

不動点と相補性の理論 (1)

小島 政和

「不動点と相補性の理論」は“Fixed points and complementarity theory”の和訳である。この理論は、1964年の Lemke-Howson の論文 [16] で与えられた 2 人非零和行列ゲームの解法を原点とし、相補計画問題 (Complementarity problem) と Brouwer の不動点を求める問題を中心として発展してきた数理計画の一分野である。

この分野で生まれた手法は Complementary pivoting algorithm (Lemke's method) [10, 15], Fixed points algorithm [4, 12, 21], Restart method (Merrill's method) [17], Continuous deformation method [5, 6], Sandwich method [14] 等の名称がつけられており、線形計画 [19], 2 次計画 [2, 3], 非線形計画 [18], ゲームの理論 [9, 20], 経済均衡論 [22], 非線形方程式 [7, 8], 代数方程式 [1, 13] 等に 응용されている。本稿は「不動点と相補性の理論」の統一的な枠組をやさしく解説することを目標としている。

複雑な議論はなるべく避け、例や図を多く用いてこの理論の本質を直観的に理解してもらえるように努める。以下では、不動点と相補性の理論にもとづいた手法をひとまとめにして CP 法とよぶことにする。

1. CP 法の基本原理

CP 法の統一的な枠組は数学的な準備をした後に与えることにして、その枠組の中で用いられている単純な原理をグラフの理論の用語を使って説明することからはじめよう。

1.1. グラフ, パス, ループ

G を節点(頂点)の集合 $N(G)$ とこれらを結ぶ枝(弧, 辺)の集合 $B(G)$ よりなるグラフとする。図 1-1 は節点の集合 $N(G) = \{1, 2, \dots, 8\}$ と枝の集合 $B(G) = \{a, b, \dots, h\}$ よりなるグラフ G を示している。

$N(G)$ が有限の要素よりなる場合には G は有限グラフ

であるとい、その他の場合、すなわち、 $N(G)$ が可算無限個の要素よりなるとき、 G は無限グラフであるという。枝 $a \in B(G)$ が節点 ω, ω' を結んでいるとき、 $a = (\omega, \omega')$ と書く。図 1-1 では $a = (1, 2)$, $b = (1, 3)$ 等。ここでは、すべての枝 $a \in B$ に方向のない無向グラフのみを考えるので (ω, ω') と (ω', ω) を区別する必要はない。

節点と枝の有限列

$$\omega^0 (\omega^0, \omega^1) \omega^1 (\omega^1, \omega^2) \dots \omega^{k-1} (\omega^{k-1}, \omega^k) \omega^k$$

を有限連鎖とよぶ。有限連鎖の中で、条件

$$(1) \quad \omega^i \neq \omega^j \quad (i \neq j)$$

を満たすものを $(\omega^0$ と ω^k を端点に持つ) 有限パスとよび、条件 $\omega^i = \omega^k$, $\omega^i \neq \omega^j$ ($0 \leq i < j < k$) を満たすものをループとよぶ。図 1-1 のグラフでは、 $1 a 2 f 5$ が 1 と 5 を結ぶ有限パス、 $1 a 2 d 3 b 1$ がループになっている。条件 (1) を満たす節点と枝の無限列

$$\omega^0 (\omega^0, \omega^1) \omega^1 (\omega^1, \omega^2) \dots$$

を端点 ω^0 を持つ無限パスとよぶ。条件 (1) を満たす節点と枝の無限列

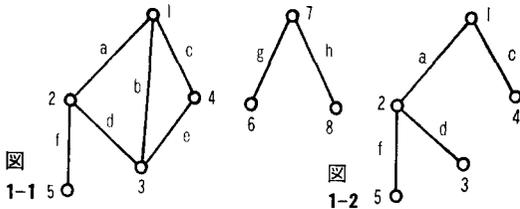
$$\dots \omega^{-1} (\omega^{-1}, \omega^0) \omega^0 (\omega^0, \omega^1) \omega^1 \dots$$

を端点を持たない無限パスとよぶ。有限パスと無限パスを合せてパスとよぶ。

$N(G)$ の部分集合と $B(G)$ の部分集合がグラフ G' を形成するとき、 G' はグラフ G の部分グラフであるといわれる。任意の 2 節点 $\omega, \omega' \in N(G')$ を端点とする有限パスが G' 内に存在するとき、部分グラフ G' は連結であるといわれる。連結部分グラフ G' に対して、 G' を含みかつ G' とは異なる任意の G の部分グラフが連結でないとき、 G' は G の連結成分であるといわれる。

図 1-2 のグラフは図 1-1 のグラフの連結部分グラフになっているが、連結成分にはなっていない。

節点 $\omega \in N(G)$ に直接結びついている枝の数をその節点 ω の次数といい $deg(\omega)$ であらわす。図 1-1 のグラフでは $deg(1) = 3$, $deg(5) = 1$ となっている。



1.2. CP法で使われるグラフ, 基本アルゴリズム

CP法の統一的な枠組のなかで用いられるグラフ G は条件 $deg(\omega) \leq 2$ ($\omega \in N(G)$) を満たす. すなわち, 各節点 $\omega \in N(G)$ に結びついている枝の数は多くとも2本である. このようなグラフ G の連結成分 G' はつぎの5つに分類される.

- (a) G' はある $\omega^0, \omega^k \in N(G)$ を端点とする有限パス
- (b) G' はループ
- (c) G' は1つの節点 $\omega^0 \in N(G)$
- (d) G' は $\omega^0 \in N(G)$ を端点とする無限パス
- (e) G' は端点のない無限パス

(図1-3). ただし, すべて節点および枝が陽に表現されている必要はなく, この段階で必要な情報は

- (i) ある $\omega^0 \in N(G)$
- (ii) $\omega \in N(G)$ がわかったとき, ω に結びついているすべての枝 $(\omega, \omega') \in B(G)$ を計算する規則

だけである. これらの情報を使って, つぎのアルゴリズムをグラフ G に適用して, パスあるいはループを生成することができる.

基本アルゴリズム

ステップ0: $P = \omega^0, k=0$ とする. $deg(\omega^0) = 0$ ならば終わり. その他の場合には, ω^0 に結びついている枝を1本選び, それを (ω^0, ω^1) とする.

ステップ1: $k=k+1, P = P(\omega^{k-1}, \omega^k)$ とする.

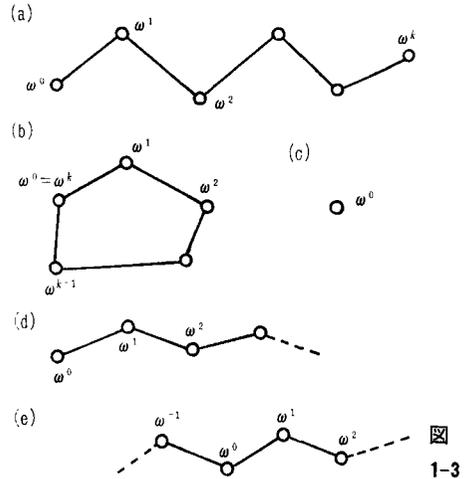
ステップ2: $\omega^k = \omega^0$ ならば終わり (P はループ).

ステップ3: $deg(\omega^k) = 1$ ならば終わり.

ステップ4: ω^k に結びつき, かつ, (ω^{k-1}, ω^k) とは異なる枝を求め, それを (ω^k, ω^{k+1}) とする. ステップ1へもどる.

$deg(\omega^0) = 0$ のときは, $P = \omega^0$ は G の連結成分となる. $deg(\omega^0) = 2$ の場合には, 基本アルゴリズムは有限回の反復の後にステップ2または3で終了するか, あるいは, 反復が無限回繰り返される. 通常ループをさけるために, $deg(\omega^0) = 1$ なる $\omega^0 \in N(G)$ を初期節点としてとる. この場合には, ステップ0で選ばれる枝 (ω^0, ω^1) は一意的に定まり, 生成されるパスは G の連結成分となる(図1-3, (a) または (d)). 与えられた問題に対して, 反復が有限回で終わるようにグラフ G が設計されている場

合には, 最終節点 ω^k は問題の解あるいは近似解に対応することになる. 反復が無限につづくように設計されている場合には, パス上の節点の列 $\{\omega^k\}$ は解に収束する近似解の列に対応することになる.



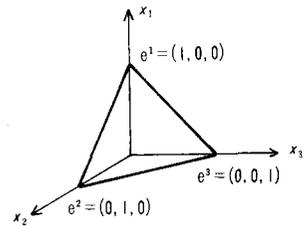
1.3. 簡単な例

3次元空間内の正三角形

$$\{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

を S であらわす(図1-4).

g を S で定義され S の値をとる連続写像とする. このとき, g の不動点, すなわち, $g(\bar{x}) = \bar{x}$ なる $\bar{x} \in S$ を近似的に求めよ(この問題を一般化したものがBrouwerの不動点を求める問題).



正三角形 S は3次元空間内の2次元平面

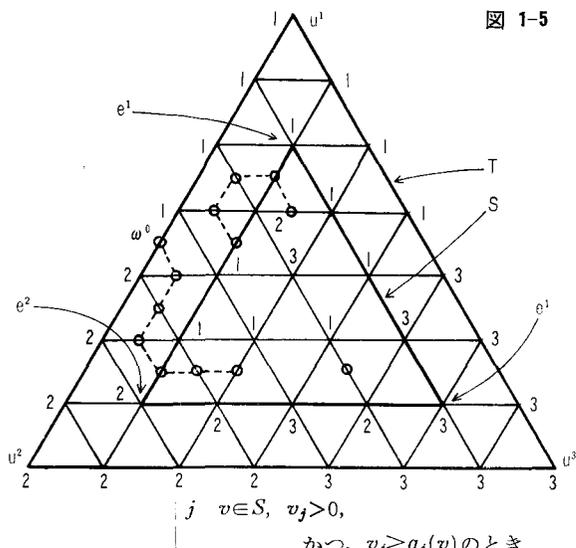
$$\{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

上にある. 図1-5のように, この2次元平面上で S を正三角形 T で囲んだ後に T を正三角形で分割する. 分割された小さい三角形を小三角形とよぶ. S は一辺の長さが $\sqrt{2}/m$ の m^2 個の正三角形で分割されている(図1-5では $m=4$).

各小三角形の頂点 v に対してつぎの規則にしたがってラベル $L(v) \in \{1, 2, 3\}$ をつける.

$$(2) \quad L(v) = \begin{cases} i & v \text{ が } T \text{ の境界上の点, かつ,} \\ & \|v - u^i\| \leq \|v - u^k\| \quad (k \neq i) \end{cases}$$

図 1-5



上の条件だけではラベル $L(v)$ が一意的に定まらない場合がおこる。そのときには、ラベル $L(v)$ の候補のなかでいちばん若い番号をとることにする。 S 内の小三角形 σ の頂点 v^1, v^2, v^3 のラベルがそれぞれ 1, 2, 3 と仮定すると、(2)より

$$v_j^j \geq g_j(v^j) \quad (j=1, 2, 3)$$

が成立する。したがって、 m が十分大きく σ の一辺が十分小さいときには、 g の連続性より、 σ 内の任意の x は

$$x_j \geq g_j(x) \quad (j=1, 2, 3)$$

を近似的に満たす。一方、 $x \in S$ かつ $g(x) \in S$ より

$$x_1 + x_2 + x_3 = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) = 1$$

ゆえに、 $g(x) \ni x$ がみちびかれ、 g の不動点を近似する問題が、ラベル 1, 2, 3 を持つ小三角形を求めることに変換された。 Σ をラベル 1, 2, 3 を持つ小三角形の集まりとする。

グラフ G を構成しよう。小三角形のラベル 1, 2 を持つ辺の中点の集合を節点 $N(G)$ の集合にとる。2つの節点共通の小三角形に属するときその2節点を枝で結ぶことによって有限グラフ G ができる。各節点はたかだか2個の小三角形にしか含まれ得ず、各小三角形はたかだか1本の枝しか含み得ないから、 $\deg(\omega) \leq 2 (\omega \in N(G))$ であることがわかる。より正確には

$$(3) \quad \deg(\omega) = \begin{cases} 0 & 2 \text{ つの } \sigma \in \Sigma \text{ に対して } \omega \in \sigma \\ 1 & 1 \text{ つの } \sigma \in \Sigma \text{ に対して } \omega \in \sigma \\ 1 & \omega \text{ が } T \text{ の境界に属するとき} \\ 2 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

ラベルのつけかたより、 T の境界に属する節点 ω は u^1 と u^2 を結ぶ線分上にある ω^0 のみである (図1-5)。したがって、 ω^0 を初期節点として基本アルゴリズムを適用することによって生成される有限パスにそって進めばある

$\omega \in \sigma \in \Sigma$ に到達できる。また、 G に含まれる有限本の有限パスの両端になっている節点の次数が1であることと、(3)を考慮することによって、 Σ に含まれる小三角形の個数が奇数であることもわかる(これを一般化したものが **Sperner の補題**, [12])。説明の都合上、グラフ G がすでにつくられているものと仮定したが、実際には、パス P を節点 ω^k まで進んだ時点で遭遇した小三角形の新しい頂点のラベルを調べ、新しくできるラベル 1, 2 を持った辺の中点を ω^{k+1} とすればよい(新しい頂点のラベルが3であれば $\sigma \in \Sigma$ が求まったことになる)。

上にあげた例は **Brouwer の不動点を求める問題と Sperner の補題** を2次元の三角形に限定して特殊な形であつかったものである。 **Brouwer の不動点** の存在は50年以上も前に証明されていたが、それを近似計算する方法は1967年に **Scarf** [21] が与えたものが最初である。上述の方法は **Kuhn** [12] にもとづいているが、 **CP法** の統一的な形はこの方法とはかなり異なった様相を呈する。これ以後しばらくは **CP法** の統一的なあつかいにねらいを定めて上の例を離れることにする。

2. 線形数学からの準備

n 次元ユークリッド空間を R^n であらわす。各 $x \in R^n$ は n 次元の縦ベクトルとするが、その要素(成分)との対応をとる必要がある場合には、紙面を節約するために、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と書く。 $U \subset R^n$ に対して、 $\text{int } U$, $\text{cl } U$, $\text{bd } U$ をそれぞれ U の内点よりなる集合、 U の閉包、 U の境界点 ($x \in \text{cl } U$ かつ $x \notin \text{int } U$ なる点 x) よりなる集合とする。 $x, y \in R^n$ に対して、不等号 “ \geq ” を

$$x \geq y \leftrightarrow x_i \geq y_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

で定義する。 R^n の非負象限

$$\{x \in R^n : x \geq 0\}$$

を R^n_+ であらわす。とくに $n=1$ のときは、 R^1 (実数の集合) および R^1_+ (非負の実数の集合) を R および R_+ であらわす。 R 上の开区間、半开区間、閉区間に対しては

$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

等の記号を用いる。

2.1. 凸集合, 多面体, 単体

$A \subset R^n$ が条件

$$x, y \in A, \lambda \in R \rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

を満たすとき、 A を R^n のアフィン部分空間であるという。2次元平面 R^2 上の1個の点や1本の直線(原点を通らなくてもよい)は R^2 のアフィン部分空間になる。各

$x^0 \in A$ に対して, 集合

$$\{x - x^0 : x \in A\}$$

は R^n の線形部分空間となるが, この線形部分空間の次元をアフィン部分空間 A の次元とし, $\dim A$ と書く (図 2-1).

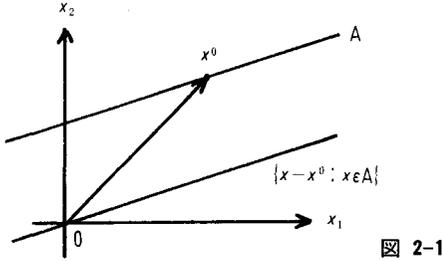


図 2-1

$C \subset R^n$ が条件

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in C \\ \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\} \longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

を満たすとき, C は凸集合であるという (図 2-2 は凸集合の例, 図 2-3 は凸集合でない例). 定義より, R^n のアフィン部分空間は凸集合となる. C を含む最小次元のアフィン部分空間を $\text{aff } C$ であらわす. 実際には

$$\text{aff } C = \{\lambda x + (1-\lambda)y : x, y \in C, \lambda \in R\}$$

となる (図 2-4). $\text{aff } C$ の次元をもって, 凸集合 C の次元とし, $\dim C$ と書く. 凸集合 $C \subset R^n$ の $\text{aff } C$ に関する相対的な内点の集合を $\text{rel. int } C$ で, 相対的な境界点の集合を $\text{rel. bd } C$ であらわす (図 2-4 では, $x \in \text{rel. int } C, y \in \text{rel. bd } C$). 凸集合 $C \subset R^n$ が空でないならば $\text{rel. int } C \neq \emptyset$ が成立する.

任意の $U \subset R^n$ に対して, U を含む最小の凸集合を U の凸胞といい, $\text{co } U$ であらわす. 実際には,

$$\text{co } U = \bigcap \{C \subset R^n : U \subset C \text{ かつ } C \text{ は凸}\}$$

となる. 図 2-5 は図 2-3 の集合の凸胞を示している.

$P \subset R^n$ が, $m \times n$ 行列 A と $b \in R^m$ を用いて

$$P = \{x \in R^n : Ax \geq b\}$$

とあらわされるとき, P を多面体とよぶ. 通常は, P が有界である場合のみ多面体という術語を用いるが, こ

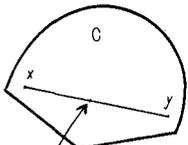


図 2-2 $(1-\lambda)x + \lambda y$

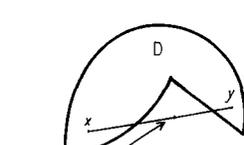


図 2-3 $(1-\lambda)x + \lambda y \notin D$

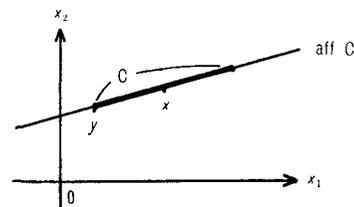


図 2-4

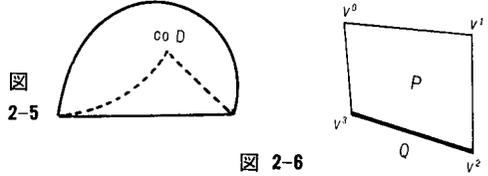


図 2-5

図 2-6

こでは P が有界でない場合にもこの術語を流用する. $R^n, R^n_+,$ や図 2-6 に示された P は多面体である. 多面体は凸集合であるから, $\text{aff } P, \dim P, \text{rel. int } P, \text{rel. bd } P$ が定義される.

多面体 P の部分集合 Q が, 条件

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in P, \lambda \in (0, 1) \\ (1-\lambda)x + \lambda y \in Q \end{array} \right\} \longrightarrow x, y \in Q$$

を満たすとき, P のフェイスであるという. 定義より, P は P のフェイスとなる. 多面体 $P \subset R^n$ のフェイス Q はまた多面体となる. 図 2-6 は 2 次元多面体 P の 4 つの 0 次元フェイス v^0, v^1, v^2, v^3 と 1 次元フェイス Q を例示している. 1 つの多面体のフェイスの数は有限である. 0 次元フェイスは頂点ともよばれる.

多面体 $P \subset R^n$ が有界である場合には, P は有限個の頂点の凸胞 $\text{co}\{v^0, v^1, \dots, v^m\}$ で P をあらわすことができる (図 2-6 では $m=3$). 逆に, 有限個の点 $v^0, v^1, \dots, v^m \in R^n$ の凸胞は有界な多面体となる.

とくに, m 本の n 次元ベクトル

$$v^i - v^0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

が 1 次独立 (線形独立) である場合には, 多面体

$$S = \text{co}\{v^0, v^1, \dots, v^m\}$$

を m -単体 (あるいは, m を略して, 単体) とよぶ. m -単体 ($m \geq 4$) は, 点 (0-単体), 閉区間 (1-単体), 三角形 (2-単体), 四面体 (3-単体, 図 2-7) の高次元への拡張になっている. m -単体 S の次元 $\dim S$ は m となる. Q が S のフェイスであるための必要十分条件は, Q が集合 $\{v^0, v^1, \dots, v^m\}$ の部分集合の凸胞としてあらわされることである. したがって, S のフェイスは単体となる. とくに, v^0, v^1, \dots, v^m は S の頂点 (0-単体) のすべてである.

任意の $x \in S$ は S の頂点の凸結合として一意的にあらわされる. すなわち, 各 $x \in S$ に対して

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i=0, 1, \dots, m), \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$$

なる実数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ が一意的に対応して

$$x = \sum_{i=0}^m \lambda_i v^i$$

と書ける. $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ を x の S における重心座標とよぶ. 図 2-8 の例では, $\lambda_0=1/4, \lambda_1=1/4, \lambda_2=1/2$.

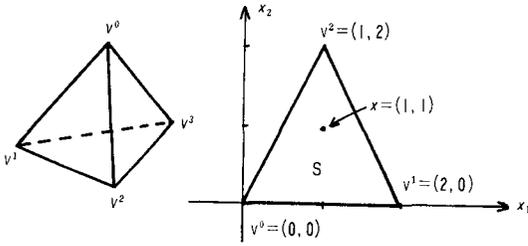


図 2-7

図 2-8

2.2. 空間分割

$C \subset R^n$ を $\dim C = m$ なる凸集合とする. 有限あるいは可算個の m 次元多面体の族 (集まり) K はつぎの 3 つの条件を満たすとき C の (多面体) 分割であるといわれ

$$C = \bigcup \{ K \}$$

と書く.

(i) $C = \bigcup \{ \sigma : \sigma \in K \}$

(ii) 任意の $\sigma^1, \sigma^2 \in K$ に対して, $\sigma^1 \cap \sigma^2$ は空であるかまたは σ^1 と σ^2 の共通のフェイスとなっている

(iii) K は局所有限である. すなわち, 任意の $x \in C$ に対して, x の R^n における開近傍 U が存在して, U と交わる $\sigma \in K$ はたかだか有限個しか存在しない

K が有限個の m 次元多面体よりなるときは, K は有限であるといわれる. 図 2-9 は立方体の分割の例, 図 2-10 は 3 次元空間内におかれた正方形の分割の例, 図 2-11 は分割になっていない例を示している.

これらの例より, つぎの補題が類推されよう.

補題 2-1: K を $\dim C = m$ なる凸集合 $C \subset R^n$ の分割とする. τ を $\sigma^1 \in K$ の $m-1$ 次元フェイスとする. このとき

(a) $\tau \subset \text{rel. bd } C$ ならば τ を含む $\sigma \in K$ は σ^1 の他には存在しない (図 2-12).

(b) $\tau \not\subset \text{rel. bd } C$ ならば τ を含む $\sigma \in K$ は σ^1 の他にちょうど 1 個存在する (図 2-13)

証明は [Theorem 2.3, 23] 参照. ここで, 条件 (iii)

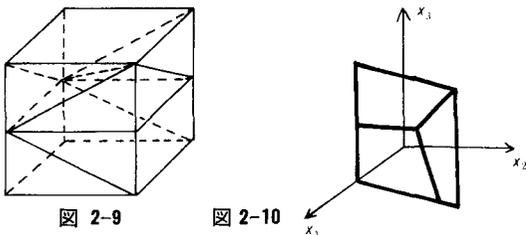


図 2-9

図 2-10

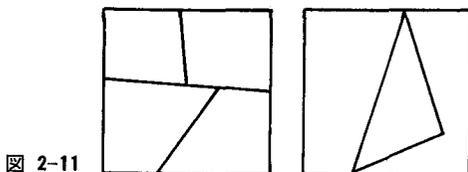


図 2-11

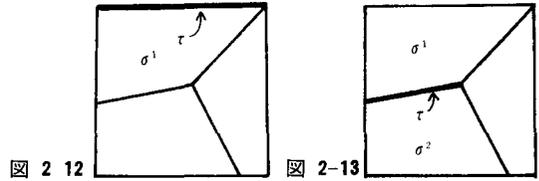


図 2-12

図 2-13

は補題の成立のために必要であることをみておこう.

$$C = [-1, 1]$$

$$K = \{ [-1, 0], [1/(k+1), 1/k] \ (k=1, 2, \dots) \}$$

とすると, K は条件 (i) および (ii) を満たすが, (iii) は満たさない. 実際, $x=0$ のどんな開近傍も K の無限個の要素と交わりをもつ. $x=0$ は K に含まれる 1 次元多面体 $[-1, 0]$ の 0 次元フェイスであり, かつ $x=0 \notin \text{rel. bd } C$ となっているにもかかわらず, $x=0$ を含む K に属する 1 次元多面体は $[-1, 0]$ のほかにはない. すなわち, (b) が成り立っていない.

補題 2-2: K を凸集合 $C \subset R^n$ の分割とする. このとき, 任意の有界閉集合 $B \subset C$ に対して, $B \cap \sigma \neq \emptyset$ なる $\sigma \in K$ はたかだか有限個である.

証明: 条件 (iii) より, 各点 $x \in B$ の開近傍 $U(x)$ が存在して, $\sigma \cap U(x) \neq \emptyset$ なる $\sigma \in K$ を有限個にできる. 一方, B は有界閉集合であるから, 有限個の $x^1, x^2, \dots, x^k \in B$ が存在して, $U(x^1), U(x^2), \dots, U(x^k)$ の和集合で B をおおうことができる (証明終わり).

上の補題より, C が有界閉集合である場合には K が有限であることがわかる. しかし, その他の場合には K が有限であるとはかぎらない. たとえば

$$K = \{ [1/(k+1), 1/k] \ (k=1, 2, \dots) \}$$

は有界な半開区間 $(0, 1]$ の無限分割になっている.

とくに, 凸集合 $C \subset R^n$ の分割 K に属する多面体がすべて単体であるとき, K を C の単体分割であるという. 凸集合 $C \subset R^n$ の単体分割 K に対して, K^0 で K に属する単体のすべての頂点の集合をあらわす. 以下に, CP 法で使われている R^m の代表的な単体分割を 2 つ紹介する.

2.3. Kuhn の単体分割 K_1

K_1 の頂点の集合 K_1^0 を

$$K_1^0 = \{ v \in R^m : v_i \text{ は整数 } (i=1, 2, \dots, m) \}$$

で定義する. Π を $\{1, 2, \dots, m\}$ の順列の集まりとする. すなわち, 各 $\pi \in \Pi$ は集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ からその上への 1 対 1 写像である. e^i で第 i 要素が 1 で他のすべての要素が 0 である m 次元ベクトルをあらわす. K_1 はつぎの条件を満たす m -単体 σ の集まりとして定義される ([11]).

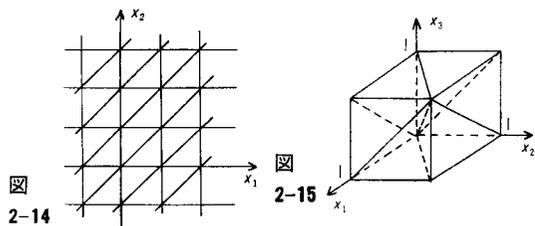
$$\pi \in \Pi,$$

$$v^0 \in K_1^0,$$

$$v^i = v^{i-1} + e^{\pi(i)} \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

$$\sigma = \text{co}\{v^0, v^1, \dots, v^m\}$$

図2-14は $n=2$ の場合を示し、図2-15は $n=3$ の場合に立方体 $\{x \in R^3 : 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2, 3)\}$ がどのように分割されるかを示している。 R^3 全体はこの立方体を x_1, x_2, x_3 軸方向に積み重ねた形で分割される。



2.4. Union Jack 分割 J_1

図2-16は 2次元平面 R^2 の Union Jack 分割 [23, 24] を示している。正方形 $\{x \in R^2 : 0 \leq x_i \leq 2 (i=1, 2)\}$ に注目すると、Union Jack (英国の国旗) の意味がはっきりする。

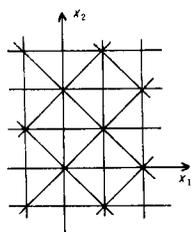


図 2-16

$$J_1^0 = K_1^0$$

$$J_1^{0c} = \{v \in J_1^0 : v_i \text{ は奇数 } (i=1, 2, \dots, n)\}$$

とする。各 $v \in J_1^{0c}$ は中心頂点とよばれている。 J_1 はつぎの条件を満たす m -単体の集まりとして定義される。

$$\pi \in \Pi,$$

$$s_i \in \{-1, 1\} \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

$$v^0 \in J_1^{0c}$$

$$v^i = v^{i-1} + s_i e^{\pi(i)} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

分割 J_1 を構成している各 m -単体は Kuhn の分割 K_1 で

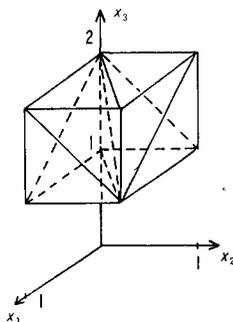


図 2-17

用いられているものと合同であるが、そのならべ方が異なっている。立方体 $\{x \in R^3 : 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2, 3)\}$ は図2-15のように分割されるが、その上に乗っている立方体 $\{x \in R^3 : 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2), 1 \leq x_3 \leq 2\}$ は図2-17のように分割されている。

2.5. 区分的線形写像

凸集合 $C \subset R^n$ 上で定義され R^k 上の値をとる連続写像 F は、 C のある分割 K が存在して K に属する各多面体上で線形であるとき、区分的線形であるといわれる。 F と結びつけた分割 K を明示するために $F: |K| \rightarrow R^k$ と書く。区分的線形写像 $F: |K| \rightarrow R^k$ を左辺にもつ方程式系 $F(x)=0$ は区分的線形方程式系とよばれる。とくに、 K が C の単体分割である場合には $F: |K| \rightarrow R^k$ を単体写像とよぶ。区分的線形写像はいわゆる折れ線関数の高次元への拡張になっている。図2-18は

$$F^1(x) = (1/2)x + 1$$

$$F^2(x) = x + 2, \quad F^3(x) = 1$$

$$F(x) = \max\{F^1(x), \min\{F^2(x), F^3(x)\}\}$$

で定義される区分的線形写像 $F: |K| \rightarrow R$ を示している。

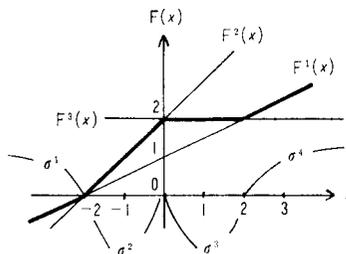


図 2-18

$C \subset R^n$ を $\dim C = m$ なる凸集合、 $f: C \rightarrow R^k$ を連続写像、 K を C の単体分割とする。各 $\sigma = \text{co}\{v^0, v^1, \dots, v^m\} \in K$ において重心座標 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ を持つ x 、すなわち

$$x = \sum_{i=0}^m \lambda_i v^i, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 (i=0, 1, \dots, m)$$

なる x に対して、

$$F(x) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f(v^i)$$

と定義すると、 F は各 $\sigma \in K$ で線形な R^k の値をとる連続写像となる。したがって、 $F: |K| \rightarrow R^k$ は単体写像で

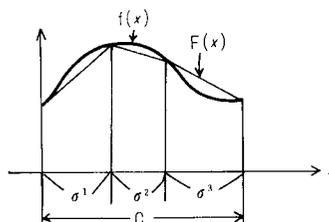


図 2-19

ある。このようにしてつくられた $F: |K| \rightarrow R^k$ を f の単体近似とよぶ(図2-19)。

参 考 文 献

- [1] 有馬直彦, 小島政和, 西野寿一, 不動点 Algorithm の代数方程式への応用について, 日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集, 113-114.
- [2] R. W. Cottle and G. B. Dantzig, Complementary pivot theory of mathematical programming, in *Mathematics of the Decision Science*, ed. by G. B. Dantzig and A. F. Veinott, Jr., American Mathematical Society, 1968.
- [3] B. C. Eaves, On quadratic programming, *Management Science* 17 (1971) 698-711.
- [4] B. C. Eaves, Computing Kakutani fixed points, *J. SIAM on Applied Math.* 21 (1971) 236-244.
- [5] B. C. Eaves, Homotopies for computation of fixed points, *Math. Prog.* 3 (1972) 1-22.
- [6] B. C. Eaves and R. Saigal, Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions, *Math. Prog.* 3 (1972) 225-237.
- [7] C. B. Garcia, Computation of solutions to nonlinear equations under homotopy invariance, Graduate School of Business, Univ. of Chicago (1975).
- [8] M. L. Fisher, F. J. Gould and J. W. Tolle, A simplicial approximation algorithm for solving nonlinear equations, to appear in *Proc. Conf. on Math. Prog. and Its Appl.*, National Institute of Higher Mathematics, City Univ., Rome, Italy (1974).
- [9] M. Kojima, Computational methods for solving the nonlinear complementarity problem, *Keio Engineering Reports* 27 (1974) 1-41.
- [10] M. Kojima, H. Nishino and T. Sekine, An extension of Lemke's method to the piecewise linear complementarity problem, *J. SIAM on Applied Math.* 31 (1976) 600-613.
- [11] H. W. Kuhn, Some combinatorial lemmas in topology, *IBM J. Research and Develop.* 4 (1960) 518-524.
- [12] H. W. Kuhn, Simplicial approximation of fixed points, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 61 (1968) 1238-1242.
- [13] H. W. Kuhn, A new proof of the fundamental theorem of algebra, *Math. Prog. Study* 1 (1974) 148-158.
- [14] H. W. Kuhn and J. G. Mackinnon, The sandwich method for finding fixed points, *JOTA* 17 (1975) 189-204.
- [15] C. E. Lemke, Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, *Man. Sci.* 11 (1965) 681-689.
- [16] C. E. Lemke and J. T. Howson, Jr., Equilibrium points of bimatrix games, *J. SIAM on Applied Math.* 12 (1964) 413-423.
- [17] O. H. Merrill, Applications and extensions of an algorithm that computes fixed points of certain non-empty convex upper semi-continuous point to set mappings, Tech. Repts. 71-7, Dept. of Industrial Eng., University of Michigan, 1971.
- [18] H. Nishino, M. Kojima and I. Kaneko, On applying complementary algorithm to a nonlinear programming, Stanford Symposium on Math. Prog., 1973.
- [19] A. Ravindran, Computational aspects of Lemke's complementary algorithm applied to linear programs, School of Industrial Eng., Purdue Univ. Lafayette, Indiana, 1970.
- [20] H. Scarf, The core of an n-person game, *Econometrica* 35 (1967) 50-69.
- [21] H. Scarf, The approximation of fixed points of a continuous mappings, *J. SIAM Applied Math.* 15 (1967) 1328-1342.
- [22] H. Scarf and T. Hansen, *Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press, New Haven, 1973.
- [23] M. J. Tood, *The Computation of Fixed Points and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [24] M. J. Tood, On triangulations for computing fixed points, *Math. Prog.* 10 (1976) 322-346.

(こじま・まさかず 東京工業大学理学部情報科学科)