特集　数理計画法

非線形計画法の応用

小野勝章・山下　浩

0.　非線形計画法

非線形最適化問題（以下 NLP とよぶ）は，つぎのように定式化される．

$$\min\ f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{sub. to}\quad g_i(\boldsymbol{x})\leqq 0,\ i=1,\cdots,m_1$$

$$h_i(\boldsymbol{x})=0,\ i=m_1+1,\cdots,m$$

NLP は，これから急速に利用・普及がひろまることが予想される分野である．いままでは NLP への定式化が考えられても，よい計算プログラムがないために実用化をあきらめたり，NLP への定式化すら考えなかった例が多い．筆者らが見聞，経験した適用例をここにいくつかあげる．体系的な調査を行なう余裕がなかったので内容としてはかたよっているが，これらの例を参考にして，NLP 手法の可能性を再認識されんことを望む．

1.　監査におけるサンプリングの最適化

監査機関が会計データを検査するためにサンプリングを行なうものとする．データを次表のように金額階層，誤謬率階層に二重層別する．

サンプリングの目的は，つぎのように考えられる．

代表サンプリング：(真の)金額と誤謬率の推定

訂正サンプリング：抽出もれとなる母集団データに含まれる誤謬・不正を含んだデータを最小にする

防衛サンプリング：サンプルに含まれる金額を最大にする

金額階層

誤謬率階層 i \ j	$D_1\cdots\cdots D_j\cdots\cdots D_b$	$\sum_j$	
P_1	$\vdots$	$n_{1\cdot}$	$w_{ij}=n_{ij}/N$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$w_i=n_{\cdot}/N$
P_i	$\cdots\cdots\ n_{ij}\ \cdots\cdots$	$n_{i\cdot}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
P_a			
$\sum_i$	$n_{\cdot 1}\cdots\cdots n_{\cdot j}\cdots\cdots$	N	

予防サンプリング：監査サンプリングの将来の行動が予測されないようにする

サンプリングの費用は，各層において同じと仮定する．ここで目的関数をサンプリングの費用最小，すなわちサンプルサイズ最小とし，前記のサンプリングの目的を所与のレベルに保つことを制約条件として定式化される[1]．

筆者は，$a=3$, $b=5$ の例について数例について試算を行なった[2]．

2.　非線形ネットワーク・フロー

交通流の配分を予測するためによく用いられるネットワーク・フローの問題は，流れについて非線形の費用関数（またはペナルティ関数）を，各枝について総和をとり，これを最小化する流れの配分を求める問題に帰せられる．

たとえば枝 k の費用関数として，つぎのような式が考えられる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

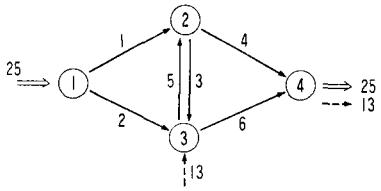

図 1　非線形ネットワーク

$$f_k = e_k x_k + \varphi_k(p, y)$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2} p c_k \left(y + \frac{1}{p}\right)^2 \qquad (y > -1/p)$$

$$= 0 \qquad (y < -1/p)$$

$$y = \frac{x - c_k}{c_k}$$

ここで x は枝 k の流れとし，e_k，c_k は枝に固有なパラメータ，p はモデルに固有なパラメータとする．e_k は距離に相当する値，c_k は線路の容量に相当する値だと考えられよう．このほかに各ノードにおいてキルヒホフの法則があてはまり，必要なODディマンドに相当する流れの流入・流出が制約条件となる(数値例は図1)．

解法は incremental assignment 法が有名だが，収束の点で満足であるとはいえない[3]．

3.　土木構築物の最適化

土木構築物の最適化の例として，港湾におけるふ頭のコンクリート量を最小にする設計のモデルが考えられる．ふ頭は何段かのコンクリート・ブロックを積み重ねた構造をなす(図2)．制約条件は，

(i)　上載荷重をのせたブロックが裏込めの土砂の背圧によってずり出さないこと

(ii)　荷重をのせたブロックが土砂の背圧によって転倒しないこと

(iii)　基礎の地盤が荷重をのせたブロックの重みに耐えること

を考慮し，それぞれ静止時および地震による横揺れ加速がかかった状態に対して制約式をもうける．堤体は延長方向は考慮せず，断面だけで最適化する．未知数はブロックの段の数だけもうける．

ブロックの各段の高さを所与とすると，(i)は線形，(ii)は2次式，(iii)は基礎上にのる構築物の重心がある範囲にはいっているか否かの判別を要し，各ケースについて2次式となる．目的関数は1次式である[4]．

この問題の可能領域は凸ではないが，比較的性質のよい問題であった．係数の計算式のチェックに苦労した．この種の問題は段数をあらかじめき

「数理計画法」特集について

さる3月16日，春季研究発表会の前日，恒例のシンポジウムが早稲田大学・理工学部で開かれた．約150名の参加者を得てなかなかの盛況であり，とてもよい内容であったと，参加者の評価も高かった．これは企画にあたった防衛大・岸尚氏の準備の適切さにもよるが，それにこたえて，豊富な分量の予稿を用意して講演された講演者各位の努力に負うところが大きい．

当日参加できなかった会員・読者の方々にもぜひその一端をお知らせしたい，という考えから本号を「数理計画法」の特集とし，当日行なわれた講演と，それをうけて引きつづき開催した座談会とをご紹介することとした．当日配布した予稿集は内容が豊富なためここにそのすべてを掲載できない．また，学会員全体にとっては，やや専門的に過ぎるきらいもあるので，編集委員会では，講演者各位にとくに無理をお願いし，約半分程度の長さに縮めたり，部分的にはより平易に書き直していただいたりした．このため，よりくわしい情報を知りたいと思われる読者もあろうかと思う．そのような方は，どうか，予稿集を入手されてお読みいただきたい．(残部が少しあって，現在頒布中なので，希望者は学会事務局までお申込みください．)

また座談会は，シンポジウム当日参加された数理計画法の専門家を中心に，約15名ほどを集めたかなり大規模のもので，広く数理計画法についての自由な議論を展開していただいた．

この特集が数理計画法に関心をもつ広い層の方々とくに実務でLPなどを使おうとされている方々や学生諸君に大変役立つであろうことを信じている．

(編集委員会)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

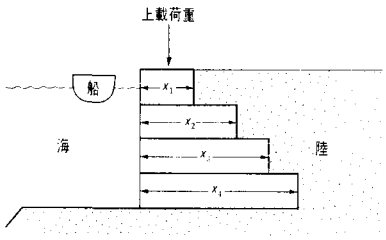

図 2　土木構築物（その 1）

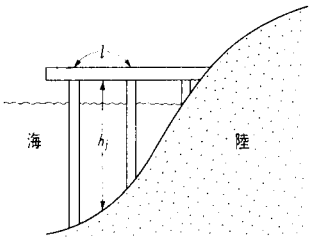

図 3　土木構築物（その 2）

めなくてはならない点が不便である．各段の高さも未知数にとる定式化も可能であろうが，式がさらに複雑になる．

建造物の最適化を考えるとき，非線形最適化問題に定式化できる例はいくらも考えられよう．上例の他にも，桟橋の橋脚の最適寸法を求める試みがなされたが（港湾技研），ローカルミニマムが多数存在して，実用化にいたっていないという（図 3）．

4.　遮蔽層の最適設計

原子炉など放射線を発する物体を囲う遮蔽壁は，多くの場合いろいろな物質を多重層にしてサンドイッチ状にして，いちばん外側から出る放射線の線量を許容値以下におさえる．このとき各層の寸法を，外側の線量を許容値以下に保つ条件のもとに動かして，ある目的関数について最適化したい．その目的は費用最小とか重量最小などのとりかたが考えられる．

対象となる放射線が何種類かあって，第 i 番目の放射線に対する第 j 層の物質の透過係数を μ_{ij}，第 j 層の厚さを x_j とすると，遮蔽層の外側の総線量率 D は，次式で与えられる．

$$D=\sum_i C_i \exp(-\sum_j \mu_{ij} x_j) \leqq C$$

この種の問題も，遮蔽層をどの物質でどの順に何層にするかをあらかじめきめなくてはならない．既存の計算コードで傾斜法にもとづく OPEX-II というのがあるが，収束はよくない．

5.　安定把握の問題

任意形状の物体を人工の指で把握することを考えるとき，指をかける位置によって把握が不安定であったり安定であったりする．花房ほか[5]（図 4）は，120度に配置されたロボットの指先で，任意形状（2 次元断面）の物体を安定に把握する把握位置算出のアルゴリズムを論じ，実験例を報告している．

一般的に，指 i の開き量が σ_i のときに駆動力 $f_i(\sigma_i)$ が働く指による把握姿勢が安定であるためには，把握系ポテンシャル

$$U=\sum_i \int_0^{\sigma i} f_i(\sigma_i) d\sigma_i + U_0(X_0, \Theta)$$

が，指の接触点が物体の表面上にあるという条件のもとで極小値をとることが必要十分条件であるという．ここで積分の範囲は，指を閉じた状態から物体面にあてがわれた位置まで，指の軌道にそって測られるものとする．$U_0(X_0, \Theta)$ は，物体の位置 X_0 と姿勢 Θ によってきまる位置エネルギーである．

指の駆動力をバネによって得ている場合，U の第 1 項は 2 次式となる．輪郭が単純でない物体の場合，ポテンシャル U の分布は多くの極小値をもつことがあり得る．花房ら[5]の手順は，まず物体の重心にハンドの中心を一致させ，ハンドを重心のまわりに回転させたときに U が極小値をとる角度 θ を求める．つぎに θ の姿勢にあるときの指位置の近傍で図形輪郭を円弧で近似し，モーメントのつりあいを保ちながらハンドの中心を移動し，

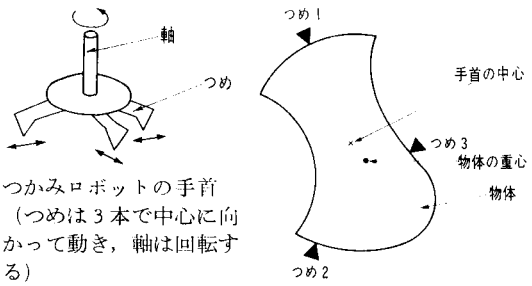

図 4　安定把握

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

Uの極小化をはかる．

実際に物をつかむときは摩擦力が働くから，最適化の計算をそれほど厳密にやらなくとも実用上支障はない．対象物の輪郭は ITV で測定し，最適化はミニコンによりロボットの動作に追従できる速さで実行している．

6. 工具経路の決定

切削加工という作業は，工具(切削する刃物)という3次元物体が，工作物の(仕上りの形状)という3次元物体の表面に接しながら，その表面上をくまなくなでまわすことだと表現できよう．ペナルティ法[6]の考えかたは，工具および工作物の仕上り形状をそれぞれ制約式の可能領域として定義し，両者の可能領域が接する点の軌跡を，極値探索の手法を用いて求めようというものである．ここでは最適化するべき目的関数に相当するものは設定しない．工具と工作物の接点を，ペナルティ関数の最小化というかたちで求める．

いま，物体の形状を，つぎの領域 P であらわすものとする．

$$P=\bigcup_{j=1}^{n}\{\bigcap_{i=1}^{m}P_{ij}(\boldsymbol{x})\}$$

ただし，$P_{ij}\equiv G_{ij}(\boldsymbol{x})\geqq 0$．ここでペナルティ関数 S を求める．

$$S=\prod_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m}C_{ij}|R_{ij}|\}$$

ただし，$R_{ij}=\min(0, G_{ij}(\boldsymbol{x}))$,

C_{ij}＝正の大きな数値．

工具の形状を P_T，被加工物の形状を P_W とするとき，工具の経路は，

$$\min S=S(P_T)+S(P_W)$$

を満足しなければならない．工具が物体の表面を移動するアルゴリズムをうまく組み込めば，物体の形状と工具の形状を定義しただけで自動的に切削加工を行なわせることができ，在来のNC制御言語に比べて抽象度の高いソフトウエアが実現可能となる．

7. 電力系統の運用

電力系統とは発電機，需要をノードにもち，送電線をアークとするネットワークとして考える．各需要ノードにおける需要を満足し最小の経費で系統を運用する方法は，かなり複雑な非線形最適化問題に定式化される．

交流系統においては電圧，電流が位相をもち，電力に有効分と無効分が含まれるので，n ノードの系統で，方程式が n 本成立するのに対して変数は $2n$ 個存在する．系統を制御するには，このうちの n 個の変数（たとえば有効電力と電圧の絶対値）を制御して，各負荷を満足させるようにする．

いま制制変数を $\boldsymbol{u}$, 被制御変数を $\boldsymbol{x}$ としたとき，

$$\begin{aligned}&\min\ f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\&\text{sub. to } G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0\\&\qquad \underline{u}\leqq u\leqq \bar{u}\\&\qquad \underline{x}\leqq x\leqq \bar{x}\end{aligned}$$

のように問題を書きあらわすことができる．第1式は発電機の燃料費，送電損失などをあらわす．第2式はネットワークの構成から $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}$ の関係を示す非線形連立方程式である．第3式，第4式は，ネットワークの運用条件，すなわち電圧をある範囲に保つとか，電流を送電線の容量を越えて流さないようにするなどの制約に相当する．

この種の問題は制約空間の性質が複雑となり，可能解に到達することが困難である．$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0$ の解は，GRG 法の原理を援用すると考えやすい．現在わが国では，より簡略化された手法により電力系統の運用が行なわれている．外国では 330 ノード，400アーク，80 制御変数の問題を，7040 で4分で解いた報告がある[7]．

8. その他

プロセス産業における生産計画は，LP による定式化がよく用いられる．ところが，ある処理の出力フローをわけて，任意の割合をべつの処理に

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

通したいという問題が起きたとき，未知数の積を含む式が制約式にあらわれる．たとえばある溜分の任意の割合を脱硫プロセスに通し，製品全体の硫黄含有率を所定の割合以下に保ちたいという場合である(電力中央研)．この場合はローカルオプティマムな点が多数出現する．

レンズ設計では，設定されたパラメータ（各レンズ面の曲率，材料の屈折率など）のレンズ系に対し，いろいろな位置での入射光線の追跡を行ない，評価値に対してパラメータの最適探索を行なう．最終的な目的関数としては，収差の2乗和をとる場合が多いが，レンズ性能の評価は種々の基準があるので，最適の判断がむずかしい．光線を追跡する方法では導関数を直接算出できないから，最適探索は導関数を用いない手法によらなければならない．

参考文献

1) Y. Ijiri & R. S. Kaplan, "監査におけるサンプリング目的の統合モデル" J. Accounting Research, Spring, 1971 pp. 73—87.

2) 日本経営情報開発協会，会計監査部会報告，「EDP会計に関する研究報告」第4集　昭和48年3月．

3) 日本OR学会「新手法による高速道路交通量の推計」，「同上付属資料」昭和48年2月．

4) 高力健次郎「ブロック繋船岸の設計について——非線型計画法による最適設計」港湾技術研究所報告，第11巻3号，1972年9月．

5) 花房・浅田「自動組立におけるロボット・ハンドによる多種形状機械部品の適応把握」第6回産業用ロボット利用技術講習会テキスト，日本産業用ロボット工業会，昭和51年9月．

6) 嘉数侑昇，「ペナルティ法によるフライス加工のNCテープ作成」TIPS研究会研究報告49—11，北海道大学工学部内TIPS研究会，1975.

7) H. W. Dommel, W. F. Tinney, "Optimal Power Flow Solutions", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS—87. no.10, Oct. 1968.

シンポジウムでは，第II部としてNLPのアルゴリズムについての報告がされたが，紙幅の都合上，ここではいっさい省略した．同シンポジウム予稿集「数理計画法」21～27ページを参照されたい．

おの・かつあき　1932年生　(株)小野勝章事務所
やました・ひろし　1946年生　(株)小野勝章事務所

編集委員の交替について

編集委員長　奥野忠一

会員諸氏もご承知のように，さる4月に，学会役員の改選があり，編集理事も変わりました．新しく選ばれました小生は，当選しないものと定めていましたので，なんの準備も心構えもなく，大変なことになったと考えています．

この雑誌の編集・発行が日科技連から当学会に移されて新発足以来，森村委員長（担当理事）を中心に10数名の有能なスタッフによって構成されたこれまでの編集委員会は，毎号興味ある話題を特集し，また解説・フォーラム・文献紹介・総合報告・ニュースなど色とりどりの記事を満載して，読者に満足感を与えてこられました．この伝統を引きつぐことは容易ならぬ業(ワザ)であります．

しかし，泣き言を並べている間に，時日はドンドン経過しますので，ようやく気をとりなおし，とりあえず森村前委員長にお願いして，だいたいの企画が定まっている10月号までは前委員に仕事をつづけていただき，その間に早急に新編集委員会を構成するつもりです．もっか一番近くの隣室におられる伏見正則氏に万事相談に乗っていただいています．

きたる6月11日に，新旧合同の編集委員会を開き，機関誌・論文誌をふくめて総括的に，また担当分野ごとに，旧委員の方々からいろいろ教えていただく予定です．また，編集事務についての旧委員の方々のご苦労を見聞するにつけ，旧委員の方々には申訳ないですが，これらの事務について，新委員にあまり大きな負担をかけないようにする方策を見いだし，学会理事会のご配慮を得たいと考えています．

近日中に編集委員の構成と分担を確定し，次号に発表したいと思っています．どうか，なにごとによらず会員の方からご助言・ご注文をいただければ幸いです．

(東京大学　工学部)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．