

# 逐次決定過程としての 動的計画論 (I)

岩 本 誠 一

本報告では、動的計画を逐次決定過程として定式化し、数理計画・制御過程等への応用、動的計画における逆定理、不等式への応用等を中心に論じ、あわせて再帰的計画 (recursive programming) への展望を試みたい。動的計画に対する以下の記述と接近は、オートマトン論あるいはシステム論のそれに類似している。元来、オートマトンはシステムとして考察するとき、その目的が“認識”にあることはいうまでもない。

ここでは、これと平行して、動的計画は“最適化”するシステムとして定義されている。すなわち、最適性の原理が適用されるような数理計画問題を抽象して、動的計画を最適化問題を表現する1つの順序機械 (sequential machine) としてとらえている。この機械は、状態と決定からなる列を逐次処理して、その一環として制約条件付きの目的関数を生成し、それを最適化するものである。機械の目的は最適化にある。このような意味でオートマトンを認識する機械と解釈することに対応している。

このように抽象化された動的計画は、ある場合には、きわめて限定された問題だけしか表現しないかもしれないが、機械としての機能と性質をもっているので、動的計画の間の代数的・オートマトン論的な演算の導入を可能ならしめるものである。事実、§4では、動的計画に対する逆演算が導入されている。

全体を通じて、状態推移が確率的な有限段逐次決定過程に限定して議論している。現時点では、確率的推移法則をもつ場合には、以下に述べる逆定理は成立しないと思われる。また、利得系 (コスト関数) にしても、確率的な場合はおのずかとざられている [5-12, 17, 18]。

## §1. 逐次決定過程としての動的計画

動的計画を逐次的な最適化システムとして定式化するために、まず、一次元配分過程を考えてみよう：

いま、 $N$  個の互いに独立な経済活動  $A_1, A_2, \dots, A_N$  に総量  $c$  ( $\geq 0$ ) の資源を配分するとき、活動  $A_n$  に  $x_n$  だけの資源を配分したとき、利得  $g_n(x_n)$  ( $1 \leq n \leq N$ ) が得られるとする。どのように配分すれば、総利得が最大になるか。

この問題はつぎの最大値問題として定式化される：

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \\ & \text{subject to (i) } x_1 + x_2 + \dots + x_N \leq c (\geq 0) \\ & \quad \quad \quad \text{(ii) } x_n \geq 0 \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

これを動的計画法で解くには、まず、

$f_n(c)$  = 資源  $c$  を活動  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に配分して得られる最大利得 ( $c \geq 0, 1 \leq n \leq N$ )

とおいて、最適性の原理に訴えて、再帰式、

$$\begin{cases} f_n(c) = \text{Max}_{0 \leq x \leq c} [g_n(x) + f_{n-1}(c-x)] & 2 \leq n \leq N \\ f_1(c) = \text{Max}_{0 \leq x \leq c} g_1(x) \end{cases}$$

を得る。つぎに、 $c$  の関数列  $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_N(\cdot)$  を逐次計算する。求める最大値は  $f_N(c)$  になる。これがいわゆる動的計画によるアプローチである。

一般に、動的計画すなわち最適性の原理が適用される問題ではすべて状態と決定が各段ごとに变化している。たとえば、上記の配分問題において、各活動  $A_n$  に資源  $x_n$  を配分したとき ( $1 \leq n \leq N$ )、第1期の(初期)状態  $s_1$  は  $s_1 = c$ 、第1期の決定  $a_1$  は  $a_1 = x_1$  である。ただし  $x_1$  はそのときの状態  $s_1 = c$  に依存する閉区間  $[0, c]$  から選ばれる。 $x_1 \in [0, c]$  でなければならない。このようにすると、第2期では状態  $s_2$  は  $s_2 = c - x_1 (= s_1 - a_1)$  に推移する。このときの決定  $a_2$  としては  $a_2 = x_2$  が、 $s_2 (= c - x_1)$  に依存して定まる閉区間  $[0, c - x_1]$  から選ばれる。 $x_2 \in [0, c - x_1]$

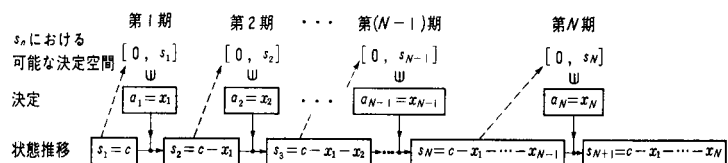


図 1

である必要がある。さらに、第3期には状態  $s_3 = s_2 - a_2$  ( $= c - x_1 - x_2$ ) に移る。

以下、決定列  $x_1, x_2, \dots, x_N$  によって、初期状態  $c$  は図1のように推移する。

他方、この決定列による“総利得”は各段利得  $g_n(x_n)$  の総和  $\sum_{n=1}^N g_n(x_n)$  である。これは、第1期の利得  $g_1(x_1)$  と、第2期以後残りの全段にわたる総和の和、

$$g_1(x_1) + \left( \sum_{n=2}^N g_n(x_n) \right)$$

と解釈できる。また、第2段からはじまる過程の総和  $\sum_{n=2}^N g_n(x_n)$  も  $g_2(x_2)$  と  $\sum_{n=3}^N g_n(x_n)$  の和である。以下同様に考えると、総和  $\sum_{n=1}^N g_n(x_n)$  は、その順序関係を明示すると、逆に  $g_N(x_N)$  からはじめて再帰的に、

$$(1) (g_1(x_1) + (g_2(x_2) + \dots +$$

$$(g_{N-2}(x_{N-2}) + (g_{N-1}(x_{N-1}) + (g_N(x_N)))) \dots))$$

と書ける。これが動的計画のもつ再帰性（可分性ともいう）である。

一般論としては、(1) における  $+$  は常に  $+$  である必要はない。たとえば、 $+$  がすべて  $\times$  になると、目的関数は、

$$(2) g_1(x_1) \times g_2(x_2) \times \dots \times g_N(x_N)$$

になる。この関数は信頼性等の問題によくあらわれる。

また(1)の  $g_n(x_n) + y$  を  $x_n + \frac{y}{x_n}$  ( $1 \leq n \leq N-1$ ) にかえると、

$$(3) x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1 x_2} + \dots + \frac{x_N}{x_1 x_2 \dots x_{N-1}}$$

が得られる。この目的関数は重水プラント設計問題〔1〕に見られる。

上述の3つの関数(1)(2)(3)を生成する2変数関数  $g_n(x_n) + y$ ,  $g_n(x_n) \times y$  ( $g_n(x_n) > 0$ ),  $x_n + \frac{y}{x_n}$  に共通な性質としては、いずれも  $x_n$  を(正に)固定すると、 $y$  の狭義増加関数ということである。これが動的計画におけるいわゆる単調性である。

動的計画を応用する問題では、単調性は通常満たされている。これは、厳密には単調増加性というべきものである。

つぎの数理計画問題には前述と異なる状態推移が見られる：

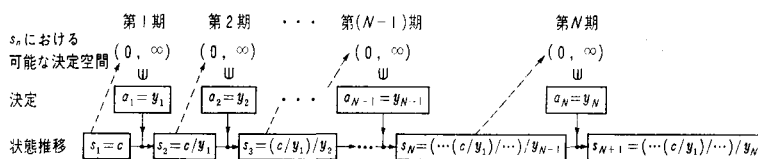


図 2

Minimize  $y_1 + y_2 + \dots + y_N$

subject to (i)  $y_1 y_2 \dots y_N \geq c (> 0)$

(ii)  $y_n > 0 \quad 1 \leq n \leq N.$

すなわち、初期状態  $c$  は決定列  $y_1, y_2, \dots, y_N$  によって図2のように推移する。

一般に、つぎの状態は現在の状態と現在の決定に依存して定まっている。すなわち状態推移はマルコフ型になっている。また、制約式が、1個とはかぎらず、一般に  $p$  個 ( $p \geq 1$ ) ある数理計画問題は  $p$  ベクトル状態変数をもつ動的計画に帰着される。

以上のように、構成要素とその間の機能を与えて、動的計画を定式化するとつぎのようになる。このような表現は、後に逆動的計画を構成するためにきわめて有効である。

一般に、有限段確定的逐次決定過程はつぎの6つの要素で与えられる：

$$(\text{Opt}, \{S_n\}_{1 \leq n \leq N+1}, \{A_n\}_{1 \leq n \leq N},$$

$$\{g_n\}_{1 \leq n \leq N}, k, \{T_n\}_{1 \leq n \leq N})$$

ただし(i)  $N$  は段の数をあらわす正整数である。

(ii) Opt は Max か Min のどちらか一方を指示する最適子である。

(iii)  $S_n$  は  $p_n$  次元ユークリッド空間  $R^{p_n}$  の空でない部分集合で、第  $n$  状態空間という。 $S_n$  の元を通常  $s_n$  であらわす。 $s_n$  は第  $n$  段におけるシステムの状態である。前述の一次元配分過程では  $S_n = [0, \infty)$   $1 \leq n \leq N+1$  になっている。

(iv)  $A_n$  は  $R^{q_n}$  の空でない部分集合であり、 $S_n$  から  $A_n$  への点対集合値写像とする。すなわち、集合  $A$  の空でない部分集合全体を  $2^A$  であらわすと、 $A_n : S_n \rightarrow 2^{A_n}$  である。ここでは記号  $A_n$  を集合と点対集合値写像の両方に用いているが、混乱する恐れはなからう。集合  $A_n$  を第  $n$  決定空間、その部分集合  $A_n(s_n)$  を状態  $s_n$  における可能な決定空間といい、 $A_n(s_n)$  の元を  $a_n$  であらわす。集合値写像  $A_n(\cdot)$  のグラフをつぎで定義しておく：

$\text{graph}(A_n) = \{(s_n, a_n) \in S_n \times A_n \mid a_n \in A_n(s_n), s_n \in S_n\}$ 。前述の配分過程では、 $A_n(c) = [0, c]$   $1 \leq n \leq N$ 。  $c \in S_n = [0, \infty)$ 。したがって  $\text{graph}(A_n) = \{(c, x) \mid 0 \leq x \leq c, c \in [0, \infty)\}$  は  $y = x$  と  $y = 0$  で挟まれた第1象限の半分である。(v)  $g_n : \text{graph}(A_n) \times \text{range}(g_{n+1}) \rightarrow R^1$  ( $1 \leq$

$n \leq N-1$ ),  $g_N : \text{graph}(A_N) \times \text{range}(k) \rightarrow R^1$  は第  $n$  ( $N$ ) 利得関数である。ただし、 $1 \leq n \leq N-1$  のとき、

$$\text{range}(g_n) = \{g_n(s_n, a_n; g_{n+1}) \mid (s_n, a_n, g_{n+1}) \in \text{graph}(A_n) \times \text{range}(g_{n+1})\}.$$

$n=N$  のとき,

$$\text{range}(g_N) = \{g_N(s_N, a_N; k) \mid (s_N, a_N, k) \in \text{graph}(A_N) \times \text{range}(k)\}.$$

配分過程では  $g_N(c_N, x_N; g_{N+1}) = x_N + g_{N+1}$   $1 \leq n \leq N-1$ ,  $g_N(c_N, x_N; k) = x_N$  と考えられる.

(vi)  $k: S_{N+1} \rightarrow R^1$  は終端利得関数である. ここに,

$$\text{range}(k) = \{k(s_{N+1}) \mid s_{N+1} \in S_{N+1}\}.$$

$k(s_{N+1})$  は最終状態  $s_{N+1}$  自身の潜在的な利得(価値)を意味している. しかし配分過程ではこの値は考慮されていないので,  $k(s_{N+1}) = 0$  と考えてよい.

(vii)  $T_n: \text{graph}(A_n) \rightarrow S_{n+1}$  は第  $n$  状態変換である. これは状態  $s_n$  にいて決定  $a_n \in A_n(s_n)$  を下したとき, つぎに状態  $T_n(s_n, a_n) = s_{n+1}$  に行くことをあらわしている. 配分過程では  $T_n(s_n, a_n) = s_n - a_n$  に移る.

さらに, (ii) の最適子 Opt はつぎの最適化問題を表現している

とする:

$$(4) \text{ Opt } g_1(s_1, a_1; g_2(s_2, a_2; \dots; g_N(s_N, a_N; k(s_{N+1}))) \dots)$$

$$(5) \text{ s. t. (i) } T_n(s_n, a_n) = s_{n+1} \quad 1 \leq n \leq N,$$

$$(ii) a_n \in A_n(s_n) \quad 1 \leq n \leq N.$$

初期状態  $s_1 \in S_1$  が任意に与えられると, 意思決定者はまず  $A_1(s_1)$  から決定  $a_1$  を選ぶ. このとき, 状態変換  $T_1$  によって, システムの状態は  $T_1(s_1, a_1) = s_2$  に推移する. つぎに  $s_2$  で彼が  $A_2(s_2)$  から  $a_2$  を選ぶと, 状態  $T_2(s_2, a_2) = s_3$  になる. 以下同様に, 逐次列  $a_3, s_4, a_4, s_5, \dots, s_N, a_N, s_{N+1}$  が定まる(図3).

意思決定者は目的関数(4)が最適(最大か最小)になるように条件(5)を満たすような決定列  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  を選ばうとしている. この選択を指示するのが政策である. 列  $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N\}$  が政策とは,  $\pi_n: S_n \rightarrow A_n$  で, 各  $s_n \in S_n$  に対して  $\pi_n(s_n) \in A_n(s_n)$  のときをいう. とくに, 各  $s_1 \in S_1$  について最適ならしめる  $\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_N^*\}$  を最適政策という.

(4) 式はそれ自身再帰型である. しかし, 動的計画とよばれるためには, 前述の2, 3の例で見たように, さらに利得関数  $\{g_n\}_{1 \leq n \leq N}$  にいわゆる単調性を導入する必要がある[19, 20]. 逐次決定過程は, つぎの単調非減少

性の仮定が満たされるとき, 動的計画といわれる.

単調非減少性の仮定 各  $g_n(s_n, a_n; \cdot) ((s_n, a_n) \in \text{graph}(A_n), 1 \leq n \leq N)$  が  $\cdot$  に関して単調非減少である. すなわち  $(s_n, a_n) \in \text{graph}(A_n), 1 \leq n \leq N-1$  を固定すると,  $c < c', c, c' \in \text{range}(g_{n+1})$  ならば  $g_n(s_n, a_n; c) \leq g_n(s_n, a_n; c')$  である. また  $(s_N, a_N) \in \text{graph}(A_N)$  を固定すると,  $c < c', c, c' \in \text{range}(k)$  ならば  $g_N(s_N, a_N; c) \leq g_N(s_N, a_N; c')$  である. たとえば  $g_n(s_n, a_n; g_{n+1}) = \max(a_n, g_{n+1})$ ,  $\min(a_n, g_{n+1})$  はこの仮定を満たしている. とくに,  $g_n(s_n, a_n; g_{n+1}) = a_n + g_{n+1}$ ,  $a_n \times g_{n+1}$  ( $a_n > 0$ ),  $a_n + \frac{g_{n+1}}{a_n}$  ( $a_n > 0$ ) は  $(s_n, a_n)$  を固定すると  $g_{n+1}$  の単調増加関数になっている.

(4) は通常の動的計画問題に見られる目的関数の一般化になっている. 単調非減少性の仮定を満たす範囲での再帰型関数(4)の分類と具体化は[8, 9]で論じられている. 以下 §5 までは, 単調非減少性を仮定する. すなわち, §2~5 では動的計画を論じている.

## §2. 最適性の原理

前述の  $N$  段階動的計画を  $D = (\text{Opt}, \{S_n\}_{1 \leq n \leq N+1}, \{A_n\}_{1 \leq n \leq N}, \{g_n\}_{1 \leq n \leq N}, k, \{T_n\}_{1 \leq n \leq N})$  であらわすと, 各  $n$  ( $1 \leq n \leq N+1$ ) に対して  $(N-n+1)$  部分動的計画  $D_{N-n+1} = (\text{Opt}, \{S_m\}_{n \leq m \leq N+1}, \{A_m\}_{n \leq m \leq N}, \{g_m\}_{n \leq m \leq N}, k, \{T_m\}_{n \leq m \leq N})$  が考えられる.  $D_{N-n+1}$  は  $s_n \in S_n$  を初期状態とする  $(N-n+1)$  段階動的計画で, 最適化問題,

$$\text{Opt } g_n(s_n, a_n; g_{n+1}(s_{n+1}, a_{n+1}; \dots; g_N(s_N, a_N; k(s_{N+1}))) \dots)$$

$$\text{s. t. (i) } T_m(s_m, a_m) = s_{m+1} \quad n \leq m \leq N,$$

$$(ii) a_m \in A_m(s_m) \quad n \leq m \leq N$$

を表現している. この最適値を  $u^{N-n+1}(s_n)$  とする. 関数  $u^{N-n+1}: S_n \rightarrow R^1$  を  $D$  の第  $n$  最適利得関数という.  $D_N(n=1)$  のときは  $D$  に一致するから, 原動的計画の最適値は  $u^N(s_1)$  であらわされる. また  $D_0(n=N+1)$  のときは最適化要素を含まないから,  $u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1})$  である.

たとえば, 配分過程では  $D_{N-n+1}$  は最大値問題,

$$\text{Max } g_n(x_n) + g_{n+1}(x_{n+1}) + \dots + g_N(x_N)$$

$$\text{s. t. (i) } x_n + x_{n+1} + \dots + x_N \leq c (\geq 0), (ii) x_m \geq 0$$

$$n \leq m \leq N$$

をあらわしている. この最大値が  $u^{N-n+1}(c)$  である. したがって, 与えられた一次元配分過程の最大値は  $u^N(c)$  である. また  $k(c) \equiv 0$  だから,  $u^0(c) \equiv 0$  である.  $D_{N-n+1}$  と  $D_{N-n}$  はその最適値関数  $u^{N-n+1}$  と  $u^{N-n}$  の間のつ

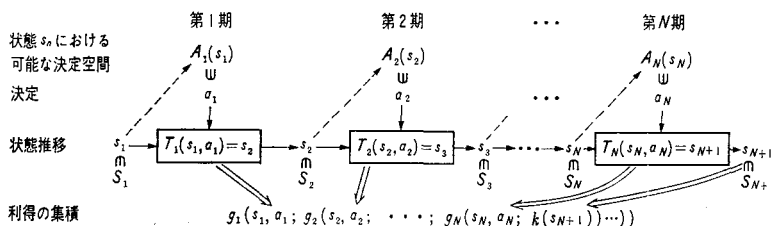


図 3

ぎの再帰式によって関係づけられる：

定理 1 (最適性の原理)

$$(6) u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1}) \quad s_{N+1} \in S_{N+1}$$

$$(7) u^{N-n+1}(s_n) = \text{Opt}_{a_n \in A_n(s_n)} g_n(s_n, a_n; u^{N-n}(T_n(s_n, a_n)))$$

$$s_n \in S_n \quad 1 \leq n \leq N$$

動的計画を応用する問題では、基本的には定理 1 の再帰式によって  $u^0, u^1, \dots, u^N$  を逐次計算して、求める最適値  $u^N(s_1)$  が得られる。応用例では、通常、最適性の原理により (7) が成り立つという形で述べられている。このような場合、前提条件としては、再帰性と単調非減少性 (多くは単調増加性) が暗黙のうちに仮定されている。(7) の最適子 Opt はどの  $n$  についても常に Max か常に Min のいずれかである。しかし、単調非増加性の仮定のもとでは、Opt は  $n$  の変化とともに Max と Min を交互にとる (§ 6 再帰的計画参照)。

### § 3. 最適化問題

本節では動的計画  $D$  で表現される最適化問題 (4) (5) のクラスを論じる。動的計画自身としての解は最適な利得と行動を決定することである。このためには定理 1 の再帰式 (7) を逐次解くことによって最適利得関数と最適政策を求めればよい。とくに、 $D$  が数理計画問題を表現している場合には、さらに、最適値と最適点 (最適値を与える点) も求める必要がある。最適値は初期状態と最適利得関数から、最適点は初期状態、最適政策、状態変換からそれぞれ定まる。

#### 3.1 標準的数理計画問題

連続関数  $f: R^N_+ \rightarrow R^1_+$  は、ある連続関数  $f_n: R^2_+ \rightarrow R^1_+ (1 \leq n \leq N-1)$ ,  $f_N: R^1_+ \rightarrow R^1_+$  に対して、

$$(8) f(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_1(x_1; f_2(x_2; \dots; f_{N-1}(x_{N-1}; f_N(x_N)) \dots))$$

とあらわされるとき、 $R^N_+$  上で再帰型という。たとえば、

$$(9) x_1 + \max(x_2, x_3 x_4), \max(y_1, y_2 + \min(y_3, y_4))$$

は  $R^4_+$  上で再帰型である。なぜなら、 $f_1(x_1; y) = x_1 + y$ ,  $f_2(x_2; y) = \max(x_2, y)$ ,  $f_3(x_3; y) = x_3 y$ ,  $f_4(x_4) = x_4$  とすれば、対応する (8) は (9) の最初の式を生成しているからである。(9) のつぎの式も同様に生成されている。

上記の (9) 式はともに各  $f_n(x_n; \cdot)$  ( $x_n \in R^1_+$ ,  $1 \leq n \leq 3$ ) が非減少で、 $f_4$  が狭義増加である。このような関数をとくに  $R^4_+$  上で非減少性をもつ再帰型という。さらに、各  $f_n(x_n; \cdot)$  が狭義増加のとき、 $R^N_+$  上で狭義増加性をもつ再帰型という。たとえば、

$$\sum_{n=1}^N x_n, \sum_{n=1}^N a_n x_n (a_n > 0), \prod_{n=1}^N x_n, \prod_{n=1}^N (x_n)^{N-n}$$

$$x_1^N + x_1 x_2^{N-1} + \dots + x_1 x_2 \dots x_N$$

$$x_1 + \frac{(x_2)^2}{x_1} + \dots + \frac{(x_N)^N}{x_1 x_2 \dots x_{N-1}}$$

$$(1-x_1)e^{x_1} + (1-x_2)e^{x_1+x_2} + \dots + (1-x_N)e^{x_1+x_2+\dots+x_N}$$

は  $R^N_+$  上で狭義増加性をもつ再帰型関数である。再帰型関数の分類に関する一般論と具体例は [14, 16] にある。

2 変数関数  $f: X \times Y \rightarrow Z$  に対して 1 変数関数  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_y: X \rightarrow Z$  をそれぞれつぎで定義しておく：

$$f_x(y) = f(x, y), f_y(x) = f(x, y).$$

例題 1 Max  $x+y$

$$\text{s. t. (1) } x+y^2 \leq c_1 (\geq 0)$$

$$(2) 2x+y \leq c_2 (\geq 0)$$

$$(3) x, y \geq 0$$

これは  $y^2$  の項があるから、いわゆる線形計画問題ではない。しかし、 $x+y, x+y^2, 2x+y$  はいずれも  $R^2_+$  上で狭義増加性をもつ再帰型 (厳密には加法型) 関数である。よって、部分問題、

$$\text{Max } y \text{ s. t. (1)'} y^2 \leq c_1 (\geq 0), (2)'} y \leq c_2 (\geq 0),$$

$$(3)'} y \geq 0$$

が考えられる。最適性の原理が当てはまるか否かの第 1 の分岐点はこの点にある。

第 2 の分岐点は、原問題の目的関数  $x+y$  は  $x$  を固定すると、 $y$  の、すなわち部分問題の目的関数の、常に狭義増加関数であるという点である。原問題においては、 $c_1, c_2$  はともに  $[0, \infty)$  上を動くから、 $S_1 = R^2_+$  である。 $y \geq 0$  だから、条件 (1) (2) (3) より、 $0 \leq x \leq c_1$  かつ  $0 \leq x \leq c_2/2$  でなければならない。すなわち、第 1 期の決定  $a_1 = x$  は  $x \in [0, c_1 \wedge (c_2/2)]$  である (ただし  $a \wedge b = \min(a, b)$ )。

よって、初期状態  $s_1 = (c_1, c_2)$  における可能な決定空間  $A_1(s_1)$  は  $A_1(s_1) = A_1(c_1, c_2) = [0, c_1 \wedge (c_2/2)]$  になる。また、条件 (1) (2) (3) より、決定  $a_1 = x$  を下すと、それぞれ  $y^2 \leq c_1 - x$ ,  $y \leq c_2 - 2x$ ,  $y \geq 0$  になるから、第 1 状態変換は  $T_1((c_1, c_2), x) = (c_1 - x, c_2 - 2x)$  である。

つぎに、部分問題に対しても、 $c_1, c_2$  はともに  $[0, \infty)$  上を動くから、 $S_2 = R^2_+$ 。(1)', (2)', (3)' より、 $0 \leq y \leq \sqrt{c_1}$  かつ  $0 \leq y \leq c_2$ 。ゆえに  $A_2(c_1, c_2) = [0, \sqrt{c_1} \wedge c_2]$ 。同様に第 2 状態変換は  $T_2(s_2, a_2) = T_2((c_1, c_2), y) = (c_1 - y^2, c_2 - y)$  となる。一般に、数理計画問題では最終状態  $s_3 = (c_1 - y^2, c_2 - y)$  にかかる利得関数はないから、 $k(s_3) = 0$  としてよい。

このように考察してゆくと、例題 1 は 2 段動的計画 (Max,  $\{S_1, S_2, S_3\}$ ,  $\{A_1, A_2\}$ ,  $\{g_1, g_2\}$ ,  $k$ ,  $\{T_1, T_2\}$ ) で表現されることがわかる、ただしその要素は、

$$S_1 = S_2 = S_3 = R^2_+, A_1 = A_2 = [0, \infty), A_1(c_1, c_2) = [0, c_1 \wedge (c_2/2)], A_2(c_1, c_2) = [0, \sqrt{c_1} \wedge c_2], g_1((c_1, c_2), x; g_2 =$$

$x+g_2, g_2((c_1, c_2), y; k) = y+k, k(c_1, c_2)=0, T_1((c_1, c_2), x) = (c_1-x, c_2-2x), T_2((c_1, c_2), y) = (c_1-y^2, c_2-y)$ である。なお、与えられた数理計画問題の動的計画による表現はかならずしも一意であるとはかぎらない。一意性は、問題を解く立場からすれば、重要なことではないと思われる。

例題1の解を求めるためには、定理1の再帰式に相当する式をみちびいて、つぎの最適利得関数  $\{u^0, u^1, u^2\}$  と最適政策  $\{\pi_1^*, \pi_2^*\}$  を得る：

$$u^0(c_1, c_2) = k(c_1, c_2) = 0$$

$$u^1(c_1, c_2) = \text{Max}_{y \in A_2(c_1, c_2)} g_2((c_1, c_2), y; u^0(T_2((c_1, c_2), y)))$$

$$= \text{Max}_{0 \leq y \leq \sqrt{c_1} \wedge c_2}$$

$$= \sqrt{c_1} \wedge c_2, \pi_2^*(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} \wedge c_2$$

$$u^2(c_1, c_2) = \text{Max}_{x \in A_1(c_1, c_2)} g_1((c_1, c_2), x; u^1(T_1((c_1, c_2), x)))$$

$$= \text{Max}_{0 \leq x \leq c_1 \wedge (c_2/2)} [x + \sqrt{c_1-x} \wedge (c_2-2x)]$$

$$= \begin{cases} c_2 \\ (4c_2+1 + \sqrt{-8c_2+1+16c_1})/8 \\ c_1+1/4 \\ \sqrt{c_1} \end{cases}$$

$$\pi_1^*(c_1, c_2) = \begin{cases} 0 & \sqrt{c_1} > c_2 \text{ のとき} \\ (4c_2-1 - \sqrt{-8c_2+1+16c_1})/8 & \sqrt{c_1} \leq c_2, \frac{c_2}{2} \leq c_1 \\ c_1-1/4 & \sqrt{c_1} \leq c_2, \frac{c_2}{2} > c_1 \geq 1/4 \\ 0 & \sqrt{c_1} \leq c_2, c_1 < 1/4 \end{cases}$$

したがって、初期状態  $s_1 = (c_1, c_2)$  から出発して最適政策  $\{\pi_1^*, \pi_2^*\}$  で行動すると、 $a_1^* = x^* = \pi_1^*(c_1, c_2), s_2^* = T_1(s_1, a_1^*), a_2^* = \pi_2^*(s_2^*) = y^*, s_3^* = T_2(s_2^*, a_2^*)$  になる。よって、例題1はつぎの解をもつ：

$$\left. \begin{aligned} &\sqrt{c_1} > c_2 \\ &\sqrt{c_1} \leq c_2, \frac{c_2}{2} \leq c_1 \\ &\sqrt{c_1} \leq c_2, \frac{c_2}{2} > c_1 \geq 1/4 \\ &\sqrt{c_1} \leq c_2, c_1 < 1/4 \end{aligned} \right\} \text{ならば、}(x^*, y^*) =$$

$$\begin{cases} (0, c_2) \\ ((4c_2-1 - \sqrt{-8c_2+1+16c_1})/8, \\ (1 + \sqrt{-8c_2+1+16c_1})/4) \\ (c_1-1/4, 1/2) \\ (0, \sqrt{c_1}) \end{cases}$$

のとき、

$$\text{最大値 } u^2(c_1, c_2) = \begin{cases} c_2 \\ (4c_2+1 + \sqrt{-8c_2+1+16c_1})/8 \\ c_1 + \frac{1}{4} \\ \sqrt{c_1} \end{cases}$$

つぎに、例題1の一般化を考えよう。以下、 $f, g_i (1 \leq i \leq p), g, f_j (1 \leq j \leq q) : R^N_+ \rightarrow R^1_+$  はすべて  $R^N_+$  上で狭義増加性をもつ再帰型関数とする。動的計画で表現できる標準的な数理計画問題はつぎで与えられる：

$$\begin{aligned} \text{問題1} \quad & \text{Max } f(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \text{s.t.} \quad & (1) \ g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq c_1 (\geq 0) \\ & (2) \ g_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq c_2 (\geq 0) \\ & \vdots \\ & (p) \ g_p(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq c_p (\geq 0) \\ & (p+1) \ x_1, x_2, \dots, x_N \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{問題2} \quad & \text{Min } g(y_1, y_2, \dots, y_N) \\ \text{s.t.} \quad & (1)' \ f_1(y_1, y_2, \dots, y_N) \geq d_1 (\geq 0) \\ & (2)' \ f_2(y_1, y_2, \dots, y_N) \geq d_2 (\geq 0) \\ & \vdots \\ & (q)' \ f_q(y_1, y_2, \dots, y_N) \geq d_q (\geq 0) \\ & (q+1)' \ y_1, y_2, \dots, y_N \geq 0 \end{aligned}$$

この問題に対して、関数  $f, g_i, g, f_j$  の冒頭の性質を用いて、例題1の直後と同様な考察を試みると、つぎを得る：

補題1 問題1は  $N$  段階動的計画  $D_1 = (\text{Max}, \{S_n\}_{1 \leq n \leq N+1}, \{A_n\}_{1 \leq n \leq N}, \{g_n\}_{1 \leq n \leq N}, k, \{T_n\}_{1 \leq n \leq N})$  で表現される。ただし、

$$\begin{aligned} s &= (c_1, c_2, \dots, c_p), \ a_n = x_n, \ S_n = R^p_+, \ A_n = R^1_+, \\ A_n(c_1, c_2, \dots, c_p) &= \{x \in R^1_+ \mid (g_{in}^x)^{-1}(c_i) \geq 0 \ 1 \leq i \leq p\} \\ 1 \leq n \leq N-1, \\ A_N(c_1, c_2, \dots, c_p) &= \{x \in R^1_+ \mid g_{iN}(x) \leq c_i \ 1 \leq i \leq p\}, \\ T_n((c_1, c_2, \dots, c_p), x) &= ((g_{1n}^x)^{-1}(c_1), (g_{2n}^x)^{-1}(c_2), \\ &\dots, (g_{pn}^x)^{-1}(c_p)) \ 1 \leq n \leq N-1, \\ T_N((c_1, c_2, \dots, c_p), x) &= R^p_+ \text{ の任意の元}, \\ g_n((c_1, c_2, \dots, c_p), x; g_{n+1}) &= f_n(x; g_{n+1}) \ 1 \leq n \leq N-1, \\ g_N((c_1, c_2, \dots, c_p), x; k) &= f_N(x), \\ k(c_1, c_2, \dots, c_p) &= 0. \end{aligned}$$

問題2も、同様に、 $N$  段階動的計画  $D_2$  で表現される(その要素は省略する)。

一般に、動的計画で表現される数理計画問題に対しては、行ごとに個々の制約式を課すのではなく、列ごとにしかも、後向きに、各変数を逐次加えるようにして、部分問題に分解して考えている。これは再帰性にもとづいている：

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f_1(x_1; f_2(x_2; \dots; f_{N-1}(x_{N-1}; f_N(x_N)) \dots)) \\ \text{s.t.} \quad & g_{11}(x_1; g_{12}(x_2; \dots; g_{1N-1}(x_{N-1}; g_{1N}(x_N)) \dots)) \leq c_1 \\ (1) \quad & g_{21}(x_1; g_{22}(x_2; \dots; g_{2N-1}(x_{N-1}; g_{2N}(x_N)) \dots)) \leq c_2 \\ (2) \quad & \vdots \\ (p) \quad & g_{p1}(x_1; g_{p2}(x_2; \dots; g_{pN-1}(x_{N-1}; g_{pN}(x_N)) \dots)) \leq c_p \\ (p+1) \quad & x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

もちろん、このように分解できたとしても、変数を1つ加えた部分問題の目的関数は、その変数を固定すると、常にもとの部分問題の目的関数の単調非減少関数になっていなくてはならない。これがいわゆる単調性である。

問題1, 2の詳細は[15, 16], その種々の具体例は[13]に述べられている。とくに、 $p=q=1$ の場合、すなわち一制約式の場合については、§4で逆定理との関係において議論する。

### 3.2 目的関数に状態も含む数理計画問題

前節の標準的数理計画問題は、動的計画で表現されたとき、その目的関数には状態が含まれていなかった。すなわち、問題1, 2の目的関数は決定列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ だけの関数であった。ここでは目的関数に状態列 $s_1, s_2, \dots, s_{N+1}$ も含まれるような数理計画問題をあげてみよう。

$$\begin{aligned} \text{例題 2} \quad & \text{Min} \sum_{n=1}^N b_n y_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} a_n y_n y_{n+1} \\ \text{s.t.} \quad & (1) \sum_{n=1}^N y_n^2 = 1 \quad (\text{ただし } b_n, a_n \text{ は定数}) \end{aligned}$$

これに対しては適当な状態変数 $s_n=c$ を導入して、

$$(10) \quad u^{N-n+1}(c) = \text{Min} \sum_{k=n}^N b_k y_k^2 + 2c y_n + 2 \sum_{k=n}^{N-1} a_k y_k y_{k+1} \\ y_n^2 + y_{n+1}^2 + \dots + y_N^2 = 1 \\ 1 \leq n \leq N$$

とすると、再帰式、

$$\begin{aligned} u^{N-n+1}(c) &= \text{Min}_{y_n^2 \leq 1} \left[ b_n y_n^2 + 2c y_n + (1 - y_n^2) \text{Min} \right. \\ & \quad \left. \left( \frac{y_{n+1}}{\sqrt{1-y_n^2}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{y_N}{\sqrt{1-y_n^2}} \right)^2 = 1 \right. \\ & \quad \left. \left\{ \sum_{k=n+1}^N b_k \left( \frac{y_k}{\sqrt{1-y_n^2}} \right)^2 + 2 \frac{a_n y_n}{\sqrt{1-y_n^2}} \times \frac{y_{n+1}}{\sqrt{1-y_n^2}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \sum_{k=n+1}^N a_k \frac{y_k}{\sqrt{1-y_n^2}} \times \frac{y_{k+1}}{\sqrt{1-y_n^2}} \right\} \right] \\ &= \text{Min}_{-1 \leq y_n \leq 1} \left[ b_n y_n^2 + 2c y_n + (1 - y_n^2) u^{N-n} \right. \\ & \quad \left. \left( \frac{a_n y_n}{\sqrt{1-y_n^2}} \right) \right] \quad 1 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $u^0, u^1$ は次式で定義しておく：

$$u^0(c) = 0, \quad u^1(c) = \text{Min}_{y_N \in \{-1, 1\}} [b_N y_N^2 + 2c y_N].$$

求める最小値は $u^N(0)$ で、すなわち $n=1, c=0$ のとき、与えられる。よって、例題2はつぎの要素をもつN段階動的計画で表現される：

$$\begin{aligned} s=c, a=y, S_n=R^1, A_n=A_n(c)=[-1, 1] \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ A_N=A_N(c)=[-1, +1], \quad g_n(c, y; g_{n+1})=b_n y^2 + 2c y + (1-y^2) g_{n+1} \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ g_N(c, y; k)=b_N y^2 + 2c y + k, \quad k(c)=0, \quad T_n(c, y)=a_n y / \sqrt{1-y^2} \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

この例でもわかるように、一般に、動的計画で表現できると再帰式をみちびくことは同等である。動的計

画による表現可能性は再帰式の導出に等しい。この意味では、動的計画を応用する問題では、何が状態変数で、何が決定変数であるかを明確にすることが重要な解決策である。上記の例では、 $s=c$ を導入して $u^{N-n+1}(c)$ を(10)で定義したことが幸いしている。

例題2と同様な問題としてはつぎが考えられる：

$$\text{問題 3} \quad \text{Max} (ax_1)^2 + (x_1 + ax_2)^2 + \dots + (x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} + ax_N)^2$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \sum_{n=1}^N x_n^2 = 1 \quad (\text{ただし } a \geq 0),$$

$$\text{問題 4} \quad \text{Max} x_1^2 + (x_1 + ax_2)^2 + \dots + (x_1 + ax_2 + \dots + a^{N-1} x_N)^2$$

$$\text{s.t.} \quad (2) \sum_{n=1}^N x_n^2 = 1 \quad (\text{ただし } a \geq 0),$$

$$\text{問題 5} \quad \text{Max} (ax_1)^2 (x_1 + ax_2)^2 \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} + ax_N)^2$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \sum_{n=1}^N x_n^2 = 1 \quad (\text{ただし } a \geq 0),$$

$$\text{問題 6} \quad \text{Max} x_1^2 (x_1 + ax_2)^2 \dots (x_1 + ax_2 + \dots + a^{N-1} x_N)^2$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \sum_{n=1}^N x_n^2 = 1 \quad (\text{ただし } a \geq 0),$$

$$\text{問題 7} \quad \text{Min} \sum_{n=1}^N b_n y_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} a_n y_n y_{n+1} + 2 \sum_{n=1}^{N-2} d_n y_n y_{n+2}$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \sum_{n=1}^N y_n^2 = 1 \quad (\text{ただし } b_n, a_n, d_n \text{ は定数}),$$

$$\text{問題 8} \quad \text{Min} \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n-1})^2$$

$$\text{s.t.} \quad (1) \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n y_n^2 = 1 \quad (2) y_0 = y_N = 0.$$

例題2と問題3, 4, 7は単位球面上の2次形式の最大・最小化だから、その最適値は対応する行列の最大・最小固有値で与えられる。例題2と問題3, 4, 7, 8は[1, 2, 3, 4]に、問題5, 6は[13, 15]に見いだされる。その解は[13]にくわしい。

### 3.3 条件がつかない数理計画問題

非制約条件つき数理計画問題として、つぎの最小化問題は解析解をもつ：

$$\text{例題 3} \quad \text{Min} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2 + (y_1 - c)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dots + (y_N - y_{N-1})^2 \quad (\text{ただし } c \text{ は定数})$$

$$u^0(c) = 0, \quad u^1(c) = \text{Min}_{-\infty < y_N < \infty} [y_N^2 + (y_N - c)^2], \quad \text{一般に } c \in R^1 \quad 1 \leq n \leq N \text{ に対して,}$$

$$u^{N-n+1}(c) = \text{Min}_{\substack{y_k \in R^1 \\ n \leq k \leq N}} [y_n^2 + y_{n+1}^2 + \dots + y_N^2 + (y_n - c)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 + \dots + (y_N - y_{N-1})^2]$$

とすると、再帰式、

$$u^{N-n+1}(c) = \text{Min}_{y_n \in R^1} [y_n^2 + (y_n - c)^2 + u^{N-n}(y_n)] \quad 1 \leq n \leq N-1$$

を得る。すなわち、例題3はつぎの要素をもつ  $N$  段階動的計画で表現されている：

$$\text{Min}, s=c, a=y, S_n=A_n=A_n(c)=R^1=(-\infty, \infty), \\ g_n(c, y; g_{n+1})=y^2+(y-c)^2+g_{n+1}, T_n(c, y)=y, k(c)=0.$$

再帰式を解くと、

$$u^{N-n+1}(c)=b_{N-n+1}c^2, \pi_n^*(c)=d_nc \quad 1 \leq n \leq N$$

になる。ただし  $b_1=1/2, b_{n+1}=(1+b_n)/(2+b_n) \quad 1 \leq n \leq N-1, d_N=1/2, d_n=1/(2+b_{N-n}) \quad 1 \leq n \leq N-1$ 。

たとえば、

$$\text{例題4} \quad \text{Min} \quad y_1^2+y_2^2+y_3^2+(y_1-c)^2+(y_2-y_1)^2+(y_3-y_2)^2$$

は  $\hat{y}_1(c)=(5/13)c, \hat{y}_2(c)=(2/13)c, \hat{y}_3(c)=(1/13)c$  のとき、最小値  $u^3(c)=(8/13)c^2$  をもつ。

例題3を一般化すると、つぎの問題が考えられる：

$$\text{問題9} \quad \text{Min} \sum_{n=1}^N [\phi_n(y_n) + \phi_n(y_n - y_{n-1})], y_0=c,$$

ただし  $\phi_n, \phi_n$  は適当な関数。

$$\text{問題10} \quad \text{Min} \sum_{n=1}^N [\phi_n(y_n) + \phi_n(y_n - y_{n-1}) + \chi_n(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2})] y_0=c, y_{-1}=c_2$$

ただし  $\phi_n, \phi_n, \chi_n$  は適当な関数。

問題11  $\text{Min} (x, Ax) - 2(c, x)$  ただし  $A$  は対称正定値  $N \times N$  行列、 $c$  は  $N$  ベクトル、 $(x, y)$  は内積。

問題12  $\text{Min} (x, Ax) - 2(b, x)$  ただし  $A$  はヤコビ正定値対称  $N \times N$  行列、 $b$  は  $N$  ベクトル。ここに  $A$  がヤコビとは  $a_{ij}=0 \quad |i-j| \geq 2$  をいう。これらの問題は [1-4, 13, 15] にくわしく報告されている。

### 3.4 離散時間制御過程

われわれの動的計画は比較的広いクラスの数理計画問題を表現していた。これらは時として線形計画問題、2次計画問題や凸計画問題になっていた。しかし、標準的な制御過程も動的計画で表現できる。ここでは2次の評価関数と線形(状態変換)方程式をもつ  $N$  段階制御過程を考えてみよう。

$$\text{例題5} \quad \text{Min} \sum_{n=1}^N (x_n^2 + y_n^2) \quad \text{s.t.} \quad (1) \quad x_{n+1} = bx_n + y_n \\ 1 \leq n \leq N \quad (2) \quad x_1 = c \quad (\text{ただし } b, c \text{ は定数})$$

これは直接動的計画で表現される型になっている。よって、つぎの要素をもつ  $N$  段階動的計画で表現される：

$$\text{Min}, S_n=R^1, A_n=R^1, A_n(s_n)=R^1, s_n=x_n, a_n=y_n, \\ g_n(s_n, a_n; g_{n+1})=s_n^2+a_n^2+g_{n+1}, k(s_{N+1})=0, T_n(s_n, a_n)=bs_n+a_n.$$

したがって、最適政策は  $\{\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_N^*\}, \pi_n^*(s_n)=q_n s_n$ 、最適利得関数は  $\{u^0, u^1, \dots, u^N\}, u^{N-n+1}(s_n)=p_{N-n+1} s_n^2$ 。ここに、

$p_0=0, p_1=1, \dots, p_n=1+b^2-\frac{b^2}{1+p_{n-1}} \quad 2 \leq n \leq N$ 。ゆえに最適行動は  $x_1^*(c)=c, y_1^*(c)=\pi_1^*(c), x_2^*(c)=bc+y_1^*(c), y_2^*(c)=\pi_2^*(x_2^*(c)), \dots, y_N^*(c)=\pi_N^*(x_N^*(c))$ 、最小コストは  $u^N(c)=p_N c^2$  である。たとえば、

$$\text{例題6} \quad \text{Min} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2 \\ \text{s.t.} \quad (1) \quad x_{n+1}=bx_n+y_n \quad 1 \leq n \leq 3, \quad (2) \quad x_1=c \\ \text{は} (x_1^*(c), x_2^*(c), x_3^*(c))=(c, \frac{2b}{4+b^2}c, \frac{b^2}{4+b^2}c), (y_1^*(c), y_2^*(c), y_3^*(c))=(-\frac{2+b^2}{4+b^2}bc, -\frac{b^2}{4+b^2}c, 0) \text{ のとき、最小値} \\ u^3(c)=\frac{4+3b^2+b^4}{4+b^2}c^2 \text{ をもつ。}$$

この問題をベクトル化して、終端利得を考慮すると、

$$\text{問題13} \quad \text{Min} \left( \sum_{n=1}^N [(x_n, x_n) + (y_n, y_n)] + b(x_{N+1}, x_{N+1}) \right) \\ \text{s.t.} \quad (1) \quad x_{n+1}=Ax_n+y_n \quad 1 \leq n \leq N \quad (2) \quad x_1=c \\ (\text{ただし } A \text{ は } M \times M \text{ 行列, } x_n, y_n \text{ は } M \text{ ベクトル, } c \text{ は } M \text{ ベクトル定数, } b \text{ は実定数}) \text{ になる。これも例題5と同じ方法で解析されている [3-5, 13]。}$$

### 3.5 その他の最適化問題

これまではすべて連続型変数を取りあつてきた。しかし、動的計画は本来連続変数・離散変数を区別しない。これは動的計画のわれわれの定式化をみれば、明らかである。また、動的計画は(たとえ手段として用いることはあっても)本来の姿においては微分演算とも独立である。この意味において、離散最適化(discrete optimization)のあるクラスの問題も動的計画によって表現される。たとえばタクシーの最適配車問題、最適人員配置計画問題等がある。他方グラフやネットワーク上の最適化問題、離散変数型数理計画問題等[13]も考えられる。これらの問題に関する詳論は別の機会にゆずりたい。

### 参考文献

- [1] Bellman, R., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey, 1957.
- [2] ———, *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol. I, Linear Equations and Quadratic Criteria*, Academic Press, New York, 1967.
- [3] ———, *Introduction to Matrix Analysis*, 2nd Ed., McGraw Hill, New York, 1970.
- [4] ———, *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol. II, Nonlinear Processes*, Academic Press, New York, 1971.
- [5] Furukawa, N. and Iwamoto, S., Markovian decision processes with recursive reward functions, *Bull. Math. Statist.*, **15**(1973), 79—91.
- [6] ———, Correction to “Markovian deci-

- sion processes with recursive reward functions," *Bull. Math. Statist.*, **16**(1974), 127.
- [7] 古川長太・岩本誠一, 再帰利得系上の動的計画I, 日本OR学会アブストラクト集, 1974年春季, p.51, 52.
- [8] ———, 再帰利得系上の動的計画II, 日本OR学会アブストラクト集, 1974年春季, p.53, 54.
- [9] Furukawa, N. and Iwamoto, S., Dynamic programming on recursive reward systems, *Bull. Math. Statist.*, **17**(1976), 103—126.
- [10] Iwamoto, S., Discrete dynamic programming with recursive additive system, *Bull. Math. Statist.*, **16**(1974), 49—66. (日本OR学会アブストラクト集, 1974年春季, p.31, 32).
- [11] ———, Linear programming on recursive additive dynamic programming, *J. Operations Res. Soc. Japan*, **18** (1975), 125—151. (日本OR学会アブストラクト集, 1974年秋季, p.51, 52)
- [12] ———, Finite horizon Markov games with recursive payoff systems, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math.*, **29**(1975), 123—147.
- [13] 岩本誠一 "Applications of Recursive Dynamic Programming" unpublished preprint(1975), pp.310.
- [14] ———, Inverse Theorems in Dynamic Programming (II) Applications, 日本OR学会アブストラクト集, 1975年秋季, p.3, 4.
- [15] ———, 動的計画が表現する数理計画問題について, 研究集会「数理計画と決定理論」, 京都大学数理解析研究所, 1977年1月.
- [16] Iwamoto, S., Inverse theorem in dynamic programming II, *J. Math. Anal. Appl* **58**(1977), in press.
- [17] 岩本誠一・甲斐裕, Markov Games with Recursive Additive Payoff Systems, 日本OR学会アブストラクト集, 1974年春季, p.129, 130.
- [18] Iwamoto, S. and Kai, Y., Discrete Markov games with recursive additive payoff systems, preprint (1975).
- [19] Mitten, L. G., Composition principles for synthesis of optimal multistage processes, *Operations Res.*, **12**(1964), 610—619.
- [20] Nemhauser, G.L., *Introduction to Dynamic Programming*, John Wiley, New York, 1966.  
(いわもと・せいいち 九州大学理学部数学教室)

## 昭和52年度編集委員会

昭和52年度はつぎのメンバーによって機関誌・論文誌の編集を行なうことになりました。読者・会員諸氏のご協力をお願いいたします。提案等ございましたら各担当者が事務局にご連絡ください。

編集委員長(編集理事) 奥野忠一(東京大学 工学部 計数工学科)

[機関誌〈オペレーションズ・リサーチ〉担当]

### ・総括

(委員長) 奥野忠一

(幹事) 伏見正則(東京大学工学部・計数工学科)

(幹事補) 腰塚武志(同・都市工学科)

(委員) 竹内 啓(東京大学 経済学部)

### ・特集企画

(委員) 奥平耕造(東京大学工学部・都市工学科)

柏井澄夫(日本ビジネスオートメーション)

司馬正次(筑波大学 社会工学系)

### ・総合報告・解説

(委員) 五百井清右衛門(早稲田大学・システム研)

小池将貴(三菱電機・技術管理部)

### ・月例講演

(委員) 藤重 悟(東京大学工学部・計数工学科)

### ・事例報告

(委員) 門山 充(国際商科大学)

### ・トップのページ, 広告

(委員) 守江治夫(日本科学技術研修所)

### ・フォーラム

(委員) 入沢 元(通商産業省・官房情報管理課)

柴田義貞(東京大学工学部・計数工学科)

平本 徹(日本科学技術研修所)

### ・文献紹介, 研究発表会

(委員) 大山達雄(電力中央研究所 経済研究所)

鳩山由紀夫(東京工業大学工学部・経営工学科)

### ・ニュース, 支部・部会だより

(委員) 藤野和建(東京大学工学部・計数工学科)

### ・担当分野なし

(委員) 秋葉 博(神戸商科大学 管理科学科)

高森 寛(青山学院大学 経済学部)

森村英典(東京工業大学理学部情報科学科)

(論文誌担当については440ページをご覧ください)