特集　数理計画法

多目的システムにおける意思決定と最適化

志 水 清 孝

1. 多目的システム

複数の評価基準，多数の実行目的，あるいは2人以上の決定者が存在する場合には，ベクトル目的関数(または評価基準)を考えねばならない．ベクトル目的関数をもついわゆる多目的システムにおける決定問題にはつぎの3通りの状況がある．

1. 互いに独立な複数の目的関数が存在するが，決定変数ベクトル(または決定者たち)が一致協力してPareto最適解(非劣解)の集合を求める場合．

2. 究極的には1つの抽象的な目的が存在するが，それを評価するために多くの目的関数，多くの評価基準が与えられる場合．

3. 複数の決定者(プレヤー)が非協力ゲームを演じ，Nash均衡解の集合を求める場合．

多目的システムにおける意思決定あるいは最適化は，1つの最終目的を達成するためにいくつかの下位目的関数が存在する場合を想定している．

この小論では，多目的システムにおける解の選好関係や，Pareto最適性，多目的計画法，決定者の選好最適解を求める計算方法などを解説する．

選好関係　代替案の集合をX，その目的空間(評価空間)への写像を$f: X \to Z$であらわす．決定者の代替案に対する選好をPであらわし，目的(評価基準)の各レベルに対する決定者の選好を$<$であらわし，つぎのように表現する．

$$x^1 P x^2, x^1, x^2 \in X \Leftrightarrow z^1 < z^2, z^i = f(x^i), i=1,2 \quad (1)$$

ここで$z^1 < z^2$は“z^1はz^2よりすぐれている”を意味する．

一般にZを任意集合とするとき，Zの要素間の選好をあらわす2項関係を選好関係といい，つぎのように定義する．

$(Z, <)$は強選好関係$\Leftrightarrow$$<$は$Z$の要素間に順位をきめる

($x < y$は“xはyよりすぐれる”を意味する)

$(Z, \sim)$は無差別関係$\Leftrightarrow$$Z$の要素間に選好上差がない

($x \sim y$は“xとyは選好上差がない”を意味する)

$(Z, \lesssim)$は選好関係$\Leftrightarrow$強選好$(Z, <)$と無差別$(Z, \sim)$の和集合

($x \lesssim y$は“xはyより劣ってはいない”を意味する)

順序関係　$x, y, z \in Z$に関して定義される2項関係$\lesssim$に対してつぎの性質を定義する．

(i) 反射的：$\forall x \in Z,\ x \lesssim x$

(ii) 推移的：$x \lesssim y\ \&\ y \lesssim z \Rightarrow x \lesssim z$

(iii) 反対称的：$x \lesssim y\ \&\ y \lesssim x \Rightarrow x = y$

(iv) 連結的：$\forall x, y \in Z,\ x \lesssim y$ or $y \lesssim x$

このとき，つぎの4つの用語を定義する．

半予順序(partial preordering) (i), (ii)が成立	弱順序(complete preordering) (i), (ii), (iv)が成立
半順序(partial ordering) (i)(ii), (iii)が成立	全順序(complete ordering) (i)～(iv)が成立

以下では代替案の評価基準が p 項組 $\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_p)$ となっている場合を考える．$(Z,\precsim)$ は集合 Z 上の選好関係をあらわし，任意の $\boldsymbol{z}^1,\boldsymbol{z}^2\in Z$ に対して，$\boldsymbol{z}^1\precsim\boldsymbol{z}^2$ は“$\boldsymbol{z}^1$ は $\boldsymbol{z}^2$ より劣ってはいない”を意味する．$(Z_i,\precsim_i)$ は第 i 評価基準における選好関係をあらわす．

多次元評価決定問題　$\boldsymbol{z}\in Z$ は評価基準ごとの選好関係 $(Z_i,\precsim_i)$，$i=1,\cdots,p$ をもっている．このとき，もっとも選好される $\boldsymbol{z}^0$ をきめること，つまり成分ごとの選好関係 $(Z_i,\precsim_i)$，$i=1,\cdots,p$ から $(Z,\precsim)$ をどのようにして同定するかを多次元評価決定問題とよぶ．

Pareto 最適性　$(Z_i,\precsim_i)$，$i=1,\cdots,p$ から $(Z,\precsim)$ を構成するとき，もっとも自然な関係は，

$$z_i{}^1\precsim_i z_i{}^2 \text{ for all } i\Rightarrow \boldsymbol{z}^1\precsim\boldsymbol{z}^2 \tag{2}$$

以下では z_i 自体が成分効用関数で $\boldsymbol{z}$ を p 次元ベクトルと考える．それゆえ (2) 式はベクトル $\boldsymbol{z}$ の成分ごとの最小化である．Pareto 最適点 (非劣点) は以下のように定義される．

$\hat{\boldsymbol{z}}$ は Pareto 最適点(非劣点)⇔すべての $i\in I=\{1,\cdots,p\}$ に対して $z_i\leqq\hat{z}_i$ でかつ少なくとも 1 つの $i\in I$ に対して $z_i<\hat{z}_i$ となるような $\boldsymbol{z}\in Z$ は存在しない．

最小ベクトルと極小ベクトル　以下ベクトル空間で考える．記号をつぎのように定義する ($\leqq$ と $\leq$ の違いはこの小論では重要である)．

$$\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_i\leqq b_i,\ \forall i\in I=\{1,\cdots,n\}$$

$$\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_i\leqq b_i,\ \forall i\in I\ \&\ \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_i<b_i,\ \forall i\in I$$

$\boldsymbol{z}$ が p 次元ベクトル $(z_1,\cdots,z_p)$ で $\precsim$ が $\leq$ かくで定義されるとき，つぎのように定義する．

$\boldsymbol{z}^0$ は Z の最小ベクトル⇔$\forall\boldsymbol{z}\in Z,\ \boldsymbol{z}^0\leqq\boldsymbol{z}$

$\hat{\boldsymbol{z}}$ は Z の極小ベクトル⇔$\nexists\boldsymbol{z}\in Z$ such that $\boldsymbol{z}\leq\hat{\boldsymbol{z}}$

$\hat{\boldsymbol{z}}$ は Z の弱極小ベクトル⇔$\nexists\boldsymbol{z}\in Z$ such that $\boldsymbol{z}<\hat{\boldsymbol{z}}$

効用関数　選好関係 $(Z,\precsim)$ に対して，関数 $u:Z\rightarrow R^1$ が次式を満たすとき，Z 上の $\precsim$ に関する順序保存の効用関数という．

$$\forall x,y\in Z,\ x\precsim y\Leftrightarrow u(x)\leqq u(y)$$

$$x\sim y\Leftrightarrow u(x)=u(y)$$

$$x\prec y\Leftrightarrow u(x)<u(y)$$

このような関数は序数順序であり，唯一ではない．任意の強意増加関数 F は Z 上の $\precsim$ に対して別の効用関数 $U(\cdot)=F(u(\cdot))$ を与える．

定理 1　$(Z,\precsim)$ が弱順序で同値類の集合 $Z/\sim$ が順序稠密な可算部分集合をもつとき，かつそのときにかぎり効用関数 $u(\cdot)$ が存在する．(くわしくは文献1), 5)を参照)

多次元効用関数決定問題　評価基準が p 項組 $\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_p)$ で与えられ，$(Z_i,\precsim_i)$，$i=1,\cdots,p$ ごとに成分効用関数 $u_i:Z_i\rightarrow R^1$ が存在するとき†，多次元効用関数 $(u_1(z_1),\cdots,u_p(z_p))$ から $(Z,\precsim)$ に対応した効用関数 $u(\boldsymbol{z})$ を構成する問題を多次元効用関数決定問題とよぶ．

2. 多目的計画法

多目的計画問題と Pareto 最適解　p 個の目的関数 $f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})$ と許容解の制約集合 X が与えられ，ベクトル目的関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を最小化する問題を多目的計画問題とよぶ．これは形式的にベクトル最小化問題としてつぎのように書ける．

$$\min_{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ f_p(\boldsymbol{x})\end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{x}\in X=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n \,\middle|\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}g_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ g_m(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\leqq\boldsymbol{0}\right\}$$

このとき Pareto 最適性はつぎのようになる(図 1)．

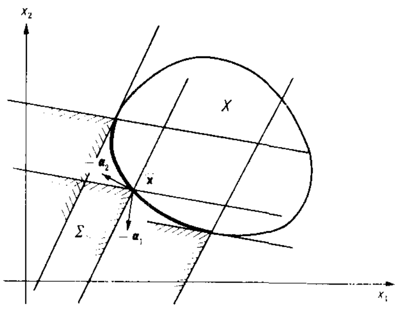
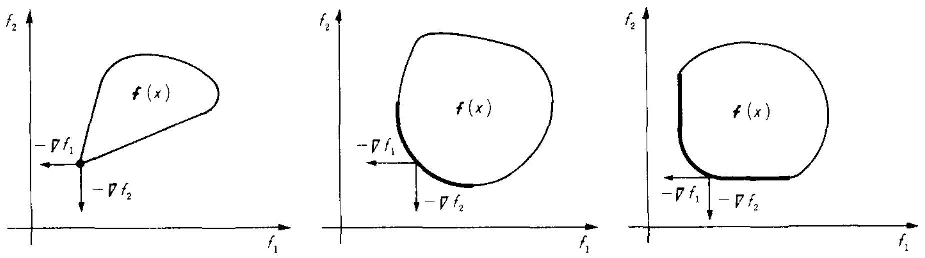


図 1　Pareto 最適解の集合

脚注†　これは 1 次元評価なので，成分評価基準ごとの弱順序関係はあまり一般性を失うことなく仮定できる．



(a) 完全最適解　(b) Pareto 最適解　(c) 弱 Pareto 最適解

図 2 各 種 の 解

$\hat{x}$は Pareto 最適性を満たす$\Leftrightarrow \forall i \in I$に対して$f_i(\boldsymbol{x}) \leqq f_i(\hat{\boldsymbol{x}})$でかつ少なくも 1 つの i に対して$f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\hat{\boldsymbol{x}})$となるような$\boldsymbol{x} \in X$は存在しない.

多目的計画 (3) に関してつぎのような解を定義する(図 1).

$\boldsymbol{x}^0$ は完全最適解$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) \leqq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. つまり,

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$が$X$の像$\boldsymbol{f}(X)$の最小ベクトルである.

$\hat{\boldsymbol{x}}$ は Pareto 最適解 (非劣解)$\Leftrightarrow \nexists \boldsymbol{x} \in X$ such that $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$

これは $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$が $\boldsymbol{f}(X)$の極小ベクトルであることである.

$\hat{\boldsymbol{x}}$ は弱 Pareto 最適解(弱非劣解)

$\Leftrightarrow \nexists \boldsymbol{x} \in X$ such that $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$

これは $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$ が 弱極小ベクトルであることである.

[注意]スカラ目的関数のとき, つぎの(i)(ii)は等しい.

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in X$, $f(\boldsymbol{x}^0) \leqq f(\boldsymbol{x})$

(ii) $\nexists \boldsymbol{x} \in X$ such that $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0)$

ベクトル目的関数のとき, つぎの(i)(ii)は同じではない.

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

(ii) $\nexists \boldsymbol{x} \in X$ such that $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$ and $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$

多目的計画法の諸定理を以下に要約しておく. 証明そのほかのくわしい説明は文献 10) を参照されたい.

Pareto 最適解の必要・十分条件と幾何学的性質

定理 2 多目的計画 (3) において, Kuhn-Tucker 制約想定は満たされるとする. このとき $\hat{\boldsymbol{x}}$ が弱 Pareto 最適解であるための必要条件は,

(i) $\nabla_x L(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \boldsymbol{0}$

(ii) $\nabla_\lambda L(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \leqq \boldsymbol{0}$, $\nabla_\lambda L(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})\hat{\boldsymbol{\lambda}} = 0$

(iii) $\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \boldsymbol{0}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \geqq \boldsymbol{0}$

を満たす$\hat{\boldsymbol{\mu}} \in R^p$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in R^m$が存在することである. ただし,

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$$

条件(i)は$\nabla f_i(\hat{\boldsymbol{x}}), i=1, \cdots, p$ の半正線形結合$\boldsymbol{\mu}^T \nabla \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})$ $(\hat{\boldsymbol{\mu}} \geq \boldsymbol{0})$ が 活性な 制約式の負方向の 法線ベクトル$-\nabla g_i(\hat{\boldsymbol{x}})$ $(i \in I_a)$ によって形成される錐体の内部にあることを示している(図 3).

定理 3 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ が凸関数のとき定理 2 の条件は弱 Pareto 最適解の十分条件である.

Pareto 最適解であれば弱 Pareto 最適解である

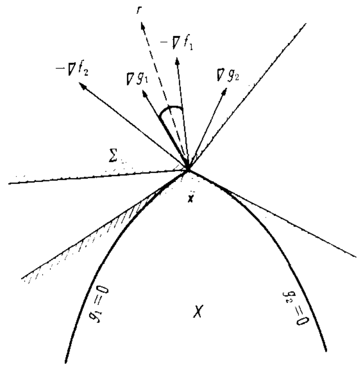


図 3 幾何学的意味

ことは明らかだから，定理2の条件はPareto最適解の必要条件でもある．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$が強凸関数で$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$が凸関数のとき，弱Pareto最適解ならばPareto最適解であることは容易に示せる．よってこのとき多目的計画(3)のPareto最適解の必要十分条件は定理2の条件(i)～(iii)を満たすことである．

定理 4 $\hat{\boldsymbol{x}}$において，(i)$-\nabla \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})d\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$，(ii)$\nabla \boldsymbol{g}_a(\hat{\boldsymbol{x}})d\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{0}$($\boldsymbol{g}_a$は活性制約式)を満たす$d\boldsymbol{x}$は存在しないと仮定する．多目的計画(3)において，$\hat{\boldsymbol{x}}$がPareto最適解であるための必要条件はつぎの条件，

(i) $\nabla_x L(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})=\boldsymbol{0}$

(ii) $\nabla_\lambda L(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \leqq \boldsymbol{0}$, $\nabla_\lambda L(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})\hat{\boldsymbol{\lambda}}=0$

(iii) $\hat{\boldsymbol{\mu}}>\boldsymbol{0}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \geqq \boldsymbol{0}$

を満たす$\hat{\boldsymbol{\mu}} \in R^p$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in R^m$が存在することである．

定理 5 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$および$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$が凸関数のとき，定理4の条件はPareto最適解の十分条件である．

等価な非線形計画法

最大成分最小化問題，

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \max_{i\in\{1,\cdots,p\}} \{w_i f_i(\boldsymbol{x})\} \\ &\text{subj. to } \boldsymbol{x} \in X=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{0}\} \\ &\quad \text{where } \boldsymbol{w} \in \Omega=\{\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0},\ \sum_{i=1}^{p} w_i=1\} \end{aligned} \tag{4}$$

を考えよう．またここで何ら一般性を失うことなくすべての$\boldsymbol{x} \in X$に対して$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})>\boldsymbol{0}$と仮定する．多目的計画(3)と最大成分最小化問題(4)の間にはつぎの関係がある．

定理 6 $\hat{\boldsymbol{x}}$が多目的計画(3)の弱Pareto最適解であるための必要十分条件は$\hat{\boldsymbol{x}}$が$\boldsymbol{w} \in \Omega$に対して最大成分最小化問題(4)の解であることである．

もし$\boldsymbol{f}$が強凸関数ならば，定理6はPareto最適解の条件である．

加法和最小化問題，

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{p} w_i f_i(\boldsymbol{x}) \\ &\text{subj. to } \boldsymbol{x} \in X=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{0}\} \end{aligned} \tag{5}$$

を考えるとき，つぎの定理がなりたつ．

定理 7 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$を凸関数と仮定．このとき，$\hat{\boldsymbol{x}}$が多目的計画(3)のPareto最適解ならば，$\hat{\boldsymbol{x}}$は$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$のとき，加法和最小化問題(5)の解である．

定理 8 $\boldsymbol{w}>\boldsymbol{0}$のとき，もし$\hat{\boldsymbol{x}}$が加法和最小化問題(5)の解ならば，$\hat{\boldsymbol{x}}$は多目的計画(3)のPareto最適解である．

系 $f_i(\boldsymbol{x}), i=1, \cdots, p$がすべて強凸関数で$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$が凸関数のとき，$\hat{\boldsymbol{x}}$が多目的計画(3)のPareto最適解であるための必要十分条件は，$\hat{\boldsymbol{x}}$が$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$に対する加法和最小化問題(5)の解であることである．Pareto最適解は多目的システムの1つの合理性を満たすが，単一解ではなく普通は∞個の点の集合である．しかし，工学問題ではふつうは単一解または適当な大きさの解集合を求めねばならない．

3. 決定者の選好最適解

各目的関数(各評価基準)がまったく独立で対等なものが多目的システムである．しかし通常の意思決定問題では，最終目的関数が陽的に表現されていないけれども存在すると考えられる．非劣解集合の中から，特定の解あるいは部分集合を選択するためには，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$以外の超目的関数(決定者の選好関数)を導入して，決定者が非劣解集合上の決定ルールを打ちたてる必要がある．それゆえ，$X \to Z \to Z_p$(非劣解集合)$\to \hat{\boldsymbol{x}}^0$(決定者の選好最適解)を解くプロセスとなる．

多目的決定問題と決定者の選好最適解

最終目的が存在して，決定者の選好関数にもとづき，多目的計画問題(3)の非劣解集合の中から決定者の選好最適解を求める問題を多目的決定問題とよぶ．この問題はつぎのように定式化される．

$$\begin{aligned} &\min_{\hat{\boldsymbol{x}}} \Phi(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &\text{subj. to } \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{X}=\{\hat{\boldsymbol{x}} \mid \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})=\min_{\boldsymbol{x}\in X} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqq \boldsymbol{0}\} \end{aligned} \tag{6}$$

あるいは，

$$\min_{\hat{\boldsymbol{x}}} \Phi(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{7.a}$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqq \boldsymbol{0} \tag{7.b}$$

$$\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})=\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{7.c}$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{0} \tag{7.d}$$

ここで$\hat{x}$は非劣解で，最終目的をあらわす選好関数Φは超目的関数ともよぶ．一般にΦは$f(x)$の関数とはかぎらないが，とくにΦがfの関数のとき，上の問題はつぎのとおり．

$$\min_{\hat{x}} \Phi(f(\hat{x})) \quad \text{subj. to } \hat{x}\in\hat{X} \tag{8}$$

決定者の選好にもとづき，$fi(x), i=1,\cdots,p$から

$$x^1\precsim x^2 \Rightarrow f(x^1)\precsim f(x^2) \Rightarrow \Phi(f(x^1))\leqq\Phi(f(x^2)) \tag{9}$$

なる超目的関数を構成するとき，これを多目的計画問題のスカラ化とよぶ．

定理 9　(9)式がなりたつとき，

$$\Phi(f(x^0))\leqq\Phi(f(x)),\ \forall x\in X=\{x\,|\,g(x)\leqq 0\} \tag{10}$$

なるx^0（つまりスカラ化問題の最適解）は多目的計画(3)の非劣解である．

決定者の選好最適化のアプローチには，Φがfの関数と考えられる場合でもつぎの2通りがある．

1. $\Phi(f_1,\cdots,f_p)$の大局的同定にもとづく決定．加法和関数のようなΦの近似式の中の重み係数を同定する．

2. $\Phi(f_1,\cdots,f_p)$の局所的情報にもとづき，山降り法を用いて，決定者のもっとも選好する解へ収束する．

以下に若干の例を紹介する．

パラメトリックアプローチ

決定者の選好関数により，半順序集合Zを全順序化することを多目的最適化におけるスカラ化とよぶ．f_i, $i=1,\cdots,p$のスカラ化によって，多目的計画問題(3)をスカラ化問題，

$$\begin{aligned}&\min_{x}\ \Phi(f_1(x),\cdots,f_p(x))\\ &\text{subj. to } g(x)\leqq 0\end{aligned} \tag{11}$$

に変える．このとき定理9がなりたつ．Φの例としてよく知られているものに，

重みづけ加法和　$\Phi(f)=\sum_{i=1}^{p}w_i(f_i-f_i^*)$　(12.a)

重みづけ2乗距離　$\Phi(f)=\sum_{i=1}^{p}w_i(f_i-f_i^*)^2$　(12.b)

重みづけ最大成分　$\Phi(f)=\max_{i\in I}\{w_i(f_i-f_i^*)\}$　(12.c)

などがある†．ここで$w_i\geqq 0$は重み係数で決定者によってあらかじめ与えられると仮定する．f_i^*は適当な任意の点である．スカラ化問題を最小化すればその重み係数によって価値づけられたある非劣解を見つけることができる．w_iは決定者が主観的にきめなければならない．パラメトリックアプローチはすべてのwに対してパラメトリックに解かれたとき，決定者に非劣解の集合を提供する．

ε-制約式アプローチ[4]　最重要の目的関数をf_sとし，$(p-1)$個の目的関数を$(p-1)$個の制約式におきかえた問題，

$$\begin{aligned}&\min_{x}\ f_s(x)\\ &\text{subj. to } f_j(x)\leqq\varepsilon_j,\ j\neq s,\ j=1,\cdots,p\\ &\qquad g(x)\leqq 0\end{aligned} \tag{13}$$

を考える．ここでε_jは最大許容レベルである．ε_jをパラメトリックに変えれば，非劣解の集合が求まる．

最適満足解によるアプローチ[9]　各目的関数f_iの悪化を許容できる範囲を満足条件とし，その中から最大成分最小化による最適満足解を求める．

アルゴリズム　ステップ1．$l=1$とし，つぎの問題を解く．

$$\begin{aligned}&\min_{x,z}\ z\\ &\text{subj. to } f_i(x)\leqq z,\ i=1,\cdots,p\\ &\qquad x\in X\end{aligned} \tag{14}$$

この解をx^l，対応する目的関数値をf^lとする．

ステップ2．x^lが与えられたとき，$f(x^l)$に関して満足できる成分と満足できない成分にわけ，その添字集合をそれぞれS^l，$\bar{S}^l$とする．そして$S^l=\phi$ならばこの問題は非許容，$\bar{S}^l=\phi$ならばx^lを

脚注†(12.a)～(12.c)は決定者の選好$\precsim$を弱順序と仮定し，Minkowskiのr-距離

$$\Phi^r(f\,;f^*)=\{\sum_{i=1}^{p}w_i(f_i-f_i^*)^r\}^{1/r},\quad 1\leqq r\leqq\infty$$

によるノルムづけを行なったときの具体例である．(12.c)式は$r=\infty$に対応する．

最適満足解とする．$S^l \neq \phi$ かつ $\bar{S}^l \neq \phi$ ならば，$i \in S^l$ について $f_i(\boldsymbol{x}^l)$ に関する許容量 $\alpha_i{}^l \geqq 0$ を決定する．

ステップ3．つぎの問題を解く．

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x},\,z} z\\ &\text{subj. to } f_i(\boldsymbol{x}) \leqq z,\ i \in \bar{S}^l \qquad (15)\\ &\qquad f_i(\boldsymbol{x}) \leqq f_i(\boldsymbol{x}^l) + \alpha_i{}^l,\ i \in S^l\\ &\qquad \boldsymbol{x} \in X\end{aligned}$$

問題(15)の解を $\boldsymbol{x}^{l+1}$ とし $\boldsymbol{x}^{l+1} = \boldsymbol{x}^l$ ならば許容解はないとする．$\boldsymbol{x}^{l+1} \neq \boldsymbol{x}^l$ ならば，$l = l+1$ としてステップ2へ戻る．

対話的計画法[2]　別のアプローチは決定者の選好関数 $\Phi(f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_p(\boldsymbol{x}))$ の局所的な情報（Φ を最小にする傾斜方向）によって山降りを行ない，決定者の選好最適解に収束する，つまり無差別曲線と直交する方向へ山降りのステップをとる．決定者の選好関数 Φ が $\boldsymbol{f}$ の関数だが，陽的に表現できない場合，対話的に選好関数の勾配方向を求める．元問題，

$$\min_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \quad \text{subj. to } \boldsymbol{x} \in X \qquad (16)$$

は便宜上凸計画と仮定する．問題(16)に Frank-Wolfe アルゴリズムを応用すると，(16)式の目的関数を線形化した問題，

$$\min_{\boldsymbol{y}} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k))}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{y} = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k))}{\partial \boldsymbol{f}} \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k)}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{y} \qquad (17)$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{y} \in X$$

を繰り返し解くことになるが，Φ が未知なので $\partial \Phi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k))/\partial \boldsymbol{f}$ を知ることができない．そこで $\partial \Phi^k / \partial \boldsymbol{f}$ をつぎのように評価する．

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial \boldsymbol{f}} = \frac{\partial \Phi^k}{\partial f_1}\left(1,\ \frac{\partial \Phi^k}{\partial f_2}\Big/\frac{\partial \Phi^k}{\partial f_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial \Phi^k}{\partial f_p}\Big/\frac{\partial \Phi^k}{\partial f_1}\right)$$

$w_i{}^k = \dfrac{\partial \Phi^k}{\partial f_i}\Big/\dfrac{\partial \Phi^k}{\partial f_1}$ は決定者の f_i と f_1 に対する Trade off 比として近似的に決定者の局所的な選好情報より求まる．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k)$ からの微少変化 $\Delta \boldsymbol{f} = (\Delta f_1, \cdots, \Delta f_p)$ によって決定者の選好値に変化がないとすると，

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial \boldsymbol{f}} \Delta \boldsymbol{f} = \frac{\partial \Phi^k}{\partial f_1} \Delta f_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi^k}{\partial f_p} \Delta f_p = 0$$

が近似的に成立するから，$\Delta f_i, \Delta f_1$ 以外を0とすれば，$\dfrac{\partial \Phi^k}{\partial f_1} > 0$ の仮定のもとで，$\dfrac{\partial \Phi^k}{\partial f_i}\Big/\dfrac{\partial \Phi^k}{\partial f_1} = -\dfrac{\Delta f_1}{\Delta f_i}$（限界代替率）がなりたつ．それゆえ，

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial \boldsymbol{f}} \propto \boldsymbol{w}^k = \left(1,\ -\frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}, \cdots, -\frac{\Delta f_1}{\Delta f_p}\right) \qquad (18)$$

が求まる．しかし，この方法では Φ が凸関数 $\boldsymbol{f}$ の強意増加関数でないかぎり，非劣解である保証はない．

Surrogate Worth Trade off 法[4),8)]　成分目的関数間の Trade off によってその点が決定者の選好最適解かどうかを判定するための Surrogate Worth を与え，非劣解集合の中から選好最適解を探索する方法．決定者の選好の限界代替率や非劣解曲面上の Trade off 比のような局所的な情報から選好最適解を選択する．SWTO 法は Trade off 関数の形成と Surrogate Worth 関数の評価の2つのステップからなる．

Trade off 関数：つぎの補助問題を考える．

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x}} f_i(\boldsymbol{x})\\ &\text{subj. to } f_j(\boldsymbol{x}) \leqq \varepsilon_j,\ j \in I,\ j \neq i \qquad (19)\\ &\qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{0}\\ &\text{where } \varepsilon_j = f_j{}^0 + \bar{\varepsilon}_j,\ \bar{\varepsilon}_j > 0\\ &\qquad f_j{}^0 = \min_{\boldsymbol{x}} f_j(\boldsymbol{x}) \text{ subj. to } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

ε_j はパラメトリックに変化する．問題(19)に関して，Lagrange 関数

$$L_i = f_i(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j \neq i} \mu_{ij} \{f_j(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_j\}$$

を定義する．このとき Kuhn-Tucker 条件から，$\mu_{ij}\{f_j(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_j\} = 0$，$\mu_{ij} \geqq 0$，$j \neq i$ という条件が得られるが，いま $f_j(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_j \leqq 0$ の制約式で活性制約式に対応した μ_{ij} を $\mu_{ij}[I_a(\varepsilon_j)]$，不活性制約式に対応したものを $\mu_{ij}[I_{\bar{a}}(\varepsilon_j)]$ と書くと，

$$\mu_{ij}[I_a(\varepsilon_j)] = -\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial f_j(\boldsymbol{x})}$$

の関係が得られる．これがわれわれの求める多目的計画の非劣解のところでの Trade off 関数である．

Surrogate Worth 関数：これは Trade off 比 $\mu_{ij}(\boldsymbol{x})$ の望ましさを推定するために用いられる．決定者の選好関数の点 $\boldsymbol{x}$ における限界代替率を

$M_{ij}(\boldsymbol{x})$ とするとき，$W_{ij}(\mu_{ij}(\boldsymbol{x}))=M_{ij}(\boldsymbol{x})-\mu_{ij}(\boldsymbol{x})$は Surrogate Worth 関数とよばれ，$M_{ij}(\boldsymbol{x})-\mu_{ij}(\boldsymbol{x})$ の正負は決定者の選好を無差別に保つ$f_j(\boldsymbol{x})$ と$f_i(\boldsymbol{x})$ の交換比(限界代替率)が非劣解曲面上の交換比 (Trade off 比) より多いか少ないかを示すものである．$M_{ij}(\boldsymbol{x})-\mu_{ij}(\boldsymbol{x})$ の符号を考慮に入れて状態$\boldsymbol{x}$における決定者の選好度を Surrogate Worth $W_{ij}(\mu_{ij}(\boldsymbol{x}))$ として，序数的に決定者から対話によって引きだし，$W_{ij}(\mu_{ij}(\boldsymbol{x}))=0$ を満たす $\hat{\boldsymbol{x}}^0$ を選好最適解として決定する．

階層的多目的決定システムの最適化[9),11)]

N個の地方システムと1個の中央システムからなる複数の目的関数が存在する2レベルシステムを考える．中央システムは中央の目的を最適化するように資源配分を行ない，地方システムは与えられた資源を用いて独自の目的を最適化するような半自治的なシステムである．結局，上位レベルは上位レベル固有の決定変数（地方システムの使用できる資源量などのパラメータや下位レベルの目的関数や制約条件を決定する係数などの政策パラメータなど）の値をきめ，下位レベルは部分システム固有の決定変数（たとえば与えられた資源のもとでのプロセス変数）の値をきめるようなシステムを考える．

下位レベルの地方システム n はそれぞれ決定変数 $\boldsymbol{x}_n$，目的関数f_n，制約式 $\boldsymbol{g}_n\leqq\boldsymbol{0}$ を有するが，地方システム間には相互干渉があり，f_nも$\boldsymbol{g}_n$も$\boldsymbol{x}_n$のみの関数ではなく，一般に$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N)$の関数になっている．上位レベルは下位問題のパラメータ$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_N)$の値を上位目的関数 Φ にもとづいてきめる．この問題を形式的につぎのように書く．

$$\min_{\alpha,\hat{x}(\alpha)} \Phi(\boldsymbol{\alpha},\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\alpha})) \tag{20.a}$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha},\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\alpha}))\leqq\boldsymbol{0} \tag{20.b}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}) \\ \vdots \\ f_N(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha})\end{pmatrix}=\min_{x}\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) \\ \vdots \\ f_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})\end{pmatrix} \tag{20.c}$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})\leqq\boldsymbol{0},\ \vdots,\ \boldsymbol{g}_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})\leqq\boldsymbol{0} \tag{20.d}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\alpha})$ はパラメトリック非劣解である．問題(20)はΦを最小にするような最適資源配分 $\boldsymbol{\alpha}^0$と対応した最良の非劣解 $\hat{\boldsymbol{x}}^0=\hat{\boldsymbol{x}}_{best}(\boldsymbol{\alpha}^0)$ ($\hat{\boldsymbol{x}}_{best}(\boldsymbol{\alpha}^0)$は$\boldsymbol{\alpha}^0$が与えられたもとでの非劣解集合の中から選ばれる) を求めることである．

さてΦが$\boldsymbol{f}$の関数で(21.a)式が，

$$\min_{\alpha,\hat{x}(\alpha)} \Phi(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}) \tag{21}$$

で与えられるときには，いろいろな性質がわかる．

問題(20)はN個の互いに独立な部分目的関数$\{f_n\}$と超目的関数Φをもつ階層的多目的システムであり，ふつうの数理計画ではない．また問題(21)は地方システムの目的関数f_nと制約式 $\boldsymbol{g}_n$ が自己の決定変数 $\boldsymbol{x}_n$ と上位から与えられるパラメータ$\boldsymbol{\alpha}_n$のみを含み，$\boldsymbol{x}$に関して互いに分離しているときには階層的分離システムとなり，つぎのようになる．

$$\min_{\alpha} \Phi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{\alpha})) \tag{22.a}$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{\alpha}))\leqq\boldsymbol{0} \tag{22.b}$$

$$f_n(\boldsymbol{x}_n{}^0(\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{\alpha}_n)=\min_{x_n} f_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{\alpha}_n) \tag{22.c}$$

$$\text{subj. to } \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)\leqq\boldsymbol{0} \tag{22.d}$$

$$n=1,\cdots,N$$

ここで $\boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{x}_1{}^0(\boldsymbol{\alpha}_1),\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_N{}^0(\boldsymbol{\alpha}_N))$ であり，$\boldsymbol{x}_n{}^0(\boldsymbol{\alpha}_n)$ は通常のパラメトリック最解解である．階層的分権システムの最適化に関しては原分割法的な多くの計算方法が得られる．[2),9)]

参考文献

1) Fishburn, P. C., Utility Theory for Decision Making, J. Wiley, 1970.

2) Geoffrion, A. M., Dyer, J. S., Feinberg, A., "An Interactive Approach for Multi-criterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department," Management Sci., Vol. 19 No. 4, 1972.

3) Geoffrion, A. M., "Vector Maximal Decomposition Programming," Western Management Science Institute, W. P. No. 164, U. C. L. A., 1970.
4) Haimes, Y. Y., Hall, W. A., "Multiobjectives in Water Resources Systems Analysis : Surrogate Worth Trade-off Method," Water Resources Research, Vol. 10, No. 4 1974.
5) 市川,"意思決定の数理 I", 計測と制御, Vol. 13, No. 11, 1974.
6) 市川,"多次元目的関数問題の構造", SICE 第15回制御理論シンポジウム, 1976.
7) Lin, J. G., "Maximal Vectors and Multiobjective Optimization," J. Opt. Th. & Appl., Vol. 18, No. 1, 1976.
8) 中山,"多目的意思決定について", JAACE 第20期講演会論文集, 1976.
9) Shimizu, K., "Optimization Algorithms for Multiple Objective Programs and Decentralized Hierarchical Systems," IFAC-LSSTA, Italy(Udine), pp. 489/497, 1976.
10) 志水, システム最適化理論, 4章多目的計画法, コロナ社, 1976.
11) 志水,"階層分権システム", システムと制御, Vol. 21, No. 1, 1977.
12) Yu, P. L., "Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives", J. Opt. Th. & Appl., Vol. 14, No. 3, 1974.

しみず・きよたか　1939年生
慶応義塾大学工学部計測工学科