

組合せ理論の応用 (1)

中 村 義 作

学会の編集部から、組合せ理論の応用に関する解説を書くようにとのお勧めをいただき、自分自身の勉強にもなるよい機会と思って、さっそくに執筆をお引き受けした。しかし、今日の組合せ理論が対象としている問題は広範多岐で、そのすべてにわたる応用を述べることは、浅学非才な筆者にはとてもできるところでない。そして、そのような全般的な応用に関するものであれば、好几个の著書がいくつか出版されている。

このため、学会会員の諸兄には、むしろ筆者の周辺で生じた具体的な問題を通じて、組合せ理論がどのように応用されたかという実例を示すほうが参考になるのではないかと自分なりに解釈し、その方向で筆を進めることにした。

幸い、筆者のこれまでの研究には、組合せ理論を応用したものがいくつかあるため、これなら筆者にも書けそうである。ただし、筆者は電気通信の分野の研究に長く従事してきたため、どうしても、その分野のものに関連しがちである。もちろん、予備知識なしでも読めるように、専門的内容はていねいに解説するつもりであるが、その点は、あらかじめご了承ください。

1. 組合せ理論のやさしい応用

(相互効果の分散均等化に関して)

1.1 漏話のバブル化

最初から聞き慣れない言葉が出てくるが、内容は簡単なことなので、おゆるし願いたい。

いまから20年以上も前になるが、筆者が日本電信電話公社の電気通信研究所に配属されてまもない頃のある日、上司から「漏話のバブル化」という問題を提出された。これが、組合せ理論を応用した筆者の最初の経験であるので、いまでもはっきり記憶に残っているが、問題を与えられてから解法の発見までに大変な苦勞をした。わかってみれば簡単なことで、その組合せ法は古い著書

にものっていたのであるが、当時は知る由もなかった。

問題を具体的に説明しよう。電話を伝送するには、無線や有線など、いくつかの手段があるが、その1つに通信ケーブルの利用があ

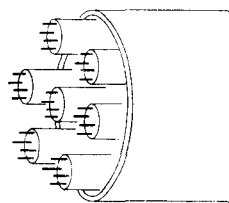


図 1.1

る。鉛の被覆の中に多数の電話回線を収めたもので、普通は地下に埋藏してある。昔は、これにカッド・ペア・ケーブル (quad pair cable) をよく用いていたが、その構造は図 1.1 のようである。カッドとよばれる4本の電線を鉛ケーブルの中に何組も収め、同時に何回線も電話を伝送できるようにしてある。このとき、1回線の電話に2本の電線が必要なので、 n カッドでは $2n$ 回線が伝送される。

さて、電話を同時に何回線も伝送するとき、「漏話」という厄介な問題が起きてしまう。それは、他人の電話が自分の電話回線に漏れてきてしまう現象で、大変聞きづらいものである。この漏話は、同じ通信ケーブル内に収められた電話回線の間でも起き、とくに同じカッド内の2回線の間で起きやすい。このため、実際のカッド・ペア・ケーブルでは、各カッド内の電話回線の組合せをときどき変えて、特定の電話回線だけからの大きな漏話を受けないように工夫している。これを、簡単な例で説明しよう。

いま、もっとも単純に、1本の通信ケーブルに2カッドだけが収められているとする。伝送できる電話は4回線で、これをA, B, C, Dとしよう。もし、AとB, CとDをそれぞれ同じカッド内に収め、カッド内の回線の組みかえなしに長距離の伝送をすれば、AとBの間、CとDの間のそれぞれで、大きな漏話を受ける可能性が生ずる。この伝送の状態を図 1.2(a) のようにあらわす。ここに、各回線は1本の線で、また同じカッド内の2回線は点線で囲んであらわした。



図 1.2(a)

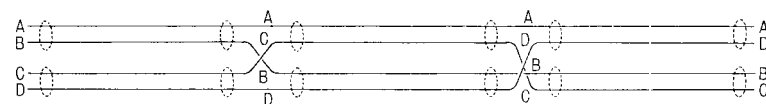


図 1.2(b)

この大きな漏話を防ぐため、途中の2カ所にカッド内の回線の組みかえ場所を設け、図1.2(b)のように、カッド内の組みかえを行なってみる。すると、Aは最初の区間でBと、つぎの区間でCと、最後の区間でDと組み合わせられ、B、C、Dのいずれの回線からも、前の場合の1/3の漏話を平等に受ける。このため、漏れてくる話がいりいろに混ざり合っ、意味のわからない雑音のようになる。この現象を漏話のバブル化(babbling)といい、組合せられる電話回線数が多くなるほど、雑音化の効果は大きい。なお、バブル(babble)というのは、意味のわからない言葉をべちゃくちゃということである。

つぎに、Bと組合せられている回線を見ると、最初の区間でA、つぎの区間でD、最後の区間でCとなり、やはり他の3回線が平等に組合せられている。同じことは残りのCとDについても成り立ち、すべての電話回線に対して万遍なくバブル化されていることがわかる。つまり図1.2(b)の組合せ方は、バブル化に対して理想的な状態を与えている。

以上で、漏話のバブル化に対する基本概念は得られたと思うので、つぎに単純な例として、1本の通信ケーブルに3カッドが収められている場合を調べてみる。今度は6回線で、これをA、B、C、D、E、Fであらわす。いま、各カッド内で最初に組合せられる回線をAとB、CとF、DとEとし、これを、

A-B, C-F, D-E

のようにあらわす。すべての漏話を完全にバブル化するには、それぞれの回線は他の5回線と1回ずつ平等に組合せられる必要がある。このため、カッド内の回線の組みかえは4回必要で、たとえば、

1回目: A-B, C-F, D-E

2回目: A-C, D-B, E-F

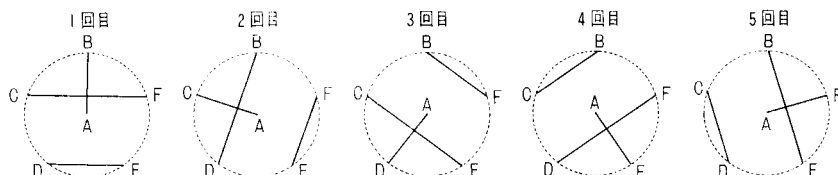


図 1.3

3回目: A-D, E-C,
F-B

4回目: A-E, F-D,
B-C

5回目: A-F, B-E,
C-D

とすると、その目的はみごとに達せられる。しかも、この組合

せは一般のバブル化問題に対する有用な情報を含んでいる。

まず注目すべきことは、1回目の組合せだけから、他の回の組合せがすべて簡単に求められることである。すなわち、1回目がAの列は、5回目までAをそのまま書きおろす。また、1回目がA以外の列は、

B→C→D→E→F(Bに戻る)

という巡回的な順序で、つぎつぎと書き進める。これが望みの組合せを与えていることは、個々の組合せを具体的に調べれば明らかであるが、実は幾何学的なうまい説明法がある。円周を5等分し、反時計まわりにBからFまでを描く。また、中心はAとする。そして、図1.3のように、各回の組合せを1本の半径と2本の弦であらわす。すると、うえの巡回的な書き方から明かなように、1本の半径と2本の弦の相対的な配置は、どの回もすべて同じである。ただ、反時計まわりに1/5周ずつ回転している点だけが違う。

ところで、この組合せで、Aが他のすべてのものと1回ずつ組合せられることは明らかである。その他の組合せについては、たとえばBをとると、

BとC, BとF: 1/5 周の離れ

BとD, BとE: 2/5 周の離れ

の組合せが必要であるが、2本の弦はそれぞれ1/5周の弧、2/5周の弧を結んでいるので、1周する間に、すべての組合せがちょうど1回ずつあらわれる。これで、望みの組合せが確実につくれることになる。

さて、以上の準備のもとに、筆者が上司から提出された一般のバブル化の問題に移る。その問題は、「1本の通信ケーブルの中にnカッド(すなわち2n回線)が収められているとして、すべての回線に生ずる漏話を完全にバブル化せよ」というものである。この場合どの回線も他

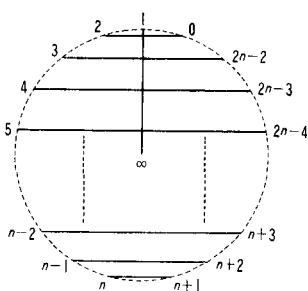


図 1.4

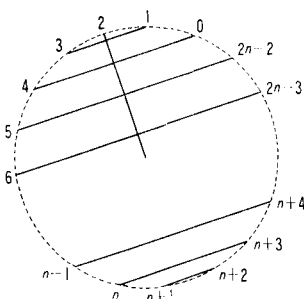


図 1.5

の $(2n-1)$ 回線と1回ずつ組合わされる必要があるので $(2n-2)$ カ所の切替場所が必要である。そして、これまでの組合せ方に注意すれば、一般問題の解も容易に得られる。

少し奇妙ではあるが、 $2n$ 回線に、

$\infty, 0, 1, 2, \dots, 2n-2$

という番号をつける。そして、1つの円の中心を ∞ 、円周を $(2n-1)$ 等分した各点を、反時計まわりに $0, 1, 2, \dots, (2n-2)$ とする。いま、図1.4のように、

∞ と1

2と0

3と $(2n-2)$

4と $(2n-3)$

$\vdots$

$(n-1)$ と $(n+2)$

n と $(n+1)$

をそれぞれ結び、これを1回目の組合せとする。2回目の組合せは、図1.4の1本の半径と $(n-1)$ 本の弦の相互の配置はそのままに保ちながら、これらを反時計まわりに $1/(2n-1)$ 回転させて、図1.5とすればよい。一般に、この方法で j 回目($j=1, 2, \dots, 2n-1$)の組合せをつくるには、反時計まわりに $(j-1)/(2n-1)$ 回転すればよく、これによる組合せは、

∞ と j

$(j+i)$ と $(j-i)$, $i=1, 2, \dots, n-1$

となる。ただし、 ∞ を除く各数は、 $(\text{mod } 2n-1)$ で0と $(2n-2)$ の間に入るように調整しておく。

この方法で、バブル化が完全に行なわれていることは、3カッドの場合と同じ方法で示される。まず、図1.4において、1本の半径と $(n-1)$ 本の弦とでつくられる「くし形の図形」を1回転させると、中心の ∞ は明らかに他の $(2n-1)$ 個の数と1回ずつ組合せられる。一方、弦の両端の2数の差を求めてみると、上から順に、

[n が偶数のとき]

2, 4, 6, $\dots$, $n-2$,

$n-1, n-3, n-5, \dots, 3, 1$

[n が奇数のとき]

2, 4, 6, $\dots$, $n-1$,

$n-2, n-4, n-6, \dots, 3, 1$

となって、1から $(n-1)$ までの各数が1回ずつあらわれる。したがって、特定の1回線(たとえば S)と組合せられる相手の回線は、それが何回目に組合せられるかの順番を無視すれば、 $(\text{mod } 2n-1)$ で、

$S \pm 1, S \pm 2, S \pm 3, \dots, S \pm (n-1)$

となり、すべての回線と万遍なく組合せられていることがわかる。これで、漏話のバブル化の問題は完全に解決された。なお、この組合せ法を最初に紹介したのは、19世紀に出版された数学遊戯書¹⁾である。

1.2 リーグ戦の組合せ

漏話のバブル化に関連して検討した前節の組合せ問題は、相互効果の分散均等化という観点からは、きわめて一般的な問題とみることができる。前節では、この相互効果をたまたま「カッド内の電話回線間の漏話」とみなしただけである。そこで、本節では、より身近な「リーグ戦の組合せ」という問題におきかえて、さらに一般的な組合せ問題への導入を与える。

いま、6人の棋士A, B, C, D, E, Fで将棋を争い、総当りのリーグ戦で優勝者を決めるものとする。このため、将棋盤を3組用意し、同時に3局の試合を並行して進める。各棋士は、自分以外の5人の棋士と対局すればよいから、それぞれ5局の対局をする。よって、各回の3組の対局をうまく組合せれば、ちょうど5回の対局で、どの2棋士も対戦し終わるようになる。この問題の解は、前節の3カッド6回線のバブル化の解と明らかに同じである。そして、囲碁、将棋、チェス、すもう、野球などのように、2組が対戦するゲームのリーグ戦の組合せには、すべて適用可能である。

この問題の一般化としては、3人ずつで試合するトランプや花カルタ、4人ずつで試合するマージャンなどの組合せが考えられる。

まず、ツー・テン・ジャックのように、3人ずつで試合するトランプ・ゲームを考えよう。9人の友だちがいて、このトランプの勝負を争うものとする。そして、どの人も他のすべての人と1回ずつ対戦するようにして、9人の間の順位をつけたい。トランプは3組用意してあるので、3人ずつの3組が同時に並行して対戦できる。この問題は、対戦の組合せ表をどのようにつくればよいか、ということである。

1回の試合で2人と対戦するから、8人のすべてと対戦するには、各人は4回の試合をすればよい。何の考え

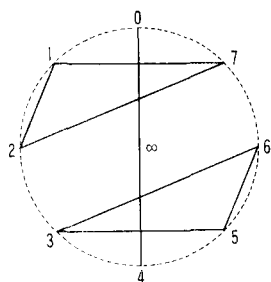


図 1.6

もなしに手探りで組合せても、望みの組合せ表は簡単にはつくれない。しかし、図 1.4 を参照すると、幾何学的な解法が得られる。まず、9 人の友だちを、

$\infty, 0, 1, 2, \dots, 7$

とし、1 回目の組合せを

図 1.6 のようにつくる。ここに半径または弦で結ばれた 3 人ずつが対戦する。そして、2 回目以降の対戦の組合せは、2 本の半径と 6 本の弦の相互の配置はそのままに保ちながら、その図形を反時計まわりに $1/8$ 周ずつ回転させてつくる。すると、4 回の回転で

1 回目： $\infty-0-4, 1-2-7, 3-5-6$

2 回目： $\infty-1-5, 2-3-0, 4-6-7$

3 回目： $\infty-2-6, 3-4-1, 5-7-0$

4 回目： $\infty-3-7, 4-5-2, 6-0-1$

の組合せが得られる。この組合せの特徴は、 ∞ を除く各数を、 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 7 \rightarrow (0 \text{ に戻る})$

と巡回的に変えれば、1 回目の組合せから他の回の組合せが得られることである。

この方法によって、どの人も、他のすべての人と 1 回ずつ対戦することは、つぎのように説明される。図 1.6 には、2 つの合同な三角形があるが、その一方について 3 辺をつくる 3 本の弦を見ると、それぞれ $1/8$ 周、 $2/8$ 周、 $3/8$ 周の弧に対する弦である。また、直径は $4/8$ 周に対する弦でもあり、もちろん中心を通る。よって、この図形を $1/8$ 周ずつ 4 回まわすと、中心および円周上の 8 個の点は、それぞれ 1 回ずつ他の点と結ばれる。つまり、図 1.6 による組合せのつくり方は、図 1.4 のつくり方と本質的には同じ考え方を利用している。

しかし、3 人ずつで試合するゲームに対し、人数を多くした場合の一般のリーグ戦の組合せ表をつくらうとすると、うえの幾何学的方法是適用できない。それどころか、どんな方法を用いても大変な難問なのである。こ

の問題は実は「Kirkman の問題」として知られる組合せ理論上の大問題であったが 1971 年にようやく解決された²⁾。

このためここでは 15 人に対する幾何学的な組合せ法だけを示そう。

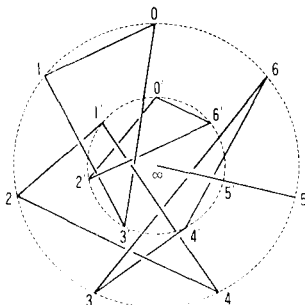


図 1.7

15 人が 3 人ずつにわかれて試合をする場合各人は 1 回に 2 人と対戦するから自分以外の 14 人と対戦するのに 7 回の試合が必要である。いま 15 人の中 7 人を男性として

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

と記し、7 人を女性として、

$0', 1', 2', 3', 4', 5', 6'$

と記す。また、残りの 1 人は特別あつかいとして、 ∞ の記号をあてる。そして、2 つの同心円を 7 等分して、1 回目の組合せを図 1.7 のようにつくる。すると、2 回目以降の対戦は、例によって、図形だけをそのままの形で $1/7$ 周ずつ 1 回転させて得られる。

この方法で望みの組合せが得られることは、ほとんど前と同じようにして、幾何学的に説明される。図 1.7 において、男性同士を結んでいる弦は、

0 と $1, 2$ と $4, 3$ と 6

の 3 本で、これらはそれぞれ $1/7$ 周、 $2/7$ 周、 $3/7$ 周の弧に対してつくられている。よって、 $1/7$ 周ずつ 7 回まわすと、どの 2 人の男性も 1 回だけ対戦する。同様に、女性同士を結んでいる弦は、

$0'$ と $6', 0'$ と $2', 2'$ と $6'$

で、やはり $1/7$ 周、 $2/7$ 周、 $3/7$ 周の弧に対してつくられている。最後に、男性と女性を結んでいる線分は、

5 と $5', 2$ と $1', 6$ と $4', 4$ と $1', 0$ と $3', 1$ と $3', 3$ と $4'$

の 7 本で、男性から女性を引いた数を (mod 7) でみると、うえの組合せに対応して、 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ となる。よって、 $1/7$ 周ずつ 1 回転すれば、男女 2 人のすべての対戦が 1 回ずつあらわれる。最後に、特別あつかいの ∞ は、 ∞ と $5, \infty$ と $5'$ によって、すべての男女と 1 回ずつ対戦する。これで、幾何学的な説明は完全であるが、それにしても図 1.7 はじつに巧妙につくられている³⁾。

つぎに、4 人ずつで試合をするマージャンのリーグ戦に移る。16 人が 4 人ずつにわかれて、それぞれマージャンの試合をする。そして、1 試合ごとにメンバーを組みかえて、どの人とも 1 回ずつ対戦するようにしたい。今度は 1 回に 3 人ずつと対戦するから、他の 15 人と対戦するには 5 回の試合を行えばよい。16 人を、

$\infty, 0, 1, 2, \dots, 14$

とし、1 回目の試合を図 1.8 のように組合せる。すると 2 回目以降の組合せは、例によって、中の図形を反時計まわりに $1/15$ 周ずつ回転すれば得られる。

この説明は、つぎのようになされる。図 1.8 には、3 つの合同な四角形と 3 本の半径がある。四角形の 1 つをとって、図 1.9(a) のように引くと、6 本の弦は、

1 と $2 : 1/15$ 周の離れ

2 と $4 : 2/15$ 周の離れ

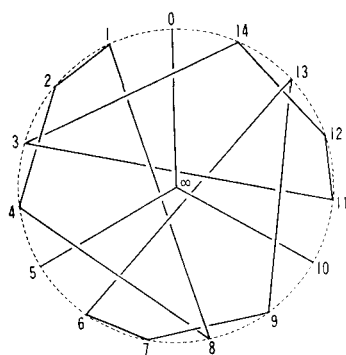


図 1.8

- 1 と 4 : 3/15 周の離れ
- 4 と 8 : 4/15 周の離れ
- 2 と 8 : 6/15 周の離れ
- 1 と 8 : 7/15 周の離れ

となつて、5/15 周の離れ以外は 1 回ずつあらわれる。ところが 3 本の半径だけをとつて図 1.9(b)をつくると、ちょうど 5/15 周の離れだけが補われている。よつて、反時計まわりに 1/15 周ずつ回転すれば、1/3 周までの 5 回の組合せが望みの結果を与える。

同じ幾何学的方法を用いると、25 人が 5 人ずつの 5 組にわかれて、各人 6 回の試合ですべての人と 1 回ずつ対戦する組合せや、49 人が 7 人ずつの 7 組にわかれて、各人 8 回の試合ですべての人と 1 回ずつ対戦する組合せがつくれる。そして、一般に p を任意の素数、 k を任意の正整数として、 $q = p^k$ とおくと、 q^2 人が q 人ずつの q 組にわかれて、どの人も他のすべての人と 1 回ずつ対戦するように、 $(q+1)$ 回の試合を組むことができる。参考のために、25 人が 5 人ずつの 5 組にわかれる場合を、例の幾何学的図形で結果だけ図 1.10 に示しておこう。

1.3 まえの 2 節に対する理論面からの補足

1.1 では、漏話のバブル化の問題として 1 つの組合せ

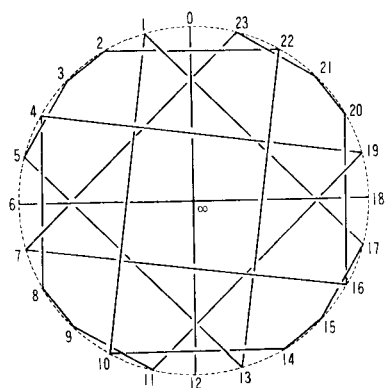
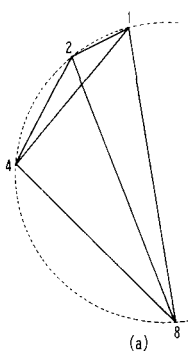
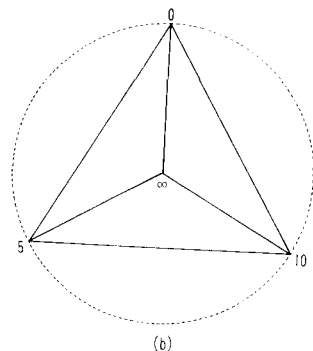


図 1.10



(a)



(b)

図 1.9

問題を提起し、また 1.2 では、それを単近なリーグ戦の組合せ問題におきなおして、一般化への導入を与えた。これらの組合せ問題の解法としては、直観的に理解しやすい幾何学的方法を採用したが、実は、これらを包含する組合せ理論の一分野が存在する。それは「ブロック計画」または「デザイン」とよばれるもので、これについては、のちの符号理論への応用のところで、若干の解説を行なう予定である。ここのリーグ戦の組合せは、分解可能な釣合い不完備型ブロック計画 (resolvable balanced incomplete block design; RBIBD) とよばれるもので、その具体的な組合せのつくり方に対する研究が最近でも盛んになされている⁴⁾。ブロック計画に興味をもたれる読者は、組合せ理論の標準的教科書⁵⁾か、この方面の専門書⁶⁾を読まれることをおすすめする。

参 考 文 献

- 1) Lucas, E., *Récréations Mathématiques*, II, Albert Blanchard, Paris, 1891.
- 2) Ray-Chaudhuri, D. K. and Wilson, R. M., "Solution of Kirkman's Schoolgirl Problem," in *Proc. of Symp. in Pure Math. Combinatorics*, *Am. Math. Soc.*, **19** (1971), 187-204.
- 3) Dörrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Pub., New York, 1965.
- 4) Ray-Chaudhuri, D. K. et al "The Existence of Resolvable Block Designs," in *A Survey of Combinatorial Theory*, ed. by Srivastava, J. N. et al., North-Holland, New York, 1973.
- 5) Hall, M., *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, 1967. (邦訳) 岩堀信子訳, 組合せ理論, 吉岡書店, 1971.
- 6) 永尾汎, 群とデザイン, 岩波書店, 1974.
(なかむら・ぎさく 信州大学工学部情報工学科)