

不動点と相補性の理論 (2)

小 島 政 和

前回の後半では多面体, 単体, 分割, 区分的線形写像など, CP法に必要な概念を導入した. 今回はCP法の統一的な枠組を説明し, 前回の前半で述べたグラフの原理がその中でどのように働くかを明らかにする.

3. CP法の統一的な枠組

3.1. ホモトピーの導入

f を $X \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像として, 非線形(連立)方程式系

$$(4) \quad f(x) = 0 \quad (x \in X)$$

を考える. CP法は「既知な x^0 をもつ補助方程式を連続的に方程式系(4)まで変形し, x^0 を初期点として変形された方程式の解を追跡して, 方程式系(4)の未知な解に到達する」という考え方にもとづいている. これを少しくわしく説明しよう. $g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ を, 既知な $x^0 \in X$ に対して

$$(5) \quad g(x^0) = 0$$

を満たす連続写像とする. 条件

$$(6) \quad h(x, 0) = g(x), \quad h(x, 1) = f(x) \quad (x \in X)$$

を満たす連続写像 $h: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ を g と f の間のホモトピーとよぶ. たとえば, 任意に固定した $x^0 \in X$ に対して, $g(x) = f(x)$ ($x \in X$), $h(x, t) = (1-t)g(x) + tf(x)$ ($(x, t) \in X \times [0, 1]$) と定めると, g, h は(5)および(6)を満たす. $x_1, x_2, \dots, x_n$ と t を変数とする方程式系

$$(7) \quad h(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in X \times [0, 1])$$

を考える. (7) は n 本の実方程式 $h_i(x, t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) より構成されており, 方程式の数 n よりも変数の数 $n+1$ のほうが1つだけ多い. したがって, 適当な条件のもとでは, (7)の解の集合 $V = \{(x, t) \in X \times [0, 1] : h(x, t) = 0\}$ は1次元の自由度をもった曲線の集まりとなることが予想される. (5)と(6)より, $(x^0, 0) \in V$ である. この点 $(x^0, 0)$ を初期点として V 内の曲線上を動いてある

$(\bar{x}, 1)$ に到達できれば, (4)の解 $\bar{x}$ が求まることになる. この考え方は解析的な手法(たとえば[25], [26])でも利用されているが, CP法は解析的な手法よりもその構造が堅固にできており, f, g やそれらの間のホモトピー h の微分可能性を必要としないばかりでなく, 2点 $(x^0, 0)$ と $(\bar{x}, 1)$ を含む V の連結成分が1本の曲線にならないような場合(図3-1)もあつかえる([30]参照).

f と g の間のホモトピー h のパラメータ t の定義域が区間 $[0, 1]$ になっているのは本質的なことではない. 要するに, ある区間 T 内の2点 a, b に対して, $h(x, a) = g(x)$ ($x \in X$), $h(x, b) = f(x)$ ($x \in X$) を満たす連続写像 $h: X \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ であれば, 上述の考え方は有効である(0を a で, 1を b で置き換える). これ以後はこのような h を含めてホモトピーという語を使うことにする.

3.2. 区分的線形方程式系

CP法はホモトピーの考え方を利用していることを述べてきたが, $V = \{(x, t) \in X \times [0, 1] : h(x, t) = 0\}$ をどのように近似するかがつぎの焦点となる. CP法ではホモトピー $h: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ を区分的線形写像 $H: X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ で近似する.

$$G(x) = H(x, 0), \quad F(x) = H(x, 1) \quad (x \in X)$$

と置くと, G と F は区分的線形で, それぞれ, g と f の近似になっている. $H: X \times [0, 1]$ は G と F の間のホモトピーになっている. 方程式系(7)は区分的線形方程式系

$$(8) \quad H(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in X \times [0, 1])$$

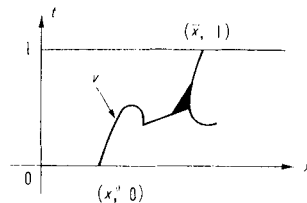


図3-1

で近似され、 V はその解集合 $W=\{(x,t)\in X\times[0,1]: H(x,t)=0\}$ によって近似される。

(8)を少し一般的にした区分的線形方程式系

$$(9) \quad H(y)=c \quad (y\in C)$$

を考える。ただし、 $H:|K|\rightarrow R^n$ は区分的線形写像、 K は $\text{int } C\neq\emptyset$ なる凸集合 $C\subset R^n$ の分割、 $c\in R^n$ は定数ベクトルである($c=0$, $C=X\times[0,1]$ にとり、変数 y を (x,t) であらわすと(9)は(8)に一致する)。(9)の解集合を W であらわそう。 $H: X\times[0,1]\rightarrow R^n$ は各 $\sigma\in K$ 内で線形であるから、 H を各 $\sigma\in K$ に限定した場合、 $(n+1)\times n$ 行列 $A(\sigma)$ と $b(\sigma)\in R^n$ を用いて

$$H(y)=A(\sigma)y+b(\sigma) \quad (y\in\sigma)$$

とあらわすことができる。

非退化の仮定: $\sigma\cap W\neq\emptyset$ なる $\sigma\in K$ に対して

(a) $\text{rank } A(\sigma)=n$

(b) W は σ の $n-1$ 次以下のフェイスとは交わらない。

非退化の仮定が成立する場合区分的線形方程式系(9)は非退化、そうでない場合には(9)は退化しているという。ここで、非退化の仮定の正当性について考察しておく。

$L_1=\{\sigma\in K: \text{rank } A(\sigma)\leq n-1\}$, $L_2=\{\tau: \tau \text{ は } \sigma\in K \text{ の } n-1 \text{ 次元以下のフェイス}\}$ と置く。 L_1 , L_2 はいずれも、高々可算個の要素よりなる集合である。 $\sigma\in L_1$ とすると、 $\text{rank } A(\sigma)\leq n-1$ より、集合 $\{H(y): y\in\sigma\}=\{A(\sigma)y+b(\sigma): y\in\sigma\}$ は R^n の $n-1$ 次元アフィン部分空間 $\{A(\sigma)y+b(\sigma): y\in R^{n+1}\}$ に含まれる。このことは、集合 $\{H(y): y\in\sigma\}$ の R^n 上でのルベグ測度(1次元の長さ、2次元の面積、3次元の体積の拡張)が0であることを意味している。 L_1 は高々可算個であるから、集合 $\{H(y): y\in\sigma'\in L_1\}$ のルベグ測度も0になる。また $\tau\in L_2$ は R^{n+1} の $n-1$ 次元以下のアフィン部分空間に含まれるから、 τ の H による像 $\{H(y): y\in\tau\}$ は R^n の $n-1$ 次元以下のアフィン部分空間に含まれる。したがって、その高々可算個の和よりなる集合 $\{H(y): y\in\tau\in L_2\}$ のルベグ測度は0になる。ゆえに、任意に与えられた $c\in R^n$ が測度0の集合 $\{H(y): y\in\tau\in L_1\cup L_2\}$ に含まれるのはきわめてまれにしか起こらないといえる。 c が集合 $\{H(y): y\in\tau\in L_1\cup L_2\}$ に含まれる場合が区分的線形方程式系(9)が退化する場合に対応し、それ以外の場合は(9)は非退化である。ゆえに、非退化の仮定は合理的なものであるといえる。さらに、ある $c\in R^n$ に対して(9)が退化する場合でも、

c のいくらでも近くに区分的線形方程式系

$$(9)' \quad H(y)=c'$$

が非退化となるような $c'\in R^n$ が存在することが上の議論からわかる。しかしながら、そのような c' を実際に計算して求めることは容易ではない。計算上では、辞書式順序——線形計画法のシンプレックス法で退化の処理のために使われている——を導入することによって(9)が退化している場合を処理できるが、議論を複雑にするのでここでは省略する。くわしくは、[5], [9], [28]等参照。

さて、以下では区分的線形方程式系(9)が退化していないとして、その解集合 W について調べよう。いま、ある $\sigma\in K$ に対して、 $\sigma\cap W\neq\emptyset$ とすると、非退化の仮定の(a)より、集合

$$L=\{y\in R^{n+1}: A(\sigma)y+b(\sigma)=c\}$$

は R^{n+1} 内の直線(1次元アフィン部分空間)となり、 $\sigma\cap W$ はその直線 L と多面体 σ の共通部分ということになる。非退化の仮定の(b)より、つぎの(i)~(iv)のいずれかただ1つが成立する(図 3-2)。

- (i) σ の n 次元フェイス τ が存在して、 $L\subset\tau$, $W\cap\sigma=L$ は直線。
- (ii) $L\subset\text{int } \sigma$. $W\cap\sigma=L$ は直線。
- (iii) σ の n 次元フェイス τ_0 と $x^0\in L\cap\text{rel. int } \tau_0$ が存在して、 $[L-\{x^0\}]\cap\sigma\subset\text{int } \sigma$. $W\cap\sigma$ は半直線。
- (iv) σ の相異なる n 次元フェイス $\tau_j(j=0, 1)$ と2点 $x^j\in L\cap\text{rel. int } \tau_j(j=0, 1)$ が存在して、 $L\cap\sigma=\text{co}\{x^0, x^1\}$. $W\cap\sigma$ は線分。

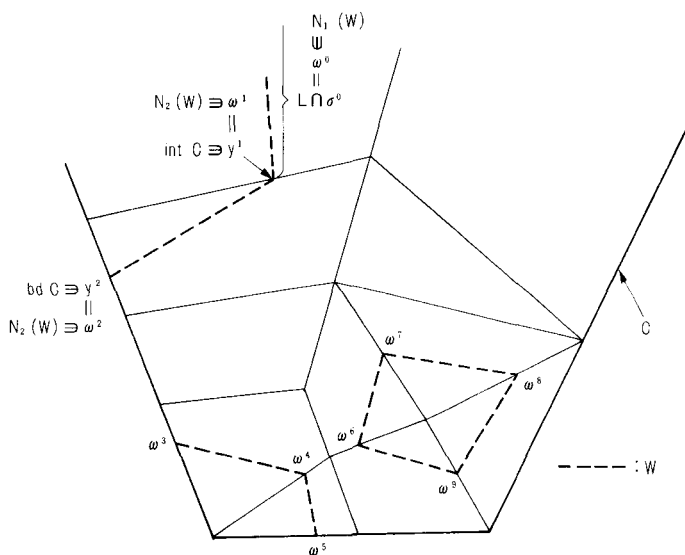


図 3-2

3.3. グラフ構造

区分的線形方程式系(9)の解の集合 W に対応したグラフ $G(W)$ を導入しよう(図3-2). グラフ $G(W)$ の節点の集合を $N(W)$, 枝の集合を $B(W)$ であらわすことにする. $N(W)$ は

$$\begin{aligned} N_0(W) &= \{W \cap \sigma : \sigma \in K, W \cap \sigma \text{ は直線}\} \\ N_1(W) &= \{W \cap \sigma : \sigma \in K, W \cap \sigma \text{ は } W \text{ の半直線}\} \end{aligned}$$

$$N_2(W) = \{y \in W : y \in \tau, \tau \text{ は } \sigma \in K \text{ の } n \text{ 次元フ$$

$$\text{ェイス}\}$$

$$N(W) = \bigcup_{i=0}^2 N_i(W)$$

のように定義される. 枝の集合 $B(W)$ は

$$B(W) = \{(\omega, \omega') : \omega, \omega' \in N(W) \text{ は共通の } \sigma \in K \text{ に含まれる}\}$$

によって定義される. C の多面体分割 K が有限 (K が有限個の多面体よりなる) であれば, $G(W)$ は有限グラフとなる. また K に含まれる各多面体 $\sigma \in K$ が有界であれば $N_0(W)$ と $N_1(W)$ は空になる. 明らかに

$$\begin{aligned} \deg(\omega) &= 0 \quad (\omega \in N_0(W)) \\ \deg(\omega) &= 1 \quad (\omega \in N_1(W)) \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立つ. $\omega = y \in N_2(W)$ が $C = |K|$ の境界に含まれている場合には, 非退化の仮定の(b)と補題の2-1より, y はちょうど1つの $\sigma \in K$ に含まれる. このことは $\omega = y$ の次数が1であることを意味している. ゆえに

$$(11) \quad \deg(\omega) = 1 \quad (\omega = y \in N_2(W), y \in bdC).$$

また, $\omega = y \in N_2(W)$ が $C = |K|$ の内点である場合には, 非退化の仮定の(b)と補題2-1より, y はちょうど2つの $\sigma, \sigma' \in K$ に含まれる. したがって, $y \in \sigma \cap \sigma' \cap W$. このことは, $\omega = y$ の次数が2であることを意味している. ゆえに

$$(12) \quad \deg(\omega) = 2 \quad (\omega = y \in N_2(W), y \in \text{int } C).$$

結局, (10), (11), (12)より

$$\deg(\omega) \leq 2 \quad (\omega \in N(W))$$

が成立する.

グラフ $G(W)$ のつくり方より, $G(W)$ を幾何学的な図形として見たとき, $G(W)$ と W は一致し, グラフ $G(W)$ の連結成分と集合 W の連結成分の間には自明な対応関係がある. ただし, $W \cap \sigma (\sigma \in K)$ の形の直線および半直線(Ray)が $G(W)$ では節点 $\omega \in N_0(W) \cup N_1(W)$ としてあつかわれていることに注意する必要がある. 1.2節で考察したことより, $G(W)$ の連結成分 G' はつぎの5つに分類される(3月号 p. 175(a)~(e)参照).

- (a) G' は $\omega^0, \omega^k \in N_1(W) \cup N_2(W)$ を端点とする有限パス.
- (b) G' はループ.

(c) G' は1つの節点 $\omega^0 \in N_0(W)$.

(d) G' は $\omega^0 \in N_1(W) \cup N_2(W)$ を端点とする無限パス.

(e) G' は端点のない無限パス.

集合 W の連結部分集合 W' がグラフ $G(W)$ のパス(あるいはループ)に対応しているとき, W' をパス(あるいはループ)とよぶことにする. 以上をまとめるとつぎの定理が得られる.

定理 3-1: 区分的線形方程式(9)が非退化であるならば, その解集合 W は高々可算本の互いに交わらないパスおよびループよりなる.

$\deg(\omega^0) = 1$ なる $\omega^0 \in N(W)$ を初期点としてグラフ $G(W)$ に基本アルゴリズム(1.2節)を適用することによって, $G(W)$ の連結成分((a)または(d)の場合)を生成することができる. 文献[28]では ω^0 を $N_1(W)$ から選ぶときを半直線スタート(Ray start), $\omega^0 = y^0 \in N_2(W)$, $y^0 \in bdC$ としたときを境界点スタート(Boundary start)とよんで区別している. 基本アルゴリズムが有限回の反復の後に $\omega^k \in N(W)$ で終了したとすると, $\deg(\omega^k) = 1$ でなければならない. (10), (11), (12)より, ω^k は $N_1(W)$ に属するか, あるいは, $\omega^k = y \in N_2(W)$, $y \in bdC$. 前者の場合を半直線終了, 後者を境界点終了とよぶ.

基本アルゴリズムのステップ4は ω^{k-1} を含まず $\omega^k = \bar{y} \in N_2(W)$ を含む $\sigma \in K$ に対して, 線形方程式

$$A(\sigma)y + b(\sigma) = c$$

を解くことによって実行できる. その解集合を L としたとき

$$\omega^{k+1} = \begin{cases} L \cap \sigma \in N_1(W) & (L \cap \sigma \text{ が半直線}) \\ \bar{y} \in N_2(W) & (L \cap \sigma = \text{co}\{\bar{y}, \bar{y}\}) \end{cases}$$

となる.

これまでの議論によってCP法の統一的な枠組および1.2節で述べたグラフ構造がその中でどのように用いられているかを理解いただけたものと思う.

これ以後の節では, 不動点と相補性の理論の分野で発展した個々のアルゴリズムをこの節で述べた枠組に沿って説明していく.

4. 相補計画問題

R^n で定義され R^n の値をとる連続写像 φ に対して

$$w = \varphi(z),$$

$$(13) \quad z \geq 0, \quad w \geq 0 \quad (\text{非負性})$$

$$w_i z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{相補性})$$

を満たす $(w, z) \in R^{2n}$ を求める問題を, 相補計画問題(Complementarity problem)という. 相補計画問題は, φ が $n \times n$ 行列 M と $q \in R^n$ を用いて

$$\varphi(z) = Mz + q \quad (z \in R^n)$$

とあらわされる場合、線形であるといわれ、それ以外の
場合、非線形であるといわれる。この問題の解の存在と
一意性については文献[2], [29], [31], [32]等で論じ
られている。ここでは、線形相補計画問題に対する Lemke
の方法とその方法の2次計画問題への応用につい
て述べる。この方法は1964年に Lemke-Howson[16]に
よって2人非零和行列ゲームの解法として提案されたも
ので、その後 Lemke[15]によって線形相補計画問題の
解法として拡張されている。また、Lemkeの方法は本稿
の主題であるC P法の発展の源をなしており、Lemke
の方法自身を Complementary pivoting 法とよんでいる
文献も多い。

4.1. Lemkeの方法

最初に相補計画問題を非線形方程式系に変換する。そ
のために新しい記号を導入する。 $x \in R^n$ に対して、 $x^+ =$
 $(x^+_1, x^+_2, \dots, x^+_n) \in R^n$, $x^- = (x^-_1, x^-_2, \dots, x^-_n) \in R^n$ を

$$x^+_i = \max\{0, x_i\} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$x^-_i = \max\{0, -x_i\} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

で定義する。さらに、 $f: R^n \rightarrow R^n$ を

$$(14) \quad f(x) = x^- - \varphi(x^+)$$

で定義し、非線形方程式系

$$(15) \quad f(x) = 0 \quad (i.e., \quad x^- = \varphi(x^+))$$

を考える。変換 $x \rightarrow x^+$ および $x \rightarrow x^-$ は連続であるか
ら f は連続関数となる。 x^+ と x^- のつくり方より

$$x^+ \geq 0, \quad x^- \geq 0 \quad (\text{非負性})$$

$$x^+_i x^-_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (\text{相補性}).$$

したがって、 $x \in R^n$ が(15)の解であれば $(w, z) = (x^-$,
 $x^+)$ は(13)を満たす。すなわち、 (w, z) は相補計画問題
の解となる。逆に、 (w, z) が(13)を満たせば

$$x_i = \begin{cases} z_i & (z_i > 0) \\ -w_i & (z_i = 0) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

で定義される $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ は(15)を満たす。ゆえ
に、(13)と(15)が同値であることが示された。そこで、
(13)のかわりに(15)を考える。

ここでは、線形相補計画問題をあつかっているから、
(15)は

$$(15)' \quad x^- - Mx^+ = q$$

と書ける。(15)' に人工変数 $t \in R_+$ を導入する：

$$(16) \quad x^- - Mx^+ - dt = q$$

ただし、 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in R^n$ はその要素 d_i がすべて
正の定数ベクトル。(16)の左辺を $H(x, t)$ であらわすと、
 H は $R^n \times R_+$ で定義され R^n の値をとる区分的線形写像
となる。実際、任意の $S \subset N \equiv \{1, 2, \dots, n\}$ ($S = \phi$ あるいは
 $S = N$ でもよい) に対して

$$\sigma(S) = \{(x, t) \in R^n \times R_+ : x_i \geq 0 (i \in S)$$

$$x_j \leq 0 (j \in S)$$

とすると、 $K = \{\sigma(S) : S \subset N\}$ は 2^n 個の多面体よりな
る $R^n \times R_+$ の分割で、 H は各 $\sigma(S)$ 上で

$$(17) \quad H(x, t) = \sum_{j \in S} I_j(-x_j) - \sum_{i \in S} M_i x_i + dt$$

とあらわされる。ただし、 I_j は $n \times n$ 単位行列 I の第 j
列、 M_i は M の第 i 列。ゆえに、(16)が非退化であると
すると、その解集合 $W = \{(x, t) \in R^n \times R_+ : H(x, t) = q\}$
は有限本の互いに交わらないパスおよびループになる。
 $(x^1, t^1) \in R^n \times R_+$ を

$$t^1 = \min\{t \in R_+ : q + dt \geq 0\},$$

$$x^1 = -(q + dt^1)$$

で定義する。このとき、 $(x^1, t^1) \in bd\sigma(\phi) \cap W$ 、また

$$(x^1 - d\Delta t, t^1 + \Delta t) \in W \cap \sigma(\phi) \quad (\Delta t \geq 0)$$

が成立することが(16)に代入することによって容易に確
かめられる。したがって、 W に対応するグラフ $G(W)$ を
つくると、 $\omega^0 = W \cap \sigma(\phi)$ は $N_1(W)$ に含まれる節点と
なる。

Lemkeの方法は「 ω^0 を初期点にして(半直線スタート)基本アルゴリズムをグラフ $G(W)$ に適用することによ
って、 $W \cap \sigma(\phi)$ を含む W のパス W^0 を計算する手法」
ということができる。 K は有限であるから、グラフ $G(W)$
は有限となる。よって、基本アルゴリズムは有限回の反
復の後に $\deg \omega^k = 1$ なるある $\omega^k \in N_1(W) \cup N_2(W)$ で終
了する。 $\omega^k \in N_2(W)$ のとき(境界点終了)には、 ω^k に対
応する W 上の点 (x^k, t^k) は $R^n \times R_+$ の境界 $R^n \times \{0\}$ 上
になければならない。すなわち、 $t^k = 0$ であり、 x^k は(15)'
の解となる。他方、 $\omega^k \in N_1(W)$ の場合(半直線終了)に
は Lemkeの方法によって(15)'の解は求まらなかったこ
とになる。

文献[2], [27], [32]等では Lemkeの方法によって
解ける線形相補計画問題のクラスが考察されている。そ
のうちの基本的なものを1つ紹介しよう。

$n \times n$ 行列 M はつぎの2つの条件を満たすとき、**co-**
positive plusであるといわれる([2])：

$$x \geq 0 \rightarrow x^T M x \geq 0,$$

$$(18) \quad x^T M x = 0, \quad x \geq 0 \rightarrow (M + M^T)x = 0.$$

ただし、 T は行列またはベクトルの転置をあらわす。ま
た

$$(19) \quad x \geq 0, \quad x \neq 0 \rightarrow x^T M x > 0$$

を満たすとき、行列 M は **strictly copositive** であると
いわれる。

補題 4-1： $n \times n$ 行列 M が **strictly copositive** であれば
 M は **copositive plus** でもある。 M が非負定値、すな
わち、任意の $x \in R^n$ に対して $x^T M x \geq 0$ であれば、 M は
copositive plus になる (M は対称行列でなくてもよい)。

証明：最初の主張は(18)と(19)を比較することより直接みちびかれる。 M を非負定値とすると、(18)の第一の条件は明らかに満たされる。さらに、 $x^T(M+M^T)x \geq 0$ ($x \in R^n$)も成立する。すなわち、 $M+M^T$ は対称な非負定値行列となる。よって、 $x^T M x = 0 \rightarrow x^T(M+M^T)x = 0 \rightarrow (M+M^T)x = 0$ (証明終わり)

定理 4-1: $n \times n$ 行列 M が copositive plus であるとする。このとき、Lemke の方法が半直線終了したならば、線形相補計画問題は解をもたない。

証明：Lemke の方法が $\omega^k \in N_1(W)$ で終了したとして、半直線 $\omega^k = W \cap \sigma(S)$ を、方向ベクトル $(\Delta x, \Delta t) \neq 0$ を用いて $W \cap \sigma(S) = \{(\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{t} + \theta \Delta t) : \theta \geq 0\}$ とあらわそう。すると

$$(20) \quad (\bar{x} + \theta \Delta x)^- - M(\bar{x} + \theta \Delta x)^+ - d(\bar{t} + \theta \Delta t) = q \\ (\theta \geq 0),$$

$$(21) \quad (\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{t} + \theta \Delta t) \in \sigma(S) \quad (\theta \geq 0)$$

が成立する。(21)より

$$(22) \quad (\bar{x}, \bar{t}) \in \sigma(S), (\Delta x, \Delta t) \in \sigma(S)$$

でなければならない。したがって、(20)より

$$(23) \quad \bar{x}^- = M\bar{x}^+ + d\bar{t} + q \\ \Delta \bar{x}^- = M\Delta \bar{x}^+ + d\Delta t.$$

簡単のために $u = \Delta x^+$ と置く。(22)より、 $u^T(\bar{x}^-) = (\Delta x^-)\bar{x}^+ = u^T(\Delta x^-)$ が成立するから、(23)を上関係に代入すると

$$(24) \quad u^T M \bar{x}^+ + u^T d\bar{t} + u^T q = 0 \\ u^T M^T \bar{x}^+ + (\bar{x}^+)^T d\Delta t = 0$$

および

$$(25) \quad u^T M u = -u^T d\Delta t \leq 0$$

が得られる。行列 M は copositive plus であるから、(18)と(25)より、 $u^T M u = u^T d\Delta t = 0$ 。 $d \in R^n$ のすべての要素は正であり、 $u \geq 0$ であるから、 $u = 0$ または $\Delta t = 0$ でなければならない。 $u = \Delta x^+ = 0$ と仮定すると、(23)と $(\Delta x, \Delta t) \neq 0$ より、 $\Delta x^- = d\Delta t > 0$ が成立する。これより、 $\Delta x^- = -\Delta x^- < 0$ 、 $S = \phi$ 、 $\omega^k = W \cap \sigma(\phi)$ がみちびかれ、 $\omega^k \neq \omega^0$ に矛盾する。ゆえに

$$(26) \quad \Delta x^- = M u \geq 0, 0 \neq u \geq 0, u^T M u = 0$$

再び(18)を用いると

$$(27) \quad u^T(M+M^T) = 0$$

が得られる。したがって、(24)と $\bar{t} > 0$ より

$$(28) \quad u^T q = -u^T d\bar{t} < 0$$

がみちびかれる。一方、線形相補計画問題に解 $(\hat{w}, \hat{z})$ があると仮定すると、明らかに、 $M\hat{z} + q \geq 0, \hat{z} \geq 0$ 。(26)より、 $u^T M\hat{z} + u^T q \geq 0$ かつ $u^T M^T \hat{z} \geq 0$ 。よって

$$u^T(M+M^T)\hat{z} + u^T q \geq 0$$

これは(27)、(28)と矛盾する。ゆえに、線形相補計画問題に解はないことが示された。(証明終わり)

系 4-1: $n \times n$ 行列 M が strictly copositive であるとする。Lemke の方法によって線形相補計画問題の解を求めることができる。

証明：Lemke の方法が半直線終了したとして矛盾をみちびけばよい。補題 4-1 により M は copositive plus になるので定理 4-1 の証明はすべて有効である。したがって、(26)が得られる。これは(19)に矛盾する。

(証明終わり)

4.2. 凸 2 次計画問題への応用

D を $p \times p$ の非負定値対称行列、 c を p 次ベクトル、 A を $r \times p$ 行列、 b を r 次元ベクトルとして、凸 2 次計画問題(以下 Q P と略)：

$$\min \quad u^T D u / 2 + c^T u \\ \text{subject to} \quad A u + b \geq 0, u \geq 0$$

を考える。 $\bar{u}$ が Q P の最適解であるための必要十分条件(いわゆる Kuhn-Tucker 条件)は、ある $\bar{v} \in R^r$ が存在して

$$(29) \quad D\bar{u} + c - A^T \bar{v} \geq 0, \bar{u} \geq 0, A\bar{u} + b \geq 0, \\ \bar{v} \geq 0, \bar{u}^T(D\bar{u} + c - A^T \bar{v}) = 0, \bar{v}^T(A\bar{u} + b) = 0$$

が成立することである(たとえば[2]参照)。 $n = p + r$ 、 $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$ として、 $n \times n$ 行列 M と n 次元ベクトル q を

$$(30) \quad M = \begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix}$$

で定義すると、(29)は

$$M\bar{z} + q \geq 0, \bar{z} \geq 0, \bar{z}^T(M\bar{z} + q) = 0$$

と書ける。したがって、Q P を解くことは(30)で定義される $n \times n$ 行列 M と n 次元ベクトル q をもった線形相補計画問題に帰着される。

系 4-2: (30)で定義される M と q をもった線形相補計画問題に Lemke の方法を適用したとする。このとき Q P の最適解 $\bar{u}$ が得られるか、または、Q P が最適解をもたないことが示される。

証明：Lemke の方法が半直線終了するときには線形相補計画問題に解がないことを示せばよい。このためには、補題 4-1 と定理 4-1 より、(30)で定義される $n \times n$ 行列 M が非負定値になることをいえば十分である。実際、任意の $z = (u, v) \in R^{p+r}$ に対して、 $z^T M z = u^T D u + v^T A u - u^T A v = u^T D u \geq 0$ が成立する。(証明終わり)

Q P に最適解がないということは、Q P の制約条件を満たす $u \in R^n$ が存在しないか、あるいは、制約条件を満たす u で目的関数をいくらでも小さくできるということの意味している。

4.3. パス W^0 の計算方法について

W のパス W^0 の具体的な計算方法について簡単にふれて

おこう。

(16)は各 $\sigma(S)$ 上で

$$\sum_{j \in S} I_j x^-_j - \sum_{i \in S} M_i x^+_i - dt = q, \quad (31-S)$$

$$x^-_j \geq 0 \quad (j \in S), \quad x^+_i \geq 0 \quad (i \in S), \quad t \geq 0$$

と書ける。 $(x, t) \in \sigma(S)$ を(31-S)の解とすると、非退化の仮定より、 (x, t) は $\sigma(S)$ の内点であるか、あるいは、 $\sigma(S)$ のある n 次元フェイスの相対内点になっている。したがって、 $\sigma(S)$ の定義より、 $n+1$ 個の要素 $x^-_j (j \in S)$, $x^+_i (i \in S)$, t のうち高々1個が0で、他はすべて正であることがわかる。ちょうど1つの要素が0で他の n 個の要素が正であるとすると、 $[x^-_j (j \in S), x^+_i (i \in S), t]$ は(31-S)の基底解になっている。すなわち、(31-S)にあらわれる $n+1$ 本の n 次元列ベクトル $\{I_j (j \in S), M_i (i \in S), d\}$ のうち正の要素と結びついた n 本の n 次元列ベクトルが一次独立になり、 R^n の基底を構成する。基底解は $N_2(W)$ の節点に対応している。(31-S)の解集合 $W \cap \sigma(S)$ が有界である場合には、 $W \cap \sigma(S)$ は2つの基底解の凸胞としてあらわすことができる。この場合、1つの基底解から0になっている要素に結びついた列ベクトルを基底に入れることによって、他の基底解を求めることができる。また $W \cap \sigma(S)$ が有界でない場合には、 $W \cap \sigma(S)$ は半直線になるが、(31-S)はちょうど1つの基底解をもち、その基底解の0になっている要素に結びついた列ベクトルを基底に入れようとする段階で半直線が得られる。

$S_1 = \phi$ と置く。われわれは、(31- S_1)の基底解である (x^1, t^1) から出発する。 $t^1 = 0$ である場合には、 x^1 が(15)'の解になる。それ以外の場合にはちょうど1つの i^* に対して、 $x^1_{i^*} = 0$, $x^1_j < 0 (j \neq i^*)$ となっている。 $S_2 = S_1 \cup \{i^*\} = \{i^*\}$ と置くと、 (x^1, t^1) は(31- S_2)の基底解でもある。上で述べた基底の交換によって、 $W \cap \sigma(S_2)$ が有界でない場合には半直線が得られ、反復は終了する。そうでない場合には、(31- S_2)の他の1つの基底解 (x^2, t^2) が得られる。 $t^2 = 0$ ならば反復は終了。それ以外の場合には、 (x^2, t^2) は $S_3 \neq S_r (r=1, 2)$ なる(31- S_3)の基底解になっているので、同様の反復を変数 t が0になるまで(d が基底から追い出されるまで)、あるいは、 $W \cap \sigma(S)$ の形の半直線を得るまでつづけることができる。これらの過程は線形計画法のシンプレックス法(あるいは改訂シンプレックス法)の基底の交換とまったく同様に行なわれる。新しく基底に入れる列ベクトルが、シンプレックス法の場合には目的関数を考慮して決定されるのに対して、Lemkeの方法では (w, z) の非負性と相補性よりみちびかれる分割 K の構造によってきめられている。

Lemkeの方法を拡張することによって、あるクラス
の非線形相補計画問題の近似解を計算することができ
る。(13)において、 $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ を非線形とする。このと
き、 R^n の単体分割(2.3, 2.4参照)を用いて、 φ を区分的
線形写像 Φ で近似すると、 $H(x, t) = x^- - \Phi(x^+) - dt$
で定義される $H: R^n \times R_+ \rightarrow R^n$ は区分的線形になる。し
たがって、非退化の仮定のもとで区分的線形方程式系
 $H(x, t) = 0$ の解集合 W は高々可算個のパスとループよ
りなる。 (x^1, t^1) を

$$t^1 = \min\{t \geq 0 : \Phi(0) + dt \geq 0\}$$

$$x^1 = -(\Phi(0) + dt^1)$$

で定義すると、 $(x^1, t^1) \in W$ 。さらに、半直線

$$W \cap \{x, t\} \in R^n \times R_+ : x \leq 0\}$$

$$= \{(x^1 - d \Delta t, t^1 + \Delta t) : \Delta t \geq 0\}$$

が得られる。この半直線は $N_1(W)$ の節点に対応してお
り、 $G(W)$ にこの節点を初期点にして基本アルゴリズム
を適用し、 W のパスを計算することができる。くわしく
は[9], [10]参照。

参 考 文 献 (つづき)

- [25] P. T. Boggs, The solution of nonlinear systems of equations by A-stable integration technique, *J. SIAM on Numer. Anal.* 8(1971) 767-785.
- [26] C. G. Broyden, A new method of solving nonlinear simultaneous equations, *Comput. J.* 12(1969)94-99.
- [27] B. C. Eaves, The linear complementarity problem, *Management Science* 17(1971)612-634.
- [28] B.C. Eaves, A short course in solving equations with PL homotopies, Technical Report, Dept. of Operations Research, Stanford University, September 1975.
- [29] M. Kojima, A unification of the existence theorems of the nonlinear complementarity problem, *Math. Prog.* 9(1975)257-277.
- [30] 小島政和, 不動点 Algorithm とその収束, オペレーションズ・リサーチ 21(1976)282-283.
- [31] N. Megiddo and M. Kojima, On the existence and uniqueness of solutions in nonlinear complementarity theory, to appear *Math. Prog.*
- [32] R. Saigal, On the class of complementary cones and Lemke's algorithm, *J. SIAM on Applied Math.* 23(1972)46-60.

(こじま・まさかず 東京工業大学理学部情報科学科)