条件(省略)を得ることができる．これは動的計画にもとづく証明であるといえる．詳細は [13, 36] を参照されたい．

## §6. 再帰的計画への展望

§1 に視点をもどそう．逐次決定過程はそれ自身再帰性を含んでいた．その上に単調非減少性を仮定したものを動的計画と定義した．これに対して“単調非増加性”をもつ場合がある[20]．一般に，各 $n$ $(1\leqq n\leqq N)$ に対して $g_n(s_n, a_n;\cdot)$ $((s_n, a_n)\in \mathrm{graph}(A_n))$ が常に単調非増加か常に単調非減少のいずれか一方であるような“一般単調性”をもつ逐次決定過程が考えられる．これを“一般単調性をもつ再帰的計画”あるいは簡単に“再帰的計画”という[32]．したがって，つぎの包含関係がある：

{逐次決定過程}⊃{再帰的計画}⊃{動的計画}.

§2～5 では，動的計画に対する最適性の原理，数理計画，逆定理，不等式等を論じた．再帰的計画に対しても，最適性の原理と数理計画への応用[25, 31, 32]，逆定理[29]，不等式への応用[28]が報告されている．

一例として，単調非増加性の仮定――各 $g_n(s_n, a_n;\cdot)$ $((s_n, a_n)\in\mathrm{graph}(A_n)$ $1\leqq n\leqq N)$ が・に関して単調非増加である――を満たす再帰的計画 $\boldsymbol{R}=(\mathrm{Max}, \{S_n\}_{1\leqq n\leqq N+1}, \{A_n\}_{1\leqq n\leqq N}, \{g_n\}_{1\leqq n\leqq N}, k, \{T_n\}_{1\leqq n\leqq N})$ がある．このとき，$\boldsymbol{R}$ に対する $(N-n+1)$ 部分再帰的計画 $\boldsymbol{R}_{N-n+1}$ を $n=1, 3, 5, \cdots(\leqq N+1)$ のとき，$\boldsymbol{R}_{N-n+1}=(\mathrm{Max}, \{S_m\}_{n\leqq m\leqq N+1}, \{A_m\}_{n\leqq m\leqq N}, \{g_m\}_{n\leqq m\leqq N}, k, \{T_m\}_{n\leqq m\leqq N})$，$n=2, 4, 6, \cdots(\leqq N+1)$ のとき，$\boldsymbol{R}_{N-n+1}=(\mathrm{Min}, \{S_m\}_{n\leqq m\leqq N+1}, \{A_m\}_{n\leqq m\leqq N}, \{g_m\}_{n\leqq m\leqq N}, k, \{T_m\}_{n\leqq m\leqq N})$ でそれぞれ定義する．$u^{N-n+1}: S_n\to R^1$ を $\boldsymbol{R}_{N-n+1}$ が表現する最適化問題の最適($n$=奇数のとき最大，偶数のとき最小)値関数とすれば，つぎの再帰式が成立する：

定理 6（最適性の第 2 原理）　$u^0(s_{N+1})=k(s_{N+1})$

$$u^{N-n+1}(s_n)=\max_{a_n\in A_n(s_n)} g_n(s_n, a_n; u^{N-n}(T_n(s_n, a_n)))$$
$$n=1, 3, 5, \cdots(\leqq N),\quad s_n\in S_n$$
$$u^{N-n+1}(s_n)=\min_{a_n\in A_n(s_n)} g_n(s_n, a_n; u^{N-n}(T_n(s_n, a_n)))$$
$$n=2, 4, 6, \cdots(\leqq N),\quad s_n\in S_n.$$

一般に，最適子と単調性（非増加性，非減少性）に関係して部分計画が定義され，対応する再帰式すなわち最適性の一般原理が成立する[31, 32]．

この再帰的計画 $\boldsymbol{R}$ の応用としては，たとえば，狭義減少性をもつ再帰型関数[29]を目的関数にもつつぎの例題は $\boldsymbol{R}$ で表現され，定理 6 に対応する再帰式を解くことによって解が求められる（詳細は[25, 31]参照）．

例題12　$$\mathrm{Max}\ \cfrac{x}{1+x+\cfrac{y}{2+y+2(3+z)}}$$

s.t. (i) $x+y+z\leqq c(\geqq 0)$
(ii) $x, y, z\geqq 0$

例題13　$$\mathrm{Min}\ \frac{y_1y_3}{y_2y_4y_5}$$

s.t. (i) $$\frac{1}{y_1}+\cfrac{2}{\cfrac{1}{y_2}+\cfrac{2}{\cfrac{1}{y_3}+\cfrac{2}{\cfrac{1}{y_4}+\cfrac{1}{y_5}}}}\leqq d\left(\in\left[\frac{47}{38}, \frac{47}{19}\right]\right)$$

(ii) $1\leqq y_n\leqq 2$ $1\leqq n\leqq 5$.

このように“連分数計画問題”というべきものは再帰的計画によって解くことができる．また再帰的計画における数理計画問題としては主問題・逆問題ともに最小値（または最大値）問題になることもある．具体例としては，

例題14　主問題　$\mathrm{Min}\ \sum_1^N \frac{1}{x_n}$

s.t. (i) $\sum_1^N x_n\leqq c(>0)$　(ii) $x_n>0$ $1\leqq n\leqq N$

逆問題　$\mathrm{Min}\ \sum_1^N y_n$

s.t. (i)′ $\sum_1^N \frac{1}{y_n}\leqq c(\geqq 0)$　(ii)′ $y_n>0$ $1\leqq n\leqq N$

がある．一般に，これらを含む問題に対する逆定理，さらには，それらを解くことによって得られる不等式（例題14の場合は，算術調和不等式）などの議論がある．

## §7. 確率的な場合の諸結果と今後の課題

これまで確定的な推移法則すなわち状態“変換”をもつ有限段問題に限定して，再帰性と単調性に起因することがらを中心に述べてきた．確率的な推移法則をもつ問題についてはマルコフ型決定過程として多くの研究がなされている．ここでは再帰性に関する結果を紹介しておこう．

Furukawa & Iwamoto［5－9］はマルコフ型決定過程を再帰性と単調非減少性の下で研究している．そこでは目的関数の分類もなされている．なお，確率的な場合の目的関数は確定的な場合よりもいくぶん制限されている．Iwamotoは再帰加法性のもとでLP化［11］と政策改良アルゴリズム［10］を論じている．二人ゲームへの展開は Iwamoto & Kai［17, 18］に見られる．Iwamoto［14］は有限段マルコフゲームが再帰性と単調非減少性の下で決着することを示している．

今後の課題としては，離散無限段あるいは連続時間における再帰的計画論，逆定理，不等式論等が考えられる．これらに対しては，収束性との関係から，その結果は幾分限定されるかもしれない．また古典的変分問題とも関連するであろう．他方，逆動的計画は動的計画としての逆元であることに着目すれば，その他の代数的・オートマトン論的な演算の導入によって，動的計画論のいっそうの展開が期待できるであろう．

最後に，日ごろご指導いただいている九州大学古川長太教授に深く感謝いたします．

### 参考文献（つづき）

［21］ Beckenbach, E.F. and Bellman, R., *Inequalities*, 3rd revised printing, Springer, New York, 1971.

［22］ Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G., *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.

［23］ Heilman, W. R., *Lineare Programierung stochastischer dynamischer Entscheidungsmodelle*, Dissertation, Universität Hamburg, 1977.

［24］ 岩本誠一, Inverse Theorems in Dynamic Programming（I）Theory, 日本OR学会アブストラクト集, 1975年秋季, p. 1, 2.

［25］ ――――――, “*Applications of Recursive Programming with Monotonicity*,” unpublished preprint (1976), pp. 108.

［26］ ――――――, Inverse Theorems in Dynamic Programming(Ⅲ)…Main DP and Inverse DP, 日本OR学会アブストラクト集, 1976年春季, p. 73, 74.

［27］ Iwamoto, S., Inverse dynamic programming, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math.*, **30** (1976), 25-42,（主動的計画と逆動的計画，研究集会「逐次決定理論とその周辺」，1975年12月，九州大学理学部）

［28］ ――――――, *Recursive programming approach to inequalities*, preprint (1976).

［29］ ――――――, A class of inverse theorems on recursive programming with monotonicity, *J. Operations Res. Soc. Japan*, **20** (1977), 94-112.

［30］ ――――――, Inverse dynamic programming II, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math.*, **31** (1977), 25-44.

［31］ ――――――, The second principle of optimality, *Bull. Math. Statist.*, **17** (1977), 101-114(単調減少性をもつ逐次決定過程における最適性の原理について，研究集会「統計的推測システムの構成と評価の問題」，1976年12月，大分大学工学部)

［32］ 岩本誠一, 再帰的計画とその応用, 日本数学会統計数学分科会予稿集(特別講演), 1977年春季, pp. 69-74.

［33］ Iwamoto, S., An Inverse Theorem Between Main and Inverse Dynamic Programmings, Inernational Conference on Dynamic Programming, Univ. of British Columbia, Canada, April, 1977.

［34］ ――――――, Inverse theorem in dynamic programming I, *J. Math. Anal. Appl.*, **58** (1977), 113-134.

［35］ ――――――, Inverse theorem in dynamic programming Ⅲ, *J. Math. Anal. Appl.*, **58** (1977), in press.

［36］ ――――――, Dynamic programming approach to inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **59** (1977), in press.

［37］ White, D. J., Dynamic programming and duality in linear programming, *J. Math. Anal. Appl.*, **51** (1975), 695-704.

［38］ Yamada, K., Duality theorem in Markov decision problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **50** (1975), 579-595.

（いわもと・せいいち，九州大学理学部数学教室）