

不動点と相補性の理論 (3)

小 島 政 和

5. 不動点を近似するいくつかの方法

$X \subset R^n$ を有界閉凸集合, φ を X で定義され X の値をとる連続写像とすると

$$(32) \quad \varphi(x) = x$$

なる $x \in X$ が存在する (Brouwer の不動点定理). (32) を満たす $x \in X$ を (Brouwer の) 不動点とよぶ. この節では不動点を近似する 3 つの方法 (Kuhn [12], Merrill [17], Eaves and Saigal [6]) を紹介する.

5.1 Kuhn の方法

Kuhn [12] は X が $n+1$ 次元空間内の n -単体 $S = \{x \in R^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq 0\}$ の場合について, φ の不動点を近似するアルゴリズムを与えている. 1.3 節では $n=2$ の場合について述べたが, そこでの議論を $n \geq 3$ の場合に拡張しよう. m を正の整数として

$$T = \{x \in R^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq -1/(mn) \quad (i=1, 2, \dots, n+1)\}$$

とおくと, T は S をその相対内部に含む n -単体となる. Π を $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列の集まりとする. すなわち各 $\pi \in \Pi$ は集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ からその上への 1 対 1 写像である. J を頂点の集合 $J^0 = \{v \in T : mn v_i \text{ は整数 } (i=1, 2, \dots, n+1)\}$ をもち, ある $\pi \in \Pi$ に対して

$$(33) \quad v^{j+1}_i = \begin{cases} v^{j-1}_i - 1/(mn) & i = \pi(j) \text{ のとき} \\ v^j_i + 1/(mn) & i = \pi(j) + 1 \text{ のとき} \\ v^j_i & \text{その他} \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$\tau = co\{v^1, v^2, \dots, v^{n+1}\}$$

を満たす n -単体 τ よりなる T の単体分割とする. ここで, J を S 内に限定して考えると S の単体分割 $\{\tau \in J : \tau \subset S\}$ が得られる. 各 $\tau = co\{v^1, v^2, \dots, v^{n+1}\} \in J$ に対して

$$(34) \quad |v^j_i - v^k_i| \leq 1/(mn) \quad (i, j, k=1, \dots, n+1)$$

が成立するから, 正の整数 m を大きくとれば J に属する

n -単体 τ の大きさをいくらでも小さくできる. 各 $v \in J^0$ に対して, ラベル $L(v)$ をつぎのように与える.

$$(35) \quad L(v) = \begin{cases} i & v \in S, v_i > 0, v_i \geq \varphi_i(v) \text{ のとき} \\ j & v \notin S, 0 < v_j = \max_k v_k \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし, 上の条件だけでラベル $L(v)$ が一意に定まらない場合には, ラベル $L(v)$ の候補のなかでいちばん若い番号にする. Σ を条件

$$(36) \quad \{L(v^i) : i=1, 2, \dots, n+1\} = \{1, 2, \dots, n+1\}$$

を満たす $\tau = co\{v^1, v^2, \dots, v^{n+1}\}$ の集まりとする. 各 $\tau \in \Sigma$ が S に含まれることを示そう. $\tau \subset S$ と仮定すると, τ のある頂点 $\bar{v}$ は S に含まれないことになり, ある番号 j に対して, $\bar{v}_j < 0$. (33) より, $\bar{v}_j = -1/(mn)$ となる. さらに, (34) より, τ のすべての頂点 v の第 j 成分 v_j は非正となる. したがって, (35) より, 番号 j が (36) の左辺の集合に含まれないことになる. 各 $x \in \tau \in \Sigma$ が φ の近似不動点になることも 1.3 とまったく同様に確かめられる.

$\tau \in J$ の $(n-1)$ 次元フェイス $\xi = co\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ で, 条件

$$(37) \quad \{L(v^i) : i=1, 2, \dots, n\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

を満たす $(n-1)$ -単体 ξ の集まりを考え, それを $\bar{N}$ であらわす. $\bar{N}$ を節点の集合, $\bar{E} = \{(\xi, \xi') : \xi \cup \xi' \subset \tau \in J\}$ を枝の集合とするグラフを考え, それを $\bar{G}$ とする (1.3 では $\xi \in \bar{N}$ の重心で ξ を代表させてグラフをつくった). $\xi = co\{v^1, v^2, \dots, v^n\} \in \bar{N}$, $\xi \subset \tau = co\{v^1, v^2, \dots, v^n, v^{n+1}\} \in J$ と仮定する. このとき, $L(v^{n+1}) = n+1$ であれば $\tau \in \Sigma$ となり, τ の $(n-1)$ 次元フェイスで $\bar{N}$ に属するものは ξ だけとなる. また, $L(v^{n+1}) = j \neq n+1$ であれば, $\xi' = co\{v^i : i=1, 2, \dots, n+1, i \neq j\}$ は $\bar{N}$ に属し, かつ, $(\xi, \xi') \in \bar{E}$ となる. この場合には, τ の $(n-1)$ 次元フェイスで $\bar{N}$ に属するものは ξ と ξ' のちょうど 2 つだけである. 補題 2-1 を考え合わせると

$$\deg(\xi) = \begin{cases} 0 & 2 \text{ つの } \tau \in \Sigma \text{ に対して } \xi \subset \tau \\ 1 & 1 \text{ つの } \tau \in \Sigma \text{ に対して } \xi \subset \tau \\ 1 & \xi \subset rel. bd T \\ 2 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

が得られる(1.3節の(3)に対応). さらに, (33)において

$$v^0 = (m+1, m, m, \dots, m, -1)/(mn)$$

$$\pi(j) = j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

として n -単体 $\tau^0 \equiv \tau$ を構成すると, その $(n-1)$ 次元フェイス $\xi^0 \equiv \text{co}\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ は (37) を満たす. したがって, $\xi^0 \in \bar{N}$. また $v_{n+1}^j = -1$ ($j=1, 2, \dots, n$) より, $\xi^0 \in \text{rel. bd } T$ が成立する. $\xi \in \text{rel. bd } T$ なる $\xi \in \bar{N}$ が ξ^0 以外に存在しないこともわかる. ゆえに, ξ^0 を初期点にして $\bar{G}$ に基本アルゴリズムを適用することによって, 有限回の反復である $\bar{\xi} \in \tau \in \Sigma$ に到達できる.

この方法によって高い精度の近似不動点を計算するためには, 正の整数 m を大きくとって T の分割 J を構成する n -単体の大きさを小さくする必要がある. ところが, m を大きくすると 1 反復あたりの歩み幅が減少し計算に要求される全反復回数(ラベル $L(v)$ を評価する頂点 $v \in J^0$ の総個数)が増大する. それゆえ, 最初は m を小さくとして低い精度の近似不動点を少ない反動回数で求め, その点から再出発してその点の近くにあると予想される真の不動点をより高い精度で近似できれば, 全体としての計算効率はよくなるはずである. Kuhn の方法では m の大小にかかわらず T の相対境界にある $(n-1)$ -単体 ξ^0 からスタートしなければならないから, このような芸当は不可能である. 5.2 節で紹介する Merrill の方法や 5.3 節の Continuous deformation 法では上の考え方を積極的に利用して計算効率をあげている.

上述の Kuhn の方法では各頂点 v に整数ラベル $L(v)$ が与えられた単体分割が主要な役割を演じており, 区分的線形方程式系が使われていない. それゆえ, 3 節で述べた CP 法の統一的な枠組からはみ出しているように見える. そこで, 以下では Kuhn の方法を CP 法の統一的な枠組に納まるように書き直してみよう. $(n+1)$ -単体 C とその単体分割 K をつぎのように定義する.

$$C = \text{co}[T \cup \{0\}]$$

$$K = \{\sigma = \text{co}[\tau \cup \{0\}] : \tau \in J\}$$

図 5-1 は $n=1$ の場合を示している. $U = \text{co}\{u^1, u^2, \dots, u^{n+1}\} \subset R^n$ を n -単体, c をその内点とする. $\sigma \in K$ の各頂点 v に対して $H(v)$ を

$$(38) \quad H(v) = \begin{cases} u^{n+1} & v=0 \text{ のとき} \\ u^j & v \neq 0 \text{ かつ } L(v)=j \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定め, さらに, H を各 $\sigma \in K$ 内で線形に拡張する. すなわち, $x \in \sigma = \text{co}\{v^0, v^1, \dots, v^{n+1}\} \in K$ をその重心座標 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ を用いて

$$x = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j v^j, \quad \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (j=0, 1, \dots, n+1)$$

とあらわしたとき

$$H(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j H(v^j)$$

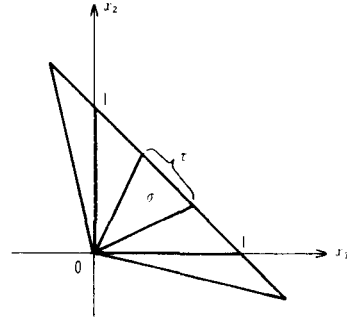


図 5-1

$H: |K| \rightarrow R^n$ を左辺にもつ区分的線形方程式系

$$(39) \quad H(x) = c$$

を考え, その解集合 $\{x \in C : H(x) = c\}$ を W であらわす. H のつくり方と $c \in \text{int } U$ より, $\sigma \in K$ の m 次元フェイス $\tau = \text{co}\{v^1, v^2, \dots, v^{m+1}\}$ が W の点を含むための必要十分条件は

$$(40) \quad \begin{aligned} &\{H(v^j) : j=1, 2, \dots, m+1\} \\ &= \{u^j : j=1, 2, \dots, n+1\} \end{aligned}$$

となる. したがって, $W \cap \tau \neq \emptyset$ であれば $m \geq n$ でなければならない. このことは区分的線形方程式系 (39) が非退化の仮定を満たしていることを意味している. W に対応するグラフ $G(W)$ をつくと, $C = |K|$ は有界であるから, $N_0(W) = N_1(W) = \emptyset$. また, K は有限であるから, $G(W)$ は有限グラフとなる.

$x = \omega \in N_2(W)$ とすると, $\sigma \in K$ の n 次元フェイス $\tau = \text{co}\{v^1, v^2, \dots, v^{n+1}\}$ で x を含むものがただ 1 つ存在する. K のつくり方より $0 \notin \tau \in J$ または $0 \in \tau$ のいずれかでなければならない. $\{x\} = \tau \cap W \neq \emptyset$ より, (40) が $m=n$ に対して成立している. $0 \notin \tau \in J$ の場合には, (35) と (38) より (36) が成立する. すなわち, $\tau \in \Sigma$. また $x \in \text{bd } C$ より, $\deg(\omega) = 1$. $0 \in \tau$ の場合には, 適当に番号を並べ換えることによって $v^{n+1} = 0$ とすると, $\xi = \text{co}\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ はある $\tau' \in J$ の $n-1$ 次元フェイスになっている. この場合にも, (40) が $m=n$ に対して成立しなければならないから, $L(v^{n+1}) = n+1$ および (35) と (38) より, ξ は (37) を満たす. すなわち, $\xi \in \bar{N}$ であることがわかる. とくに $\xi = \xi^0$ の場合には, τ は C の境界に含まれるから, $\deg(\omega) = 1$ となる. その他の場合には $\tau \in \text{rel. bd } C$ となるから, $\deg(\omega) = 2$ が得られる.

逆に

$$\tau \in \Sigma \quad \text{または} \quad \xi \in \bar{N}$$

とすると, ある $x = \omega \in N_2(W)$ に対して

$$\{x\} = \tau \cap W \quad \text{または} \quad \{x\} = \text{co}[\xi \cup \{0\}] \cap W$$

であることが簡単にわかる. 以上によって, $\Sigma \cup \bar{N}$ と $N_2(W)$ の間には 1 対 1 の対応関係があること, および

$$\deg(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = x \in \tau \in \Sigma \text{ のとき} \\ 1 & \omega = x \in \text{co}[\xi^0 \cup \{0\}] \text{ のとき} \\ 2 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

が示された。したがって、 $\omega^0 = x \in \text{co}[\xi^0 \cup \{0\}]$ なる $\omega^0 \in N_2(W)$ を初期点にしてグラフ $G(W)$ に基本アルゴリズムを適用することによって得られる $N_2(W)$ の節点の有限列を $\{\omega^r : r=0, 1, \dots, k\}$ 、それに対応する W 上の点列を $\{x^r : r=0, 1, \dots, k\}$ とすると、 $\xi^r \in \bar{N}(r=0, 1, \dots, k-1)$ と $\tau^k \in \Sigma$ が存在して

$$\begin{aligned} x^r &\in \text{rel.int}[\text{co}\{\xi^r \cup \{0\}\}] \quad (r=0, 1, \dots, k-1) \\ x^k &\in \text{rel.int} \tau^k \end{aligned}$$

が成立する。 $\{\xi^r \in \bar{N} : r=0, 1, \dots, k-1\}$ は Kuhn の方法によって生成される $(n-1)$ -単体の列と一致する。

Kuhn の方法の他にも整数ラベルを用いている方法がいくつかある ([35], [36], [39] 等)。それらの方法も上で述べたような適当な変換によって C P 法の統一的な枠組のなかであつかうことができる。しかし、これは単に形式上の問題であって、実際の計算が変換された後の区分的線形方程式系に対して行なわれるわけではない。とくに、整数ラベルを用いる方法は行列の線形演算 (基底変換) を必要としないので 1 反復あたりの計算が非常に簡単であるという利点がある。

5.2 Merrill の方法

不動点の近似計算は Merrill の方法 (Restart 法) の出現によって飛躍的な進歩を遂げている。Kuhn and Mackinnon による Sandwich 法 [14] はこの方法によく似ている。ここでは、この方法を非線形方程式系

$$(41) \quad f(x) = 0$$

の解法として記述し、そのあとで Brouwer の不動点を近似する問題へ応用する。ただし、 f は R^n で定義され R^n の値をとる連続写像とする。 A を $n \times n$ の正則な行列、 x^0 を R^n の点として線形写像 $g: R^n \rightarrow R^n$ を

$$(42) \quad g(x) = Ax - Ax^0 \quad (x \in R^n)$$

で定義する。さらに f と g との間のホモトピー $h: R^n \times [0, 1] \rightarrow R^n$ を

$$(43) \quad h(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x) \quad ((x, t) \in R^n \times [0, 1])$$

で定める。 J を Kuhn の分割 (2.3) または Union Jack 分割 (2.4) として、 $K = \{\sigma \in J : \sigma \subset R^n \times [0, 1]\}$ とおくと、 K は $R^n \times [0, 1]$ の単体分割となる。各正の数 ρ に対して、 ρK を K を $x_1, x_2, \dots, x_n$ 方向に ρ 倍して得られる $R^n \times [0, 1]$ の単体分割とする。すなわち

$$\rho K = \{\text{co}\{(\rho x, t) : (x, t) \in \sigma\} : \sigma \in K\}$$

ρK を用いて区分的線形写像 $H: |\rho K| \rightarrow R^n$ をつぎのようにつくる。

$$(44) \quad H(x, t) = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j h(u^j, t^j)$$

ただし

$$\begin{aligned} (x, t) &= \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j (u^j, t^j), \quad \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j = 1, \\ (45) \quad \lambda_j &\geq 0 \quad (j=0, 1, \dots, n+1), \\ \sigma &= \text{co}\{(u^j, t^j) : j=0, 1, \dots, n+1\} \in \rho K \end{aligned}$$

で定義する。このようにしてつくられた H は h の近似になっている。実際、つぎの補題が成立する。

補題 5-1: 各 $(x, t) \in R^n \times [0, 1]$ に対して、 $H(x, t)$ は $\rho \rightarrow 0$ のときに $h(x, t)$ に収束する。

証明: この補題は“自明”といって片づけられることでもない。というのは、 ρ を 0 に近づけても ρK に含まれる $(n+1)$ -単体の t 方向の長さは常に 1 になっているからである。 (x, t) が (45) を満たしていると仮定しよう。

$$(46) \quad I = \{i : t^i = 0\}, \quad M = \{j : t^j = 1\}$$

とおくと、(45) より

$$(47) \quad t = \sum_{j \in M} \lambda_j, \quad (1-t) = \sum_{i \in I} \lambda_i$$

また (43) と (44) より

$$(48) \quad H(x, t) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(v^i) + \sum_{j \in M} \lambda_j g(v^j)$$

が成り立つ。 $\rho \rightarrow 0$ にすると、各 $v^i (i \in I)$ 、 $v^j (j \in M)$ は x に収束するから、(48) の右辺は $h(x, t)$ に収束する (証明終わり)。

とくに $t=0$ に固定すると $H(\cdot, 0): R^n \rightarrow R^n$ は $f: R^n \rightarrow R^n$ の近似になっている。また、 $t=1$ に固定したときには、(45) が成立するためには (46) において $I = \emptyset$ でなければならぬ。よって、(47) と (48) は

$$H(x, 1) = \sum_{j \in M} \lambda_j g(v^j), \quad 1 = \sum_{j \in M} \lambda_j$$

と書ける。他方 $g: R^n \rightarrow R^n$ は (42) によって定義される線形写像であるから、結局

$$(49) \quad H(x, 1) = g(x) = Ax - Ax^0 \quad (x \in R^n)$$

が得られる。

区分的線形方程式系

$$(50) \quad H(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in R^n \times [0, 1])$$

を考える。左辺は $(n+1)$ -次元多面体 $R^n \times [0, 1]$ 上で定義され R^n の値をとる区分的線形写像であるから、その解集合 $W = \{(x, t) : H(x, t) = 0\}$ は、非退化の仮定のもとで、高々可算本の互いに交わらないパスおよびループよりなる (定理 3-1)。 W に対応するグラフを $G(W)$ であらわす。 ρK は $R^n \times [0, 1]$ の単体分割であるから、各 $W \cap \sigma (\sigma \in \rho K)$ は有界な線分となる。したがって、 $N_0(W) = N_1(W) = \emptyset$ となる。(49) より $\omega^0 \equiv (x^0, 1)$ は $N_2(W)$ に含まれる節点となる。また、 $(x^0, 1) \in \text{bd } R^n \times [0, 1]$ より、 $\deg(\omega^0) = 1$ 。したがって、 ω^0 を初期点にしてグラフ $G(W)$ に基本アルゴリズムを適用することによって、 $G(W)$ の有限パスあるいは無限パスを生成することができる。生成されたグラフ $G(W)$ 上のパスに対応する W 上

のパスを W^0 であらわすことにしよう。基本アルゴリズムが有限回の反復で終了し(境界点終了), W^0 が $(x^0, 1)$ とある $(\bar{x}, \bar{t}) \in bdR^n \times [0, 1] = R^n \times [0, 1]$ を端点にもつパスになったとすると, $\bar{t}=0$ であり $\bar{x}$ は方程式系(41)の近似解になる。実際, $\bar{t}=1$ とすると, (49)において A が正則行列であることより, $\bar{x}=x^0$ 。これは W^0 がパスであることに矛盾する(あるいは非退化の仮定に反する)。 W^0 が有界でないパスになった場合にはこの方法では(41)の近似解は求まらなかったことになる。そこで, W^0 が有界なパスとなるための十分条件を1つあげておこう。

定理 5-1: x^0 を含むある有界開集合 U に対して

$$(51) \quad H(x, t) \neq 0 \quad ((x, t) \in \{bdU\} \times [0, 1])$$

とすると, W^0 は有界なパスとなる。

証明: W^0 が有界でないとして仮定すると, $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in W^0 \cap [\{bdU\} \times [0, 1]]$ なる $(\tilde{x}, \tilde{t})$ が存在する。これは(50)に矛盾(証明終わり)。

系 5-1: x^0 を含むある有界開集合 U が存在して

$$(52) \quad 0 \notin co\{f(x), g(x)\} \quad (x \in bdU)$$

とすると, ある正の数 ρ^* が存在して, $0 < \rho \leq \rho^*$ ならば W^0 は有界なパスとなる ($H: R^n \times [0, 1]$ および W は ρ に依存している)。

証明: (52) は $h(x, t) \neq 0 ((x, t) \in \{bdU\} \times [0, 1])$ と同値である。したがって, 補題 5-1 より, 十分小さな ρ に対しては(51)が成立する(証明終わり)。

上の結果を Brouwer の不動点を求める問題に応用しよう。 $X \subset R^n$ を $int X \neq \emptyset$ なる有界閉凸集合として, 連続写像 $\varphi: X \rightarrow X$ の不動点を近似する問題を考える。 $f: R^n \rightarrow R^n$ と $g: R^n \rightarrow R^n$ をつぎのようにとる。

$$(53) \quad f(x) = \begin{cases} x - \varphi(x) & (x \in X) \\ x - c & (x \notin X) \end{cases} \\ g(x) = x - x^0 \quad (x \in X)$$

ただし, $c \in int X$, $x^0 \in X$, $h: R^n \times [0, 1] \rightarrow R^n$ を(43), $H: R^n \times [0, 1] \rightarrow R^n$ を(44)と(45)で定義する。このとき, f と h は不連続な写像となり, 補題 5-1 および系 5-1 は成立しないが, 定理 5-1 は有効であることに注意する必要がある。(45)を満たす各 $(x, t) \in R^n \times [0, 1]$ に対して, (44)は

$$(54) \quad H(x, t) = x - \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i (u^i - f(u^i)) + \sum_{j \in M} \lambda_j x^0 \right\}$$

と書ける。ただし, I と M は(46)で定まる添字の集合。第2項 $\{\dots\}$ は常に X に含まれる。したがって, U を X をその内部 $int U$ に含む有界開集合にとると(51)が成立する。ゆえに, $x^0 \in X$, $c \in int X$ および $\rho > 0$ の取り方には無関係に W^0 は $(x^0, 1)$ とある $(\bar{x}, 0)$ を端点とする有界なパスとなることが定理 5-1 によって保証される。

つぎに $\bar{x}$ が φ の近似不動点になっていることを示そ

う。 $(x, t) = (\bar{x}, 0)$ をそれを含む $\sigma = co\{(u^j, t^j) : j=0, 1, \dots, n+1\} \in \rho K$ の頂点の凸結合で(45)のようにあらわすと, (54)より

$$\bar{x} = \sum_{i \in I_1} \lambda_i \varphi(u^i) + \sum_{j \in I_2} \lambda_j c, \quad \sum_{i \in I_1} \lambda_i + \sum_{j \in I_2} \lambda_j = 1$$

ただし

$$I_1 = \{i : u^i \in X\}, \quad I_2 = \{j : u^j \notin X\}$$

が成り立つ。 ρ が十分小さいとすると

$$(55) \quad \bar{x} \doteq \left(\sum_{i \in I_1} \lambda_i \right) \varphi(\bar{x}) + \left(\sum_{j \in I_2} \lambda_j \right) c$$

が得られる。したがって, $I_2 \neq \emptyset$ ならば, $\bar{x} \neq \varphi(\bar{x})$ となる。 $I_2 \neq \emptyset$ のときには, f の定義より, $\bar{x}$ は X の境界に非常に近い点でなければならない(図 5-2)。そのような $\bar{x}$ を, $\varphi(\bar{x}) \in X$ と $c \in int X$ の凸結合で近似するためには $\bar{x} \doteq \varphi(\bar{x})$ でなければならないことがわかる。ゆえに, いずれの場合にも $\bar{x} \doteq \varphi(\bar{x})$ が示された。

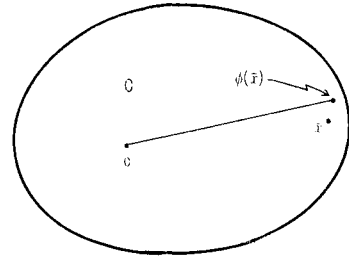


図 5-2

さて, 実際に φ の不動点を近似計算する際には, 近似精度を定める $\rho > 0$ と初期点 $(x^0, 1)$ の選び方が問題になる。計算効率をあげるためには, パス W^0 がよぎる $(n+1)$ -単体 $\sigma \in \rho K$ の個数(対応するグラフ $G(W)$ 上のパスの節点の個数)をなるべく少なくするのが望ましい。したがって, φ の不動点に関してなんの情報も得られていない段階で ρ を非常に小さくすることは計算効率上で危険が伴う。この段階では ρ を適当に大きくとって低い精度の近似不動点 $\bar{x}$ をまず求め, つぎの段階で x^0 を $\bar{x}$ でおきかえ, $\rho > 0$ を小さくして, より高い精度の近似不動点を求める。この過程を何回か繰り返せば満足できる精度の近似不動点を計算できる。通常, 各段階で計算される近似不動点は互いに近いと考えられるから, 各段階で生成されるパス W^0 がよぎる $(n+1)$ -単体 $\sigma \in \rho K$ の個数は少ないことが予想される。

5.3 Continuous deformation 法

Merrill の方法に計算効率および応用の両面に対抗できる方法に Continuous deformation 法がある。この方法は Eaves[5]によって n -単体 S 上で定義され S の値をとる連続写像 φ の不動点を求める方法として提案されたものであり, その後 Eaves and Saigal[6] によって

一般化されている。ここでは、Merrill の方法についてと同様に、非線形方程式系(41)の解法として述べる。この方法の特徴は条件(49)と

$$(56) \quad \lim_{t \rightarrow 0} H(x, t) = f(x) \quad (x \in R^n)$$

の2つを満たす区分的線形写像 $H: R^n \times (0, 1] \rightarrow R^n$ を利用することにある。このような写像 H を構成するためには特殊な構造をもった $R^n \times (0, 1]$ の単体分割が使われる。ここでは Todd[23, 24] の単体分割 J_3 を紹介してそれを用いることにする。

J_3 の頂点の集合 $J_3^0 \subset R^n \times (0, 1]$ を

$$J_3^0 = \{v: v_{n+1} = 2^{-k} (k \text{ は非負整数}) \\ v_i/v_{n+1} \text{ は整数} (i=1, 2, \dots, n)\}$$

とし、さらに、その部分集合 J_3^{0c} を

$$J_3^{0c} = \{v \in J_3^0: v_i/v_{n+1} \text{ は奇数} (i=1, 2, \dots, n)\}$$

で定める。各 $v \in J_3^{0c}$ は中心頂点とよばれている。各 $v \in J_3^{0c}$ に対して、 $v_j(v)$ ($j=1, 2, \dots, n+1$) を

$$v_j(v) = \begin{cases} -1 & v_j/v_{n+1} \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき} \\ 1 & v_j/v_{n+1} \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する(たとえば、 $v_j/v_{n+1} = (5 \times 2^{-2}) / (2^{-2}) = 5 \pmod{4}$)。 Π を $\{1, 2, \dots, n+1\}$ の順列の集まりとする。すなわち、各 $\pi \in \Pi$ は集合 $\{1, 2, \dots, n+1\}$ からその上への1対1写像。 J_3 はつぎの条件を満たす $(n+1)$ -単体 σ の集まりとして定義される。

$$(57) \quad \begin{aligned} \pi &\in \Pi, \pi(m) = n+1 \\ s_j &\in \{-1, 1\} \quad (j=1, 2, \dots, m-1) \\ v^0 &\in J_3^{0c}, v^1, v^2, \dots, v^{n+1} \in J_3^0 \\ v^i &= v^{i-1} + v^0_{n+1} s_i e^{\pi(i)} \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \\ v^m &= v^{m-1} - v^0_{n+1} \sum_{j=m}^{n+1} v_{\pi(j)}(v^0) e^{\pi(j)} \\ v^j &= v^{j-1} + 2 v^0_{n+1} v_{\pi(j)}(v^0) e^{\pi(j)} \\ &\quad (j=m+1, \dots, n+1) \\ \sigma &= co\{v^0, v^1, \dots, v^{n+1}\} \end{aligned}$$

ただし、 e^i は第 i 要素が1で他のすべての要素が0の $n+1$ 次元ベクトル。図5-3は $n=1$ の場合、図5-4は $n=2$ の場合に集合 $\{(x, t) \in R^2 \times (0, 1]: 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2), 1/2 \leq t \leq 1\}$ が J_3 によってどのように分割されるかを示している。 σ の頂点 $v^0, v^1, \dots, v^{m-1}$ は超平面 $R^n \times \{2^{-k}\}$ 上に、 $v^m, v^{m+1}, \dots, v^{n+1}$ は超平面 $R^n \times \{2^{-k+1}\}$ 上に乗る。とくに、 $m=1$ のときには、 $\tau = co\{u^1, u^2, \dots, u^{n+1}\}$ は $R^n \times \{2^{-k+1}\}$ に含まれる n -単体となる。そのような n -単体の集まりは超平面 $R^n \times \{2^{-k+1}\}$ の単体分割を構成している。この単体分割は2.4節で述べたUnion Jack分割と同じ構造をしている。実際、 R^n のUnion Jack分割 J_1 を縮尺 $1/2^{k-1}$ で縮めたものに一致している。5.2節で K から ρK をつくったときと同様に、 $\rho > 0$ に対して

$$\rho J_3 = \{co\{(\rho x, t): (x, t) \in \sigma\}: \sigma \in J_3\}$$

とする。各 $\sigma = co\{(u^j, t^j): j=0, 1, \dots, n+1\} \in \rho J_3$ に対して $diam(\sigma) = \max\{\|y - y'\|: y, y' \in \sigma\}$ とおくと

$$(58) \quad diam(\sigma) \rightarrow 0 \quad (t^0 \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

が成立する。

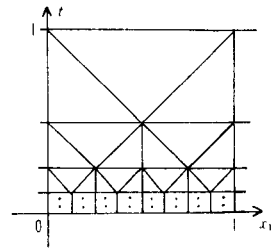


図 5-3

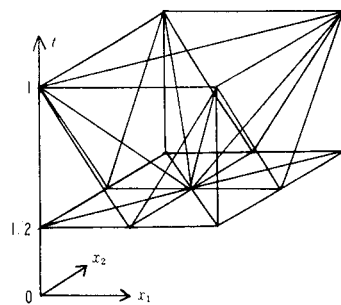


図 5-4

$\alpha: R_+ \rightarrow (0, 1]$ を条件 $\alpha(0) = 1$ を満たす非増加な連続写像とする。 g を(42)で定める。 ρJ_3 の頂点 (u, t) に対して

$$H(u, t) = \begin{cases} g(u) & \alpha(\|u - x^0\|) \leq t \text{ のとき} \\ f(u) & \alpha(\|u - x^0\|) > t \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し、各 $\sigma \in \rho J_3$ 内に H を線形に拡張する。図5-5は $n=1$ の場合の集合 $\{(x, t): \alpha(\|x - x^0\|) = t\}$ を例示している。このようにしてつくられた $H: R^n \times (0, 1] \rightarrow R^n$ は(49)と(56)を満たす区分的線形写像となる。実際、超平面 $R^n \times \{1\}$ 上にある J_3 の頂点 $(u, 1)$ に対しては $H(u, 1)$ は $g(u)$ に一致する。 g は線形写像であるから(49)が成立する。また、各 $x \in R^n$ に対して、十分小さな $t \in (0, 1]$ をとると、 (x, t) を含む $\sigma \in \rho J_3$ のすべての頂点 (v, s) で $\alpha(\|v - x^0\|) > s$ が成立し、 H の定義より、 $H(x, t) \in co\{f(u): (u, s) \in \sigma\}$ が得られる。したがって、(58)より(56)がみちびかれる。

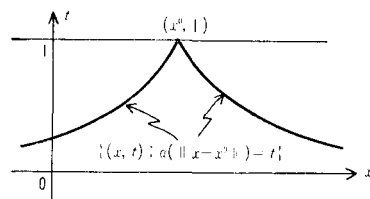


図 5-5

区分的線形方程式系

$$(59) \quad H(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in R^n \times (0, 1])$$

を考える。(59)が非退化であると仮定し、その解集合を W , 対応するグラフを $G(W)$ であらわす。各 $\sigma \in \rho J_3$ は有界であるから、 $N_0(W) = N_1(W) = \emptyset$ となる。(49)より、 $\omega^0 \equiv (x^0, 1)$ は $N_2(W)$ に含まれる $\deg(\omega^0) = 1$ なる節点となる。また

$$W \cap bd\{R^n \times (0, 1]\} = W \cap \{R^n \times \{1\}\} \\ = \{(x^0, 1)\}$$

より、 $\deg(\omega) = 1$ なる $\omega \in N_2(W)$ は ω^0 以外には存在しないことがわかる。ゆえに、 ω^0 を初期点として $G(W)$ に基本アルゴリズムを適用することによって、 $G(W)$ の無限パスが得られる。対応する W 上のパスを W^0 であらわす。

ある有界開集合 U が存在して、 W^0 が $U \times (0, 1]$ に含まれると仮定しよう。各 $t \in (0, 1]$ に対して、 $cU \times [t, 1]$ は $R^n \times (0, 1]$ に含まれる有界閉集合となる。補題 2-2 より、 $cU \times [t, 1]$ は高々有限個の $\sigma \in \rho J_3$ としか交わらない。このことは $W^0 \cap \{cU \times [t, 1]\}$ 内には高々有限個の節点 $\omega \in N_2(W)$ しか存在しないことを意味している。ゆえに、パス W^0 は高々有限個の $\sigma \in \rho J_3$ を通った後にならず超平面 $R^n \times \{t\}$ と交わる。これは任意の $t \in (0, 1]$ に対して成立する。よって、 W^0 内に点列 $\{(x^k, 2^{-k}) : k = 0, 1, \dots\}$ をとることができる。十分大きな k に対して、 x^k を含む $\sigma \in \rho J_3$ の各頂点 v で $\alpha(\|v - x^0\|) > 2^{-k}$ が成り立つ。このような k に対しては、 H の定義より

$$0 = H(x^k, 2^{-k}) \in co\{f(v) : v \in \sigma\}$$

ゆえに x^k は方程式系(41)の近似解となっている。

条件(51)を

$$(51)' \quad H(x, t) \equiv 0 \quad ((x, t) \in bdU \times (0, 1])$$

で置き換えると、定理 5-1 がここで考えている W^0 に対しても成立する。また、系 5-1 はそのまま成立する。証明は Merrill の方法の場合と同様なので省略する。さらに、(53)のように f, g をとることによって、連続写像 $\varphi : X \rightarrow X$ の不動点を近似することができる。

上で述べた Continuous deformation 法では、方程式系(41)の解から遠いとき (t が 1 に近いとき)には 1 反復あたりの歩み幅が大きく、かつ、解に近づくにつれて (t が 0 に近づくにつれて) 1 反復あたりの歩み幅が次第に小さくなるように自動調節がなされている。これが計算効率を高めるのに有効に働く。

5.4 パス W^0 の計算について

Merrill の方法あるいは Continuous deformation 法において、パス W^0 はどのようにして計算されるのだろうか。これら 2 つの方法では左辺が単体写像からなる区

分的線形方程式系を対象としている。それらをより一般的に

$$(60) \quad H(y) = c \quad (y \in C)$$

と書くことにしよう。ただし、 $C \subset R^{n+1}$ は $\text{int}C \neq \emptyset$ なる凸集合、 K は C の単体分割、 $H : |K| \rightarrow R^n$ は単体写像、 $c \in R^n$ とする。(60)の解集合 $W = \{y \in C : H(y) = 0\}$ に含まれるパスを計算するときには、(60)の代わりにそれと同値な線形方程式系の族

$$(61-\sigma) \quad \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j H(v^j) = c, \quad \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (j = 0, \dots, n+1)$$

$$\text{ただし, } \sigma = co\{v^0, v^1, \dots, v^{n+1}\}$$

($\sigma \in K$) をあつかう。 $\sigma \in K$ を 1 つ固定すると、(61- σ) の解 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ の集合は有界であり、かつ、非退化の仮定のもとで (61- σ) はちょうど 2 つの基底解 λ^1 と λ^2 をもつ。 λ^1 と λ^2 は変換 $\lambda \rightarrow y = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j v^j$ を通して、 σ の n 次元フェイス τ^1, τ^2 に含まれる W の点 y^1, y^2 に対応しており、 $W \cap \sigma = co\{y^1, y^2\}$ となっている。4.3 節で線形方程式系の族 (31- S) ($S \subset N$) に対して行なったのと同様の議論が (61- σ) に対しても展開できる。結局 (61- σ) ($\sigma \in K$) の基底の交換を連続して行なうことによって W に含まれるパスあるいはループが計算される。この過程は線形計画法に対する改訂シンプレックス法と非常によく似た形となる。

おわりに

不動点と相補性の理論を総合的にあつかった文献としては、[23], [28], [34], [37], [38] 等がある。なかでも、不動点と相補性の理論の統一は [34] によってなされた仕事であり、[28] はそれをさらに発展させている。本稿もこの 2 つに負うところが大きい。また [28] の参考文献には 200 編以上がリストされており 1975 年以前の関連した論文のほとんどすべてをカバーしている。[23] は著者 Todd の単体分割に関するすぐれた仕事を含んでいる。[38] には本稿ではふれなかった Scarf [21] の方法や Eaves [33] の方法についての解説もなされている。(了)

参考文献 (つづき)

- [33] B. C. Eaves, An odd theorem, *Proc. of AMS* 26(1970)509-513.
- [34] B. C. Eaves and H. Scarf, The solution of systems of piecewise linear equations, *Math. of OR* 1(1976)1-27.
- [35] M. L. Fisher and F. J. Gould, A simplicial algorithm for the nonlinear complementarity problem, *Math. Prog.* 6(1974)281-300.

- [36] H. J. Lüthi, A simplicial approximation of a solution for the nonlinear complementarity problem, *Math. Prog.* 9(1975)278-293.
- [37] H. J. Lüthi, *Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie*, Springer, 1976.

- [38] 西野寿一, 小島政和, 最近の不動点algorithmについて, 計測と制御14(1975)175-184.
- [39] L. S. Shapley, On balanced games without side payments, in *Mathematical Programming* ed. by T. C. Hu and S. M. Robinson, Academic Press, New York(1973)261-290.
- (こじま・まさかず, 東京工業大学理学部情報科学科)

学生論文

県レベル土地利用基本計画の作成方法に関する研究 (修士論文)

——千葉県におけるケース・スタディを中心として——

本研究は, 土地利用計画策定の方法論である。現在, 大都市および地方において土地利用に関連して生じた諸問題や混乱はいちじるしいものとなっている。県レベルの土地利用基本計画は, 従来とかく対症療法的な施策の積み重ねになりがちだった土地利用を総合的な計画の段階に引き上げるものである。

ここでいう県レベル土地利用基本計画は, つぎの2つの方向へ応用・発展することをめざしている。

第1に, 都市計画法, 農振法等によって定められた地域指定の重複地域に対し, 相互の調整の指針を与える。したがって, 都市的土地利用から農業, 森林, 観光レクリエーション, 自然保護的土地利用にいたる広汎な土地利用を共通の場にならべて評価する。

第2に, 地域の理想的な土地利用将来像を示し, 土地利用転換の規制といった土地政策や, 都市整備・農地基盤整備などの公共投資に指針を与える。

本研究は, こうした県レベル土地利用基本計画の策定の方法を検討し, 策定方法を呈示して, ケース・スタディを行なったものである。

土地利用を考える際に留意しなければならないのは, 土地の資源としての特殊性である。土地は全体としての供給がきわめてかぎられた貴重な資源であり, 可能なかぎり土地の有効な利用がなされる必要がある。しかも, 自然生態系の長期的なバランスを維持することが期待され, 公害や災害に関し十分に配慮がなされなければならない。また, 土地を社会的に効率よく利用し得る可否かは, 経済の発展や生活福祉の維持・改善にとっても大きな影響力をもっている。

これらをふまえて, 本研究は県レベル土地利用基本計画の策定フレームとして土地の供給条件の把握, 土地需要の趨勢の把握, それらの調整・評価の3つのプロセスを設定し, 構成する。とくに, 土地の供給条件を把握するプロセスの中心に分級を考え, 土地分級評価方法の比

較検討を行なう。さらに, 調整・評価のプロセスで, 供給と需要の結合および政策や計画的視点の導入の方法を論ずる。各プロセスの概要は, 以下のようである。

(1) 土地の供給条件の把握プロセス

土地の資源そのものの内容を明らかにするプロセスであり, 地形や地質等の土地の特性を把握, 総合化して, 一定の土地利用目的にそってグレーディングする。分級は, その方法であり, 土地単位のとり方, 因子の選択法, 因子の総合化等の方法にさまざまなものが考えられる。本研究では, 分級方法をモルフォロジカル・アナリシスによって比較検討し最適な方法を示し, 分級方法をケース・スタディで呈示して実際に行なう。

(2) 土地需要の趨勢の把握プロセス

土地利用の需要は, 地域の人口, 就業構造などや将来計画が土地利用面積規模のレベルにまでブレイク・ダウンして発生する。土地利用の変動を把握して, 評価のプロセスと連結する。

(3) 調整・評価プロセス

土地利用間の制約条件を満たし, 可能な土地利用パターンのなかから最適な土地利用パターンを選択することである。ここでは, 土地供給を所与として土地利用を規定してゆく供給先決方式を採用する。土地利用パターンが与える各種指標のトレード・オフ関係から, いくつかの代替案をしばり, 需要や政策・計画的視点から最良の土地利用パターンを選択する。

以上, 土地利用計画策定を構成する3つのプロセスの概要を述べたが, これによって実現された土地利用基本計画は, 土地資源の保全と有効利用の条件を満たして, 残された自由度のなかで計画や政策の視点を導入したものである。なお, ケース・スタディは, 千葉県君津都市広域圏を取り上げ, 県レベルの計画の一部として実際に行なった。

(大谷 清, 東京工業大学 社会工学科)

フォーラム