特集　数理計画法

整数計画はなぜむずかしい？

茨 木 俊 秀

ＩＰは万能ではない

整数計画法(Integer Programming，以下ＩＰと略す)の最初の組織的な解法がGomoryによって提案されてから[6]はやくも20年近くたった．当初，ほとんどの組合せ最適化問題がＩＰに定式化できることが喧伝され，また，Gomoryの切除平面法のエレガントさからくるアルゴリズム面での楽観もあって，ＩＰは万能薬かのようにもてはやされたものである．しかし，具体的な適用例が増えるにしたがって，その計算効率の悪さが認識され，ばら色の時期はすぐ終わりをつげた．その後，ＩＰ解法の主流は切除平面法から分枝限定法に移り，現在では商用パッケージもいろいろ開発され使いやすくなったが，計算効率の面では依然本質的な解決をみていない(各種解法の詳細はたとえば(8)参照)．それどころか，ＩＰが線形計画法(ＬＰ)のように大規模な問題にも自由に適用される時代は，今後ともあり得ないとする悲観論が支配的である．

ここでは，ＩＰのむずかしさとその限界を，これまでに得られている理論的成果に立って述べ，ＩＰに何を期待できるか，その限界は，またどのように使うべきかを考えてみよう．

ＩＰ問題はそもそも可解か

以下では，つぎの全ＩＰ問題に話を限定する．

$$
\begin{aligned}
P:\ &\text{目標関数} \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \text{最大}\\
&\text{拘束条件} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i=1,2,\cdots,m\\
&\qquad\qquad\quad x_j:\text{非負整数},\ j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

ただし，c_j，a_{ij}，b_i はすべて整数である．

ＩＰの“むずかしさ”を論ずるとき，第一にＩＰ問題は可解だろうかという疑問に答えなければならない．ある問題(のクラス)が可解(Solvable)であるとは，そのクラスに属する任意の問題に対し，常に有限回のステップ数で解答を与える計算手順(コンピュータのプログラムを想定するとよい)が存在することである．そのような計算手順をアルゴリズムという．すなわち，n，m，c_j，a_{ij}，b_i で定められる任意のＩＰ問題 P に対し，常にその最適解（存在すれば）を与えるか，その非存在(発散する場合も含む)を示してくれるようなアルゴリズムの存在を問うているわけである．

この設問に対し，ＩＰの知識をおもちの読者は，Gomoryの切除平面法の証明には有限回のピボットで停止すると示されているから，切除平面法はアルゴリズムである，すなわちＩＰ問題は可解であると結論されるかもしれない．あるいはもっと単純に，すべての整数解を列挙しその中で最適なものを選べばよいから，計算効率はともかく，可解であることは自明であるとする人もあろう．しかし切除平面法の証明をくわしくみると，その中に「Pは許容解をもち，しかも発散しない」という仮定がある．実際Pが許容解をもたないとき，

停止しない例が構成されている[4]．また，後者の考え方にも，各変数 x_j の上，下界があらかじめ与えられていないならば，無限個の整数解を列挙しなければならないという穴がある．ちなみに，現在使われている分枝限定法による解法は，x_j の上，下界が与えられていることを前提としており，そうでない場合に停止する保証はない．このように，むずかしさの最上限を問題にする可能性にかぎっても，決して自明ではないことがわかる．

可解でない例：不定方程式

ＩＰ問題が可解かどうか結論を述べる前に，可解でない例に言及しよう．あとの議論とのつづき具合を考え，有名なヒルベルトの第10番目の問題を説明する．これは任意に与えられた多変数整係数多項式による方程式，

$$P(y_1, y_2, \cdots, y_N)=0$$

（このような方程式を不定方程式あるいは Diophantos 方程式という）が整数解をもつかどうか判定するものである．著名な数学者ヒルベルトが20世紀初頭に提示したいくつかの未解決問題の中で，この問題に関してのみは解法の存在を問うていた点で特異であった．この問題は，1970年になってようやくソ連の数学者 Matiyasevic によって可解ではないことが証明された[14]（(3)に歴史的事項も含めた紹介がある）．この結果を使うと，ＩＰ問題Pにきわめて近い非線形ＩＰ問題の非可解性がみちびかれる．

可解でない例：非線形ＩＰ問題

上の（線形）ＩＰ問題Pの拘束条件に，さらにつぎのタイプも許す場合を考えよう．

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^2 \leq b_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

この問題の非可解性を証明するには，与えられた任意の不定方程式 $P_a(y_1, y_2, \cdots, y_N)=0$ に対し，非線形ＩＰ問題Q_aをつくり，Q_aの最適解の値がある値をとるとき，かつそのときにかぎり $P_a=0$ が整数解をもつようにすればよい．そうすれば，Q_aを解くことによって，$P_a=0$ の整数解の存在が判定できるが，後者は可解ではないから前者も可解ではないことが結論される．

上の性質をもつQ_aはつぎのように構成される．

Q_a：目標関数　$-y_{N+1} \rightarrow$ 最大

拘束条件　$(1-y_{N+1})P_a(y_1, \cdots, y_N)=0$

y_j：整数，$j=1,2,\cdots,N$

$y_{N+1}=0$ or 1

明らかに，$P_a(y_1, \cdots, y_N)=0$ が整数解をもつとき，かつそのときにかぎり最適値は０になる．上の Q_a はまだ標準的な形をしていないので，拘束条件をつぎのように書きなおす．$(1-y_{N+1})P_a(y_1, \cdots, y_N)$ を展開し，多項式 $R_a(y_1, \cdots, y_{N+1})$ をつくる．つぎに，R_a の各項を v_k とおき，

$$R_a(y_1, \cdots, y_{N+1})=v_1+v_2+\cdots+v_M$$

と書く．各 v_k はたとえば，

$$v_k=3y_1y_7^2y_{13}y_{19}$$

のように書かれるであろう．この関係は，

$$w_{1k}=y_{13}y_{19}$$
$$w_{2k}=y_7w_{1k}$$
$$w_{3k}=y_7w_{2k}$$
$$w_{4k}=3y_1w_{3k}$$

と分解すれば，２次式にまでおとせる．各交差項 $w=w_iw_j$ はさらに，

$$w=\frac{1}{2}(w_s^2-w_i^2-w_j^2),\quad w_s=w_i+w_j$$

と書けるから，結局，非線形項は w^2 のタイプのみである．最後に，等式は２個の逆向きの不等式であらわせるから問題はない．（証明終り）

しかしＩＰ問題は可解である

このように考えてくると，ＩＰ問題に対して可解，非可解のどちらの結論が出ても不自然ではないであろう．しかし，ＩＰ問題は可解である．この結果は，実は，ＩＰがさわがれるずっと以前，1929年に Presburger によって証明されている．コンピュータが製作される前にその理論的限界を示す可解性の概念が確立されていた事実，あるいはこの Presburger の結果などをみると，数学者のするどい洞察力に驚嘆せざるを得ない．Presburger の結果については第5回シンポジウム予稿

集「数理計画法」に紹介してある．

大きな有限は無限と同じ

ＩＰ問題の可解性を示しても，理論的にはともかく，実用性の観点からは十分ではない．組合せ問題をあつかうとき，$n!$，2^n など有限ではあるが，すぐに手に負えないほど大きくなってしまう例によく出会う．このような大きな有限は，現実にあつかえないという意味で無限と同じである．ＩＰ問題がむずかしいといわれるのは，まさにこの点にあって，単に有限ステップで解けるか，無限ステップ要するかの問題ではない．

可解な問題を，所要ステップ数でさらに分類しようという試みが，計算の複雑さ（Complexity）という名前のもとに統一的に研究されるようになったのは比較的最近である．しかし実用からの要請もあって，この分野は現在もっともアクティブな領域の１つになっている．その成果の１つとして多項式オーダーのステップ数 $0(n^k)$*(k：定数，n：問題の規模）で解ける問題のクラスと，そうでないもっとむずかしい問題のクラスがかなり明らかにされている．この目的に，本質的な役割を果たしているのがＮＰ完全性の概念である．

ＩＰ問題に関しても，分枝限定法に対する Jeroslow と Galil の結果[11),5)]や，切除平面法に要するピボット回数が，変数の個数 n の指数オーダーになるとの経験的な事実から，多項式オーダーで解けるクラスには入らないと予想されていたがはたしてＩＰ問題がＮＰ完全であることが示されるにいたり，その事実が理論的に根拠づけられたのである．

（脚注＊　$0(f(n))$ は $f(n)$ の定数倍 $cf(n)$ で上から押えられていることを示す．）

ＮＰ完全性：むずかしいことの証明

ＮＰ完全性(Nondeterministic Polynomial Complete)の概念は，ある問題のクラスが可解であっても，多項式オーダーの計算手間では解けないむずかしいものであることを示すために用いられる．まだ５年程度しか経ていない新しい概念であるが，グラフ・ネットワーク，スケジューリング，有限幾何，数値解析，オートマトン・言語理論など広範な分野において，従来からむずかしいとされていた多くの問題に，そのむずかしさの根拠を与える意味で大きな成功を収めている．ＮＰ完全性は Cook の結果[2)]をもとに Karp が広めたが[12)]最初は Polynomial Complete などともよばれていた．ＮＰ完全という名称に統一されたのは，Knuth の提言による．Knuth は彼の著作 Art of Computer Programming の Vol.4 にこの種の話題を含めるため，膨大な資料を準備中とのことである．

非決定性計算とクラス *NP*

ＮＰ完全の意味を説明するため，最初に，通常のアセンブリ言語程度のものに，つぎの仮想的な命令が追加されたコンピュータ言語を想定しよう．

$$\mathrm{CHOICE}(L_1, L_2, \cdots, L_k)$$

コンピュータはこの命令を読むと，ラベル L_1，L_2，…，L_k をもつ k 個の命令にジャンプし，それらを同時に実行する．並列計算の１つのモデルともみなせるが，CHOICE 命令につぎつぎに会うと，同時に実行される計算パスはいくらでも拡大していく．また，各パスに沿う計算は他のパスとは独立になされる．このような計算を非決定性計算(Nondeterministic Computation)という．

ここで，簡単のため，解くべき問題は１次元の系列に書かれたデータ x を受理するかどうかの形式であるとする．たとえば，グラフがハミルトン閉路をもつかどうかを決定する問題では，考えるべきグラフ G を１次元に書いて(たとえば，節点集合，枝集合を１列に並べる)，それを $x(G)$ とするとき，G がハミルトン閉路をもてば $x(G)$ を受理し，もたなければ受理しないわけである．

なお，非決定性計算では，いくつものパスに沿って計算が進行するが，そのうち１本でも x を受理するパスがあれば全体としても x を受理し，どのパスも受理しなければ，全体としても受理しな

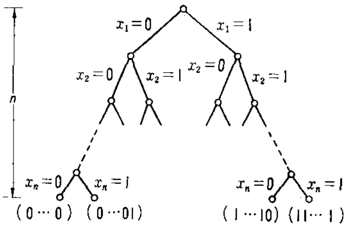

図 1　非決定性計算の例；0-1問題

い．このとき，xが受理されるならば，かならず多項式オーダー$0(n^k)$(ただし，nはxの長さ)で結論できるならば，その問題はクラスNPに属すという．

非決定性計算の例として，n変数0-1問題Pを考えよう．(前記のＩＰ問題Pにさらに$x_j=0$ or 1という条件を加えたもの．)

Pが許容解をもつか否かは，図1のようにn次元0-1ベクトルをすべて列挙すれば判定できる．Pにある値以上の目標関数値をもつ許容解が存在するかという問に対しても同様である．このとき，非決定性計算では，各節点から2方向への分枝にCHOICE命令を用いて，両方向の計算を同時に実行できる．つまり，2^n個の0-1ベクトルを列挙するのに$0(n)$ステップでよいわけである．よって，0-1問題に関する上の問題はNPのクラスに属することがわかる．

以上の議論から，クラスNPは，列挙法で解けるほとんどの問題を含む，きわめて強力なクラスであるといえる．逆にいえば，NPに属するすべての問題が，通常のコンピュータの多項式オーダーの計算で解けるとは想像もできないであろう．

ＮＰ完全性の定義

問題AとBを考え(たとえば，ＩＰ問題Aとハミルトン閉路問題B)，Aの任意の入力データwを，(通常の計算の)多項式オーダーの手間で，Bのある入力データvに変換でき，しかもwが受理されるとき，かつそのときにかぎりvが受理されるならば，AはBに(多項式的に)変換可能であるという．このとき，Bを解くアルゴリズムを用いてAを解くこともできるから，簡単にいえば，BのむずかしさはA以上である．とくに$B\in NP$ならば$A\in NP$が結論できる．

ここで，NPに属す任意の問題が，NPのある問題Cに変換可能であるとき，CをＮＰ完全であると定義しよう．換言すれば，CはNPの中でもっともむずかしい問題である．したがって，ある問題がＮＰ完全であることを示せば，通常の計算の多項式オーダーの手間では解けないようなむずかしいものであることを意味する(厳密な証明は，実はまだなされていない．この分野の最大の未解決問題である)．

ＮＰ完全であることが証明された最初の例は充足可能性問題である．これは和積標準形のブール式が充足可能かどうかを判定する問題である．たとえば，$(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\wedge(\bar{x}_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2)$(ただし，$\bar{x}_k$は$x_k$の否定)は$x_1=x_2=x_3=1$なる割当で1となるから充足可能，$(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\wedge x_2\wedge x_3$ はいかなる割当に対しても1とならず，充足可能ではない．(くわしくは(1)(2)参照)

ＮＰ完全であることがわかっている問題Cが1つでも得られると，あとはCが$A\in NP$に変換可能であることを示せばAのＮＰ完全性が証明できる．この方法によって，その後，多くのＮＰ完全な問題が見いだされている．

ＩＰ問題はＮＰ完全である

ＩＰ問題のＮＰ完全性を示す第1段階は，NPに属することの証明である．0-1問題の場合には上に述べたように，この部分は自明であるが，一般のＩＰ問題についてはそうではない．全変数の上下界が与えられていないかぎり，すべての解ベクトルを列挙するという方法は適用できないからである．しかし，Presburgerのアルゴリズムは，$P\in NP$の証明にもなっている(この事実が正式に指摘されたことはまだないようであるが)．

つぎに，適当なＮＰ完全問題がＩＰ問題に変換可能であることを示せば，証明の第2段階が終了する．ここでは，上の充足可能性問題を変換してみよう．

和積標準形のブール式は一般につぎのように書ける.

$$H=H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_p$$

$$H_k=(y_{k1}\vee y_{k2}\vee\cdots\vee y_{klk}),\ k=1,2,\cdots,p$$

ただし，各 y_{kl} は x_j あるいは $\bar{x}_j$ である．ここで，各和項 H_k に 0-1 変数 w_k を導入し，不等式

$$w_k\leq x(y_{k1})+x(y_{k2})+\cdots+x(y_{klk}),\quad k=1,2,\cdots,p \quad (1)$$

をつくろう．$x(y_{kl})$は $y_{kl}=x_j$ のとき x_j，$y_{kl}=\bar{x}_j$ のとき $1-x_j$ を意味する(x_j は 0-1 変数)．(1)式では，$y_{k1},\cdots,y_{klk}$ の 1 つでも 1 ならば $w_k=1$ とできるが，すべてが 0 ならば，$w_k=0$ となる．この性質を利用して，充足可能性問題をつぎのＩＰ問題に変換できる.

目標関数　$z=w_1+w_2+\cdots+w_p\rightarrow$ 最大

拘束条件　(1)式

$$w_k=0 \text{ or } 1,\ k=1,2,\cdots,p$$

$$x_j=0 \text{ or } 1,\ j=1,2,\cdots,n$$

容易にわかるように，最適値が p のときかつそのときにかぎり H は充足可能である.

したがって，ＩＰ問題はＮＰ完全である.

ＮＰ完全性のもつ意味

ＮＰ完全であることが証明されている問題は数多いが，その中には従来からむずかしいとされていた行商人問題，ハミルトン閉路の問題，最大クリーク問題，最大カット問題，グラフの彩色数，スタイナー木問題，２次割当問題，ジョブショップ問題，１次元配置問題などが含まれている．ＮＰ完全な問題が，(通常の計算の)多項式オーダーでは解けないことの厳密な証明は得られていないが，ＮＰ完全な問題の１つでも多項式オーダーで解けるなら，上のような難問がすべて多項式オーダーで解けることになる．これは，ほとんどあり得ない結論であろう.

結局，ＩＰ問題がＮＰ完全であることは，そのすべてを n の多項式オーダーのステップ数で解くことはできず，どのようなアルゴリズムを用いても，n の指数オーダーの計算手間を要する場合があることを覚悟しなければならない．これは，比較的小規模なＩＰ問題でも，非常に長時間の計算を要する場合があるという経験的事実を，理論的に裏づけるものである.

ＮＰ完全な問題を多くリストしている文献に，(12)(17)などがある．この分野で精力的に研究しているベル研究所のグループ，Garey, Johnson, Grahamらが，完全なリストを出版するために，もっか広く資料を集めているとのニュースもある．スケジューリング問題については，オランダの Lenstra, Lawler, Rinnooy Kan, Lagweg らが，現時点でのほぼ完ぺきなリストを出している[13].

それではどうする

以上の議論で，ＩＰ問題は本質的にむずかしいことがわかったが，だからといって，ＩＰは役に立たないと結論されては困る．ＮＰ完全性の本質は，むずかしい問題はたとえＩＰという衣装をまとってもやはりむずかしいという，あたり前の性質を理論的にきちっと述べたにすぎない．やさしい問題もむずかしい問題もすべて統一的に定式化できるＩＰが，いつも簡単に解けるとはかぎらないのは，その意味からいえば，きわめて当然であろう.

ＩＰの最大の利点はその汎用性にある．つまり，ＩＰのアルゴリズムを準備しておけば，広範囲の組合せ最適化問題をＩＰ問題として解くことができる．個々の問題に対し独自のアルゴリズムを開発すれば，計算効率の点からはすぐれているであろうが，プログラムに要する人×時間を考えれば，かならずしも得策ではない．ＩＰのもつこの利点は，計算効率とは別の尺度で評価すべきであろう.

ＮＰ完全性の意味を理解する上で重要なのは，それが最悪の場合多項式オーダーでは解けないと述べているにすぎないことである．現実に生起するほとんどの場合は簡単に解けるという可能性を

否定するものではない．つまりアルゴリズムの平均的なふるまいに関しては何も述べていないのである．この意味で，ＮＰ完全な問題の中でもやさしいものとむずかしいものがあることが指摘されている．

たとえば，最小被覆問題，最大パッキング問題，ナップザック問題などは，ＮＰ完全ではあるが平均的な意味で十分解けるとみなしてよさそうである．一方，２次割当問題，ジョブショップ問題などは平均的な意味でもむずかしいとされている．前者のやさしい問題に対しては，ＩＰとして解いても実用的に十分な結果が得られているようである．

結局，個々の問題にはそれ自身の本質的なむずかしさが定まっており，どのようなアルゴリズムを用いてもその壁を打ち破ることはできない．だから，ＩＰに望み得る最終的な目標は，ＩＰという標準的な形式をとおしても，個々の問題の難度を増加させることがなく，必要最小限の計算量でその問題を解ける，ということであろう．ＩＰの今後の進歩をまてば，この目標はかなり達成されるのではないかと筆者は楽観視している．ＩＰのユーザーは，個々の解くべき問題がもつ固有の難度を十分見きわめ，それに見合う計算量を予想してプランニングすることが大切であろう．

平均的な意味でも手に負えないようなむずかしい問題をあつかうとき，あるいはそうでなくても計算時間を短縮する目的に，近似最適解で満足する場合がある．実用的には，多くの場合近似最適解で十分と思われるから，この方向はきわめて重要であろう．近似最適解を求めるＩＰアルゴリズムもぼちぼち開発されており[7),10),16)]，今後の発展も期待されている．

個々の具体的な問題に対する近似解法も，非常に活発に研究されており，ここ数年の成果には目を見張るものがある．各種近似解法による近似解の精度の評価，与えられた精度をもつ（多項式オーダーの）近似解法の開発などの文献数は急激に増えている．その結果，近似解法の立場からも，むずかしい問題とやさしい問題の区別がなされつつある．たとえば，行商人問題では，最適値からのずれε％以内の近似最適解を求める問題自体がＮＰ完全である．（なお，この系として，一般のＩＰ問題に対して，最適値からのずれをかならずε％以内に収めるような多項式オーダーのアルゴリズムは存在しないことがみちびかれる．）

ＩＰのユーザーの立場からは，近似最適解を求める場合も，個々の問題に対してそれぞれプログラムしなくてもＩＰの近似解法を用いることができ，しかも，近似解の精度と所要計算時間の両観点から劣らないというのが理想である．

ＩＰの近似解法の現状は，この意味では，決して満足できる状態にはないが，今後この分野の研究の重要性が認識されれば，大きな進歩も期待できよう．

ＩＰの定式化能力について

これまでの議論で，何度もＩＰの高い定式化能力に言及したが，これは理論的にも示されている．現実に出てくる組合せ最適化問題の多くは，その許容領域が有限集合であるが，このような場合は，かならずＩＰに定式化できることがわかっている．しかし，許容領域が無限集合のときは，ＩＰに定式化できる場合とそうでない場合がある．たとえば，非線形の目標関数をもつＩＰ問題を，許容領域が無限集合の場合，通常のＩＰ問題に定式化することはできない(以上の結果は(9)(15)にある．筆者の論文(９)とほぼ同じ時期に，ほぼ同じ結果が Meyers[15)]によって得られていたのは驚きである)．

さて，ＩＰに定式化できる問題とそうでない問題があるならば，定式化を可能にする本質は何か．これは，まだあまり手のつけられていない分野である．ただし適当な枠組みのもとで，ある問題がＩＰに定式化可能かどうかを決定する問題は可解でないことが示されている[1)]．（ヒルベルトの

問題に帰着して証明される.)

以上述べたように，ＩＰの前途にはまだまだ困難が横たわっており，また，理論的限界もかなりはっきりしてきた．しかし，その定式化能力の高さにおいて，組合せ最適化問題の標準的解法として他にはみられない長所をもっている．ＩＰの研究者の１人として，ＩＰがその汎用性を生かして，今後さらに繁用されることを望むものである．

最後に，京都大学三根久教授および長谷川利治教授に種々ご助言いただいたことを申し添え謝意を示したい．

参考文献

1) Aho, A. V., Hopcroft, J. E., and Ullman, J. D., The design and analysis of computer algorithms, Addison-Wesley, Reading Mass., 1974.

2) Cook, S. A., The complexity of theorem-proving procedure, Proc. 3rd Annual ACM Symp. Theory of Computing, 151-158, 1971.

3) Davis, M., Hilbert's tenth problem is unsolvable, The American Mathematical Monthly, **80**, 233-269, 1973.

4) Finkelstein, J. J., Purely integer algorithm of Gomory, Systems Theory Research(Translation of Problemy Kibernetiki), ed., A. A. Lyapunov. **21**, 1971.

5) Galil, Z., The complexity of resolution procedures for theorem proving in the propositional calculus, Technical Rept. 75-239, Dept. of Computer Science, Cornell Univ. 1975.

6) Gomory, R. E., Outline of an algorithm for integer soluions to linear programs, Bull. American Math. Society, **64**, 275-278, 1958.

7) Hillier, F. S., Efficient heuristic procedures for integer linear programming with an interior, Oparations Research, **17**, 600-637, 1969.

8) 茨木俊秀，整数計画法１～5，オペレーションズリサーチ，1970年９月～1971年１月連載.

9) Ibaraki, T., Integer programming formulation of combinatorial optimization problems, Discrete Mathematics, **16**, 39-52, 1976.

10) Ibaraki, T., Ohashi, T., and Mine, H., A heuristic algorithm for mixed-integer programming prob. Math. Programming Study 2, 115-136, 1974.

11) Jeroslow, R. G., Trivial integer programs unsolvable by branch-and-bound, Math. Programming, **6**, 105-109, 1974.

12) Karp, R. M., Reducibility among combinatorial problems, in Complexity of Computer Computations, eds. Miller, R. E., and Thatcher, J. W., Plenum Press, 85-103, 1972.

13) Lagweg, B. J., Lawler, E. L., Lenstra, J. K., and Rinnooy Kan, A. H. G., Machine scheduling problems:Computations, complexity and classification, Dept. of Operations Research Rept. BN 30/76, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1976.

14) Matiyasevic, Y., Enumerable sets are Diophantine(Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR. **191**, 279-282, 1970.

15) Meyer, R. R., Integer and mixed-integer programming models : General properties, J. of Optimization Theory and Applications, **16**, 191-206, 1975.

16) Senju, S., and Toyoda, Y., An approach to linear programming with 0-1 variables, Management Science, **15**, B196-B207, 1968.

17) 白川 功，組合せ問題における計算複雑度解析，システムと制御，**20**，395-404，1976.

いばらき・としひで　1940年生
京都大学工学部