

組合せ理論の応用 (2)

中 村 義 作

2. 浮遊容量の分散均等化と円陣配列

2.1 選択回路としての多重変成器

変成器の概念は、電気・通信関係の技術者にとっては周知のものであるが、親しみの薄い読者のために、簡単な説明をしておく。図 2.1 (a) のように、円柱状の磁心のうえに 2 本の銅線を巻き、一方の巻線に瞬間的に電流を流す。すると、これによって生じる磁界を打ち消す方向に、他方の巻線上に電圧が誘起される。これが変成器の基本原理で、電流を駆動する側を 1 次巻線、それによって電圧が誘起される側を 2 次巻線という。また、1 次

巻線上の瞬間的な電流を駆動パルス、2 次巻線に誘起される電圧を 2 次電圧という。なお、図 2.1 (a) の変成器を、簡単に図 2.1 (b) のようにあらわす。

多重変成器では、磁心に巻く 2 次巻線の個数を複数とする。図 2.2 (a) は 2 重変成器の例で、1 次巻線側の駆動パルスによって、それぞれの 2 次巻線に 2 次電圧が誘起される。図 2.2 (a) の 2 重変成器を、同図 (b) のようにあらわす。一般の n 重変成器についても、同様のあらわし方を用いる。

多重変成器をいくつか組合せると、選択回路が構成される。これを簡単な例で説明しよう。図 2.3 は、4 個の 4 重変成器と 4 個の 1 重変成器を組合せたもので、ふつうは「 4×4 形の多重変成器」とよばれている。もちろん、同じ行のすべての巻線がその行の磁心に共通に巻かれているわけで、 E_1, E_2, E_3, E_4 を入力端子とする上の 4 個が 4 重変成器、 $E_{10}, E_{20}, E_{30}, E_{40}$ を入力端子とする下の 4 個が 1 重変成器である。

この 4×4 形の多重変成器が選択回路の役割を果たす理由は、つぎのように説明される。いま、1 次巻線側の駆動パルスによって、すべての 2 次巻線に 1 V (ボルト) の電圧が誘起されるものとする。そこで、2 つの入力端子、たとえば E_1 と E_{20} 、だけを同時に駆動すれば、 E_1 によって $L_{11}, L_{21}, L_{31}, L_{41}$ の 4 個の 2 次巻線にそれぞれ 1 V の電圧が誘起され、また E_{20} によって L_{20} の 2 次巻線に 1 V の電圧が誘起される。 L_{21} と L_{20} は中間端子 K_2 によって直列に接続されているため、 F_{21} の出力端子には 2 V の電圧が誘起される。しかし、その他の出力端子には、ただだか 1 V の 2 次電圧しか誘起されず、2 対 1 の選択比で出力端子 F_{21} が選ばれる。そして、一般に入力端子 E_j と E_{i0} だけを同時に駆動すれば、出力端子 F_{ij} が選択される。

なお、 $n \times n$ 形の多重変成器を静電記録に用いると、通信情報や電子計算機出力から、高速で画質のよいハード・コピーが得られる〔7〕。

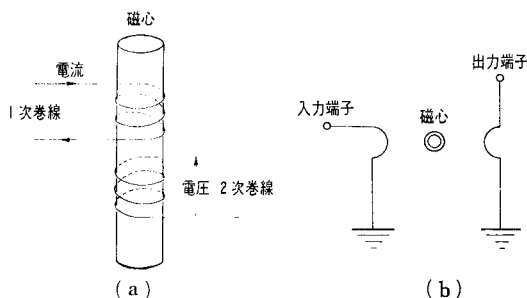


図 2.1

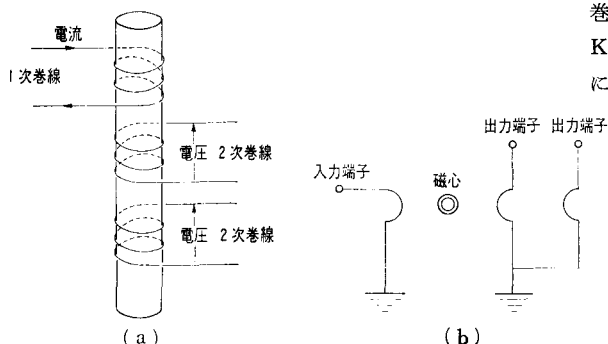


図 2.2

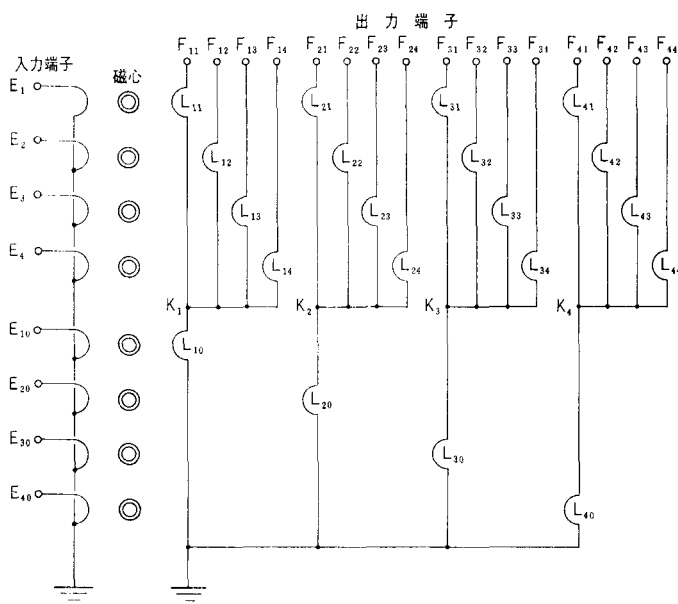


図 2.3

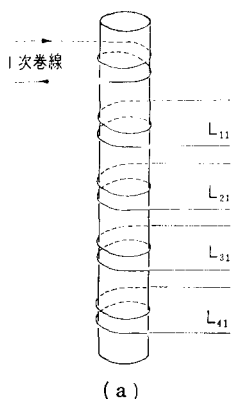
2.2 2次巻線間の浮遊容量

ところで、多重変成器には「2次巻線間の浮遊容量」というめんどうな問題がある。図2.4(a)には、1個の4重変成器を示したが、同じ磁心に巻かれている4個の2次巻線の相互位置は均等でない。ここでは、 L_{11} の隣りに L_{21} 、その隣りに L_{31} 、最後に L_{41} が並べられている。すると、隣り合う巻線間に若干の結合を生じ、

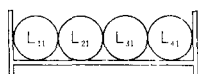
L_{11} と L_{21} 、 L_{21} と L_{31} 、 L_{31} と L_{41}

のそれぞれの間にだけ、浮遊容量が発生する。この浮遊容量は2次電圧を漏洩させる性質をもち、たとえば L_{21} に2次電圧が誘起されたときは、その一部を L_{11} と L_{31} に漏洩させる。これは選択比の低下につながるもので、なるべく軽減したいが、皆無とすることはできない。

いま、2次巻線間の隣接状態を明示するため、極端な表現を用いて図2.4(a)を図2.4(b)のようにかく、すると、図2.3の4個の4重変成器では、2次巻線の相互位置が図2.5のように



(a)



(b)

図 2.4

なっているかもしれない。これで、はたして問題ないのであろうか。浮遊容量の存在する2次巻線間を、中間端子 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 間で集計すると、

K_1 と K_2 、 K_2 と K_3 、 K_3 と K_4 の間で4C

K_1 と K_3 、 K_1 と K_4 、 K_2 と K_4 の間で0

となり、中間端子の組合せによっていちじるしい不均衡が生じている。ここに隣接する2次巻線間の浮遊容量は、一定値のCで近似されるものとした。

しかし、2次巻線の相互位置を図2.6のように変更すると、今度はどの2次巻線間にも2Cの浮遊容量が発生し、特定の2次巻線間への浮遊容量の集中は避けられる。もちろん、このように浮遊容量の分散均等化が図られれば、どの出力端子についても同じ選択比が得られ、選択回路としては好ましいものとなる。

2.3 組合せ問題としての定式化とその解法

以上で、浮遊容量の分散均等化に対する問題は理解されたと思うので、いよいよ本題の組合せ理論の応用へと進む。

まず、図2.6の隣接状態を、

1番目の磁心： $L_{11} - L_{41} - L_{21} - L_{31}$

2番目の磁心： $L_{22} - L_{12} - L_{32} - L_{42}$

3番目の磁心： $L_{33} - L_{23} - L_{43} - L_{13}$

4番目の磁心： $L_{44} - L_{34} - L_{14} - L_{24}$

とあらわしてみる。すると、同じ磁心に巻かれた2次巻線の隣接関係は L_{ij} の添字 i で示されており、添字 j はどの磁心に巻かれているかを示しているだけである。そこで、添字の i だけを抜き出して、2次巻線間の隣接関係を明確にすると、

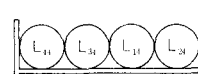
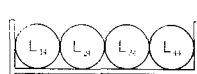
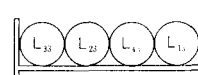
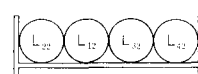
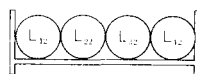
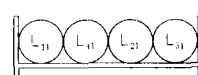
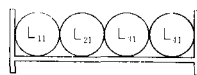


図 2.5

図 2.6

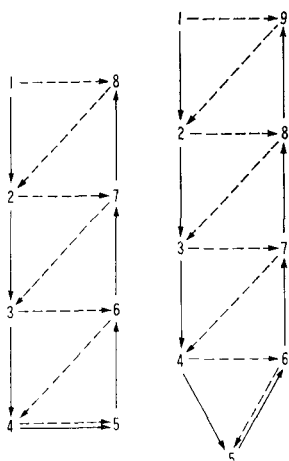


図 2.7

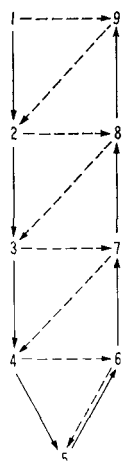


図 2.8

1—4—2—3
2—1—3—4
3—2—4—1
4—3—1—2

となる。これを見ると、1から4までのどの2数も2回ずつ隣接し、完全にバランスのとれていることがわかる。いまや問題の定式化の方法は明らかである。

n を任意の正整数とし、1から n までの n 個の数を横に一列に n 回並べる。このとき、

どの2数も2回ずつ隣り合うように、各回の並べ方をうまく考えよ。

これは、 n 人の子供が n 人用の長椅子に n 回腰かけ、どの2人の子供も2回ずつ隣り合うようにする（パズル的な）問題と同じである。そして、これにはきわめて明解な解法がある[8]。まず、具体的な方法を示そう。

n が偶数と奇数の場合で、若干の相異がある。まず、偶数の解法を示すため、例として n を8にする。図2.7の実線矢印のように、1から4まで下がったのち、横に5へ進み、さらに5から8まで上がる。つぎに、のこぎり状の点線矢印にそって進み、これを1回目の並べ方とする。具体的には、

1—8—2—7—3—6—4—5

である。2回目以降の並べ方を得るには、1から8までの各数を、

1→2→3→4→5→6→7→8→(1に戻る)

と巡回的に増やせばよい。これにもとづく8回の並べ方は、

1—8—2—7—3—6—4—5
2—1—3—8—4—7—5—6
3—2—4—1—5—8—6—7
4—3—5—2—6—1—7—8
5—4—6—3—7—2—8—1
6—5—7—4—8—3—1—2
7—6—8—5—1—4—2—3
8—7—1—6—2—5—3—4

となって、どの2数も2回ずつ隣接している。

つぎに、奇数の解法の例として、 n を9とする。まえと同じように、図2.8の実線矢印にそって1から4まで下がり、中央最下部の5を経て、6から9まで上がる。つぎに、のこぎり状の点線矢印にそって進み、これを1

回目の並べ方とする。2回目以降は、1から9までの各数を、

1→2→3→4→5→6→7→8→9→(1に戻る)

と巡回的に増やせば、

1—9—2—8—3—7—4—6—5
2—1—3—9—4—8—5—7—6
3—2—4—1—5—9—6—8—7
4—3—5—2—6—1—7—9—8
5—4—6—3—7—2—8—1—9
6—5—7—4—8—3—9—2—1
7—6—8—5—9—4—1—3—2
8—7—9—6—1—5—2—4—3
9—8—1—7—2—6—3—5—4

を得る。

これによって、望みの並べ方の得られることの証明は、それほど困難でない。しかし、すぐのちに述べる円陣配列の問題としてとらえたほうが、対称性もあり、また応用分野も広い。

2.4 円陣配列

「 $2k+1$ 人が1つの大きな円卓のまわりにすわる。全部で k 回の並び換えをして、どの人も、他のすべての人と1回ずつ隣り合うようにしたい。どのような並べ方をすればよいか。」これが、標準的な円陣配列の問題である。

1回の配置で、どの人も2人と隣り合うから、自分以外の $2k$ 人と隣り合うには、ちょうど k 回の並び換えが必要である。よって、この k 回の並び換えで、どの人も他の $2k$ 人とちょうど1回ずつ隣り合うようにできればよい。 $2k+1$ 人を、

0, 1, 2, ..., $2k$

であらわし、1回目の配置を図2.9の実線矢印のようにきめる。2回目以降の配置は、0以外の各数を、

1→2→3→...→ $2k$ →(1に戻る)

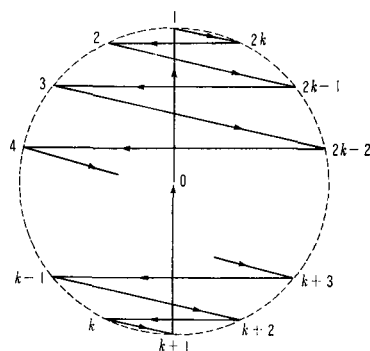


図 2.9

と巡回的に増やし、全部で k 回の配置をつくればよい。
このつくり方を図2.9で説明すると、円外の各数はそのままにして、円内の図形だけを反時計方向に $1/2k$ ずつ回転したことになる。

この操作で、望みの配置が得られることを見るには、図2.9の1を出発点とする $2k-1$ 本の弦が、 $1/2k$ 周の弧を単位としたとき、

1, 2, ..., $k-1$, k , $k-1$, ..., 2, 1
の弧を結ぶ弦であることに注意すればよい。これによって、1回に $1/2k$ ずつ進む半回転までで、どの点からもすべての長さの弦が左右に1回ずつあらわれる。すなわち、望みの配置が得られている。

浮遊容量の分散均等化に関連して生じた長椅子の問題では、両端の2人は片方だけで隣り合う。そこで、うえの円陣配列の解から1人（たとえば、0に対応する人）を除き、そこを切り開いて長椅子の配置とする。明らかに、 $2k$ 人の中のどの人も他のすべての人と1回ずつ隣り合うので、この k 回の配置を2回ずつくり返して $2k$ 回の配置とすれば、望みの結果となる。まへの8人に対する並べ方は、こうして得られたものである。

つぎに、偶数人の円陣配列に移る。「 $2k$ 人が1つの大きな円卓のまわりにすわる。全部で $2k-1$ 回の並び換えをして、どの人も、他のすべての人と2回ずつ隣り合うようにせよ。」

1回の配置で、どの人も2人と隣り合うから、自分を除く $2k-1$ 人と1回ずつ隣り合うのは不可能である。そこで、2回ずつ隣り合うようにしたのである。 $2k$ 人を、

0, 1, 2, ..., $2k-1$

であらわし、1回目の配置を図2.10の実線矢印のようにきめる。2回目以降の配置は、0以外の各数を、

1 → 2 → 3 → ... → $2k-1$ → (1に戻る)

と巡回的に増やし、全部で $2k-1$ 回の配置をつくればよい。これによって望みの配置が得られることは、奇数人の円陣配列に対する説明と図2.10を見れば明らかである

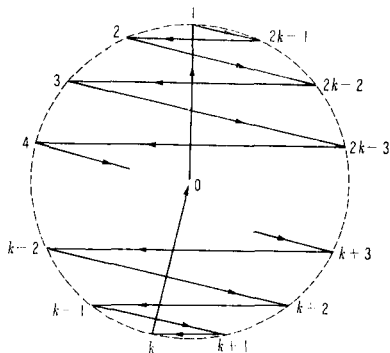


図 2.10

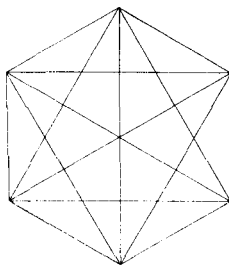


図 2.11

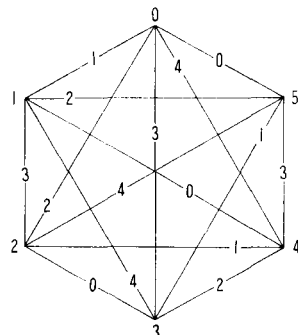


図 2.12

う。また、長椅子の問題にするときは、この円陣配列の解から1人（たとえば、0に対応する人）を除き、切り開いて長椅子の配置とすればよい。まへの9人に対する並べ方は、こうしてつくられたものである。

2.5 デュードニーの円卓問題と完全グラフの色わけ

2.4の円陣配列では、円陣をつくるどの2人も1回（または2回）ずつ公平に隣り合う並べ方を求めた。しかし、公平に隣り合うという観点からは、他にもいろいろの円陣配列の条件が考えられる。事実、各種の条件における円陣配列の問題が考察されているが[9]、ここではとくに難問とされているデュードニー（H. E. Dudeney）の円卓問題について、1, 2の解法を紹介する。

「 n 人が1つの大きな円卓のまわりにすわる。全部で
$$N = (n-1)(n-2)/2 \quad (回)$$

の並び換えをして、どの人も、あらゆる組合せの2人を1回だけ両隣りにもつようにせよ。」

これがデュードニーの円卓問題で、まへの円陣配列が自分と他の1人ずつとの隣接だけを問題としたのに対し今度は両隣りの組合せを問題にしている。自分を除く $n-1$ 人から、2人を選ぶ仕方の数は上式の N 通りであるから、並び換えの回数に矛盾はない。しかし任意の n に対する具体的な配置を求めるのは、かなり困難である。デュードニーの宣言[10]によると、3以上のすべての n に対して解は存在するとあるが、未解決部分がかなり残されている[9]。以下では、 p を素数として、 $n=p+1$, $n=2p$ の解法を示すが、その準備として完全グラフへの結びつきを示す。

完全グラフは周知と思うが、念のため説明する。 n 個の点を取り、どの2点間も枝で結んだグラフを完全グラフという。その表現はどのようにしてもいいが、たとえば正 n 角形の頂点を n 個の点とし、すべての辺と対角線を枝と解釈すれば簡明である。図2.11は、6頂点に対する

る完全グラフである。

n 頂点の完全グラフにおいて、すべての枝を $n-1$ 色で色わけし、どの頂点から出ている $n-1$ 本の枝も、すべて異なる色にできたとする。このとき、完全グラフの枝は $n-1$ 色で色わけされたという。図2.12は、6 頂点の完全グラフに対する 1 つの色わけを示している。任意の n 頂点の完全グラフの枝を、 $n-1$ 色で色わけすることはそれほど困難でない。しかし、色わけにいろいろの条件をつけるとうむずかしくなる。

n が偶数のときのデュードニーの円卓問題の解は、ある種の条件を満足する完全グラフの枝の色わけができれば、つねに存在する。これを、図2.12の例で示そう。いま、頂点0を出発点とし、枝の色が1と2のものを交互にたどっていく。すると、経由する頂点は、

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow (0 \text{ に戻る})$$

となり、すべての頂点を1回ずつ経由したのち、出発点に戻る。このように、グラフ内のすべての点を1回ずつ通って出発点に戻る閉路を、ハミルトン閉路という。ところで、図2.12の枝の色わけでは、どの2色を選んでも、それらの枝を交互にたどるとハミルトン閉路となる。すると、これらのハミルトン閉路にもとづく頂点の並び方が、デュードニーの円卓問題の解となっているのである。

図2.12について、10個のハミルトン閉路を示すと、

0と1の色：0—5—3—2—4—1— (0に戻る)

0と2の色：0—5—1—4—3—2— (")

0と3の色：0—5—4—1—2—3— (")

0と4の色：0—5—2—3—1—4— (")

1と2の色：0—1—5—3—4—2— (")

1と3の色：0—1—2—4—5—3— (")

1と4の色：0—1—3—5—2—4— (")

2と3の色：0—2—1—5—4—3— (")

2と4の色：0—2—5—1—3—4— (")

3と4の色：0—3—1—2—5—4— (")

となる。

これが望みの解となっていることは、具体的な検証でもわかるが、つぎの説明で完全である。

たとえば、1つの頂点0に着目し、これを通るハミルトン閉路を考える。交互にたどる2色の枝の組合せを変えれば、明らかに頂点0の両隣りの組合せも変わる。そして、すべての2色の組合せがハミルトン閉路の作成に利用されているから、頂点0の両隣りには、あらゆる組合せの2数が1回ずつあらわれる。このことは、頂点0だけでなく、すべての頂点に対して同じように成り立つので、望みの結果となる。

2.6 完全グラフの枝の色わけ法

n を偶数とするとき、どの2色の枝もハミルトン閉路をつくるように、 n 頂点の完全グラフの枝が色わけできれば、その n に対するデュードニーの円卓問題の解はみちびかれることがわかった。しかし、具体的な色わけ法については、まだ何も述べていない。実は、任意の偶数 n に対する色わけが可能かどうかは解明されておらず、方法の知られているのは2つの場合だけである。それは、 p を素数としたとき、 $n=p+1$ ($p=2$ を除く) の場合と $n=2p$ の場合である。以下に、その方法を示す。

$n=p+1$ のときは、 n 個の頂点を、

$$0, 1, 2, \dots, p$$

とし、また枝につける p 個の色を、

$$0, 1, 2, \dots, p-1$$

とする (このようにしても、頂点と枝の色を混同する恐れはない)。2 頂点 i, j を結ぶ枝の色を $A(i, j)$ とすれば、この場合の色わけは、

$$A(i, j) \equiv i + j \pmod{p}, \quad i \neq p, \quad j \neq p \text{ のとき}$$

$$A(i, p) \equiv 2i \pmod{p}$$

で与えられる。図2.12は、これによる色わけの結果である。

うえの色わけで、どの頂点から出る p 本の枝も、すべて異なる色となる。よって、どの2色の枝をたどっても、ハミルトン閉路が得られることを示せば十分である。以下の計算をすべて $\text{mod } p$ で見ることにすれば、任意の2色は $2s$ と $2t$ であらされる。そこで、頂点 p を出発点として、この2色の枝を交互にたどってみる。

第1の枝で： $p \rightarrow s$

第2の枝で： $s \rightarrow 2t-s$

第3の枝で： $2t-s \rightarrow 3s-2t$

第4の枝で： $3s-2t \rightarrow 4t-3s$

$\vdots$

第 $2m-1$ の枝で： $(2m-2)t - (2m-3)s \rightarrow (2m-1)s - (2m-2)t$

第 $2m$ の枝で： $(2m-1)s - (2m-2)t \rightarrow 2mt - (2m-1)s$

となる。この経過で途中に行き止まりの点がないから、最後は偶数番目の枝でかならず出発点に帰る。よって、奇数番目の枝で、出発点の直前の点 t を通るはずであり、これを求めると、

$$(2m-1)s - (2m-2)t \equiv t \pmod{p}$$

$$\therefore (2m-1)(s-t) \equiv 0 \pmod{p}$$

を得る。ところが、 $s \neq t$ であり、また p は素数であるから、うえの関係が成り立つのは、

$$2m-1=p$$

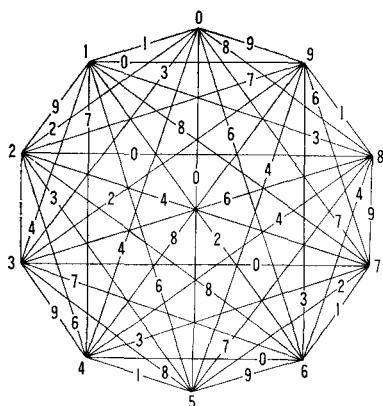


図 2.13

のときである。すなわち、 p 番目の枝で直前の点 t を通り、 $p+1$ 番目の枝で出発点 p に帰る。これは、ハミルトン閉路であることを示している。

$n=2p$ のときは、 n 個の頂点を、

$0, 1, 2, \dots, 2p-1$

とし、枝につける $2p-1$ 個の色を、

$0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$

とする。ここに、 p の色はないことに注意する。2 頂点 i, j を結ぶ枝の色 $A(i, j)$ は、

$A(i, j) \equiv i+j \pmod{2p}$, $|i-j|$ が偶数のとき

$A(i, j) \equiv 2i \equiv 2j \pmod{2p}$, $|i-j| = p$ のとき

$A(2i, 2j+1) \equiv 2j+1-2i \pmod{p}$, 上記以外のとき
与えられる。これで、すべての枝が色わけされている

ことは、調べてみればすぐわかる。図 2.13 は、 $n=10$ に対する色わけの結果である。

この色わけで、どの 2 色の枝もハミルトン閉路になることは、まえと類似の方法で証明できる。しかし、場合わけによる考察が必要で、完全な証明には若干の紙数を要する。このため、厳密な証明は文献[11]にゆずって、この節を終わる。

付記：デュードニーの円卓問題の応用としては、さきの浮遊容量の分散均等化に関連したものがあるが、他分野での応用は知られていない。お気づきの応用分野があれば、お知らせいただきたい。

参考文献

- [7] 小林, 野田, 近藤, “多重変成器の浮遊容量分散,” 電子通信学会全国大会, 1974.
- [8] 中村, 細田, “多重変成器への組み合わせ数学の応用,” 信州大学工学部紀要, 41 (1977), 77—81.
- [9] 中村義作, “いろいろの円卓問題,” 数理科学, 別冊パズル (1976), 65—69.
- [10] Dudeney, H. E., *Amusements in Mathematics*, Dover Pub., New York, 1970.
- [11] 中村義作, “デュードニーの円卓問題と完全グラフの色分け,” 数学セミナー, 159 (1975), 24—29. (なかむら・ぎさく 信州大学工学部情報工学科)

昭和52年度論文誌担当委員

論文誌担当の今年度委員はつぎのとおりです。論文誌へのご投稿は所定の投稿規定や執筆規定をご参照のうえ、事務局宛お送りください。

〔論文誌〈日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌(和名)・Journal of the Operations Research Society of Japan (英名)〉編集担当〕

editor 竹内 啓 (東京大学 経済学部)

” 森村英典 (東京工業大学 理学部)

associate editor

(企画担当) 江藤 肇 (筑波大学 社会工学系)

(製作担当) 高森 寛 (青山学院大学 経済学部)

(進行担当) 森 雅夫 (茨城大学工学部情報工学科)

advisory board

青木兼一 (広島大学工学部 経営工学科)

五十嵐日出夫 (北海道大学工学部 土木工学科)

出居 茂 (早稲田大学システム科学研究所)

伊理正夫 (東京大学工学部 計数工学科)

佐佐木綱 (京都大学工学部 交通土木工学科)

斉藤嘉博 (日本放送協会 技術本部計画)

千住鎮雄 (慶応義塾大学工学部 管理工学科)

竹内 清 (東北大学 経済学部)

西田俊夫 (大阪大学工学部 応用推計学講座)

古川長太 (九州大学理学部 数学科)

松田武彦 (東京工業大学大学院総合理工学研究科 システム科学専攻)

本告光男 (中部電力情報処理システム部)

三根 久 (京都大学工学部 数理工学科)

宮川公男 (一橋大学商学部 管理工学科)

渡辺 浩 (筑波大学 社会工学系)

・機関誌担当委員名は 434 ページをご覧ください。

・投稿規定の和文は本号「学会だより」か会員名簿、英文は論文誌表紙裏(表3)に掲載してあります。また、執筆規定は事務局宛ご請求ください。