

# 逐次選択過程の 理論構成とその応用

生 田 誠 三

本稿は、ある種の非常に単純な受注選択モデルの研究からスタートし、現在までに得られた一応の研究成果[15]、[17]をDPの概念を用いて一般的なかたちで再編成したものである。論述の仕方は、まず具体的な6つの問題に対しそれぞれ基本モデルを設定し、それらの中に存在する数学的構造の共通要因を抽出し、それを基礎に逐次選択過程とよばれるある種の決定過程に対する一般モデルを構築する、というかたちをとる。次節で述べる各問題は、従来、個別にしかも固有の方法で取りあつかわれてきたものばかりであるが、この一般モデルによって、これらの問題を含めより広い範囲の問題が、ある一定の理論的枠組の中で系統的かつ一般的に論述することが可能となった。

## 1. 6つの具体的な問題と

### その基本モデル

ここでは6つの具体的な問題とその基本モデルについて述べる。これらのモデルは単に興味ある経済学的現象の表明としてだけでなく、それらが逐次選択過程と称するところのある種の一般モデルを構築するために必要なすべての要因を最小限網羅しているという理由で選ばれたものである。

そのためこれらのモデルは、ある種の不自然さを持っているが、この不自然もこの一般モデルの範囲内で、ある程度までは除去可能であることをあらかじめことわっておく。

#### ① 最適受注選択問題 I [10]～[17]

長期間にわたって得られる総期待限界利益が最大になるように、逐次到着する注文をその利益性の大きさから判断しそのつど受注すべきか否かを決定する問題を最適受注選択問題という。この問題が持つ1つの本質的な側面を理解するために、限界利益が非負の注文（赤字でない注文）はすべて受注するといういわゆる全数受注方式がかならずしも最良の方式ではないということを指摘しておこう。無論、需要が少なく全数受注してもなおかつ

遊休工程があるという場合、その方式が最良のものであることはいうまでもない。しかし、需要が多い場合には全数受注は必然的に受注残を多くし、新規到着注文のうち納期の関係上受注不能となる注文の割合が多くなる。もしそのような理由で受注不能となった注文の中に利益性の十分高いものがあれば、それは一種の機会損失の発生といえよう。

このときあえてその注文を受注し、生産着手の優先順位を上げ納期を早めたとしても、それによって優先順位の下げられた注文に対しては納期おくれの危険が増大し、違約金の支払いという結果を招くことになり、いずれにせよ経済的マイナスは避けられない。以上のことから利益性がある一定水準——今後これを受注選択基準とよぶことにする——以上の注文だけを選択的に受注することの必要性が理解できよう。

つぎに合理的な選択基準が持つべき基本的な性格について述べよう。まず受注残が少ないときは利益性の低い注文でも受注し遊休工程の発生を避けるべきである。なぜなら遊休工程の発生は1つの機会損失となるからである。これは、受注残の少ないときは選択基準を低く設定すべきであることを示している。一方、受注残が多いときはその受注残で食いつなぎができるから、利益性の低い注文はことわり、利益性の高い注文だけを受注しておけばよい、ということも直観的に理解できよう。これは受注残が多いときは選択基準を高く設定すべきであることを意味している。

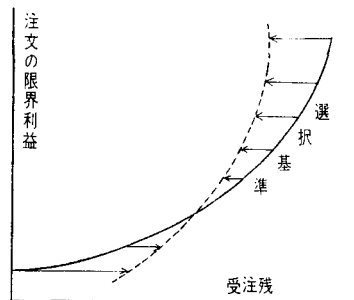


図1 選択基準と受注残の関係  
(←)は受注残を大きく(小さく)しようとする力

ことを意味している。以上のことから、合理的な選択基準は少なくとも受注残の増加関数となるように設定されるべきであるということが理解できよう。このことは、受注残の変動に関してつぎ

のような興味ある事実をわれわれに教えている(図1)。

受注残が少ないときは選択基準が低いから相対的に受注量が増え、その結果受注残は増加する。一方受注残が多くなると、今度は選択基準が高くなり相対的に受注量が減り、その結果受注残は減少する。換言すれば、受注残にはそれが大きくなるにしたがって反作用的に小さくならうとする力がますます大きく働き、また逆に、それが小さくなるにしたがって反作用的に大きくなろうとする力がますます大きく働くようになる。これは重錘のついたばねや単振り子の振動現象と似ている。

以上のような性格を持つ合理的な選択基準の内的な意味は、受注残を適正量におさえ、受注残がなくなり遊休工程が発生することによる機会損失と、受注残が多くなり納期が平均的に長くなることによって利益性の高い注文がやむなく受注できなくなるという機会損失をほどよく調整し、しかも長期間にわたって得られる総期待限界利益がより大きくなるように注文を選択的に受注するという点にある。

赤字でなければどんな注文でも受注する。その結果受注残が増加し、それを処理するために巨額な投資をして生産能力の増強をはかる。そして、その結果生じた余力を埋めるため、またやみくもに受注活動を行なう。この悪循環に陥る前に、上記のようなきめこまかい受注調整によって受注残を事前にコントロールするという問題があることを忘れてはならないであろう。

以上述べてきたような受注選択問題に対する1つの典型的なモデルとしてつぎのようなものを考える。

「1工程からなる受注生産会社を考える。1期の長さを適当に(たとえば5日間、1週間などに)とる。毎期首に $k$ 件の注文が到着する確率を $P_k$ とする。各注文の限界利益 $z$ は互いに独立に分布関数 $F(z)$ にしたがう。すべての注文は同一の生産時間 $\tau$ (単位期間:ただし2以上の整数)を持つ。また各期首に持ち得る受注残は最大 $N$ 期分までとする。目的は十分長い $T$ 期間にわたって得られる総期待限界利益を最大にする受注選択基準を求めること。ただし説明の都合上ここでは $P_1=1$ 、すなわち毎期首にかならず1件の注文が到着する場合を考える。」

注文はすべて有限の納期を持っているため受注残も必然的に上限を持つことになる。上記問題における受注残制限 $N$ はその事実を反映させたものである(現実には明確な数値として与えることはできないが)。

## ② 最適捕鯨問題

捕鯨制限がまったくなければ、十分時間をかけしかも発見された鯨はすべて捕獲するという全数捕獲戦略が、資源保護の立場を無視すればおそらく最良のものである

う。しかし、国際捕鯨取締条約によって漁期・捕獲頭数などがきびしく制限されている現在、その制限内で経済的意味においてできるだけ合理的な捕獲戦略を立てることが重要な問題となろう(ただしここでは資源保護の問題とは切り離して考えることにする)。とくに、総捕獲重量の最大化という問題は本質的な問題といえよう。全数捕獲戦略は制限漁期内に大きい鯨も小さい鯨も含めいわゆる玉石混淆というかたちで制限頭数を捕獲してしまうことになる。これに対し、各期において、それまでの捕獲頭数と残された漁期を考慮し、どの程度の大きさ以上の鯨だけを選択的に捕獲すべきかを考えながら捕獲することによって玉石混淆による総捕獲重量の相対的低下をある程度避けることも可能であろう。この問題に対する基本的なモデルとして本稿ではつぎのようなモデルを考える。

「 $T$ 期間(1期間を5分あるいは10分など適当にとる)にある種族の鯨を最大 $N$ 頭まで捕獲することが許されている。各期首に $k$ 頭からなる鯨群に出会う確率を $P_k$ とし、その鯨群内で最大重量の1頭だけが捕獲対象となる。各鯨の重量 $z$ は互いに独立に分布関数 $F(z)$ にしたがっている。目的は総期待捕獲重量を最大にすること。ただしここでは $P_k=1$ 、すなわち毎期かならず $k$ 頭の鯨群に出会う場合だけを考える。」

## ③ 最適売却問題 [3], [9]

1トンの不要鋼材がある。鋼材の市場価格は一般にかなりの幅を持って日々変動している。いまこの鋼材を売却しその売却益をたとえば30日後よりスタートするある新規事業計画の1つの資金源にすることが考えられている。当然ながら売却益が最大になるように売却すべきである。この問題は、株券、プラチナ、金、家、マンション、土地などを一定期日後まで売却する問題とも同質である。この問題に対してはつぎのような直観的な解釈を与えることができる。まず残存期間が十分長い時はより高い価格の出現を待って売却しようとするであろう。しかしこのような高姿勢をつづけるかぎり実際に売却する機会は少なく日数がどんどん経過していき残存日数が少なくなっていく。極端な場合として残存日数が1日になってしまうとどんなに安くても売却しなければならなくなる。

このことは残存日数が少なくなると次第に低姿勢になり低い価格でも売却しなければならなくなることを意味している。以上のことは最低売却価格水準が残存日数 $t$ の増加関数として与えられるべきであることを示している(図4)。この問題に対する基本モデルとして本稿ではつぎのモデルを考えることにする。

「市場価格 $z$ が日々独立に分布関数 $F(z)$ にしたがっ

て変動している鋼材1トンを $T$ 日後までに期待売却益最大になるように売却すること。なお、売却したいときに買手 (buyer) のあらわれる確率を  $P_b$  とする。ただしここでは  $P_b=1$ 、すなわち買手が常に存在する場合だけを考える。」

#### ④ 最適購入問題 [3], [9]

まず基本モデルから述べよう。

「市場価格  $z$  が日々独立に分布関数  $F(z)$  にしたがって変動している鋼材1トンを $T$ 日後までに期待購入価格最小になるように購入すること。ただし購入したいときに売手 (seller) のあらわれる確率  $P_s=1$  とする。」

たとえば30日後にはじまるある建築工事の基礎工事のためにある種の鋼材をできるだけ安い価格で購入するという問題などである。ところでこの問題は最適売却問題としてつぎのように述べることもできる。

「市場価格  $x(=-z)$  が、日々独立に分布関数  $G(x)(=1-F(-x))$  にしたがって変動している鋼材1トンを $T$ 日後までに期待売却価格最大になるように売却すること。」

後者の問題における最大期待売却価格は前者の問題における最大期待購入価格 $\times(-1)$ に等しいことはいうまでもない。

#### ⑤ 最適売買問題 [3]

これは最適売却問題と最適購入問題を結合した問題である。たとえばある日に鋼材を10万円で購入したとする。残存期間が十分長ければそれを10万円より高い価格たとえば13万円のときに売却し差益3万円を獲得し、その後低価格のときたとえば9万円で再度購入しておく、といった投機的な問題を考えることができる。この例では鋼材は結局 $9-3=6$ 万円で購入されたことになる。この種の問題の典型的な例は、なんといっても株の売買問題であろう。

ここではこの種の問題の基本モデルとしてつぎのようなモデルを考えることにする。

「価格  $z$  が日々独立に分布関数  $F(z)$  にしたがって変動しているある銘柄の株100株を、 $T$ 日間にわたり $N$ 回の売買サイクル( $T \geq 2N$ )を実行することにより得られる総期待売買差益を最大にすること。ただしこの売買過程はかならず買からスタートし、 $\rightarrow$ 売 $\rightarrow$ 買 $\rightarrow$ 売 $\rightarrow$ ……

とつづき最後は売で終わるものとする。また売手・買手は常に存在するものとする。」

#### ⑥ 最適受注選択問題 II [10], [17]

最適受注選択問題 I (①)において、每期 $k \geq 2$ 件の注文が到着するという問題を考える。ただし $k$ 件の各注文の限界利益  $z$  は互いに独立に分布関数  $F(z)$  にしたがうものとする。これは現象的には①の単なる拡張にすぎないが、その最適選択基準は、①の場合には表面化しない特殊な構造を持つことが4節で述べられよう。

## 2. 各問題における数学的共通性

一般に決定過程の構造は、状態空間、決定対象、状態推移の規則、および目的関数の4つの要因によって規定される。そしてこれらの要因を関係づける基本方程式を誘導し、それを使って目的関数を最大にする最適決定規則が求められる。本節では前節で述べた6つの問題をこの観点から整理することによって、各問題における数学的共通性を明らかにする。なお、今後決定過程における“時点 $t$ ”は過程の終了日より逆向に測定されるものとする(図4の横軸のように)。すなわち、過程は $T$ 期よりスタートし、 $T-1$ 期、 $T-2$ 期、…と進行し、1期で終了するものとする。よって $t$ 期ということは残存期間が $t$ 期間あるということを意味している。また1期間あたりの割引率を $\beta$ とする。

### A. 状態と状態空間

各期における系の状態 $i$ はそれぞれつぎの要因によって規定される。ここであらゆる可能な状態の集合を状態空間 $S$ という。

- ① 状態 $i$ =その期の期首の受注残(単位は“期分”)。たとえば受注残が3期分あるときは状態 $i=3$ である。明らかに $S=\{0, 1, \dots, N\}$ 。
- ② 状態 $i$ =前期までの捕獲頭数。よって $S=\{0, 1, \dots, N\}$ 。
- ③ 状態 $i$ =前期までに売却してしまっているか( $i=1$ とする)、まだ売却していないか( $i=0$ とする)。よって $S=\{0, 1\}$ 。
- ④ 状態 $i$ =前期までに購入してしまっているか( $i=1$ とする)、まだ購入していないか( $i=0$ とする)。よって $S=\{0, 1\}$ 。

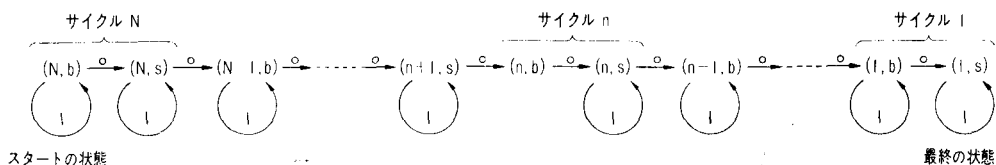


図2 売買問題における状態推移

- ⑤ 状態  $i$  = 売買サイクルの番号  $n$  と, サイクル内で買 (b) と売 (s) のいずれの立場にあるかをあらわす指標  $h=b, s$  のペア  $(n, h)$  として与えられる (図 2). よって  $S=\{i=(n, h): n=1, 2, \dots, N \quad h=b, s\}$

⑥ ①と同じ.

## B. 対象と価値

注文, 鯨, 鋼材のように, 受注するか否か, 捕獲するか否か, 売却するか否か, 購入するか否かという二者択一的決定が下されるものを一般に選択対象あるいは単に対象  $O$  ということにする. また注文の限界利益, 鯨の重量, 鋼材の価格などを一般に対象の価値  $x$  とよび, その分布関数を  $G(x)$  であらわす. 一般的にはこの分布関数は状態  $i$  に依存する. そのときには  $G_i(x)$  と書く. 各問題に対する対象  $O$ , 価値  $x$ , 分布関数  $G(x)$  ( $G_i(x)$ ) はつぎのとおりである.

- ① 対象  $O$  = 注文, 価値  $x$  = 限界利益  $z$ , 分布関数  $G(x) = F(x)$
- ② 発見された鯨群内の各鯨の重量を大きい順に  $z^1 \geq z^2 \geq \dots \geq z^k$  とならべる. このとき, 対象  $O$  = 最大重量  $z^1$  の鯨, 価値  $x$  = 最大重量  $z^1$ , 分布関数  $G(x) = F(x)^k$  (順序統計量の分布公式より [21])
- ③ 対象  $O$  = 鋼材, 価値  $x$  = 価格  $z$ , 分布関数  $G(x) = F(x)$
- ④ 対象  $O$  = 鋼材, 価値  $x$  = 価格  $z \times (-1)$ , 分布関数  $G(x) = 1 - F(-x)$ .
- ⑤ 対象  $O$  = 鋼材, 価値  $x$  = 価格  $z$  (売 (s) の立場にあるとき, すなわち状態  $i = (n, s)$  のとき) ; = 価格  $z \times (-1)$  (買 (b) の立場にあるとき, すなわち状態  $i = (n, b)$  のとき), 分布関数  $G_{(n,s)}(x) = F(x)$ ,  $G_{(n,b)}(x) = 1 - F(-x)$ . これは分布関数が状態に依存する例である.
- ⑥  $k$  件の注文の限界利益を大きい順に  $z^1 \geq z^2 \geq \dots \geq z^k$  とならべる. 決定すべきことは, 1 件の注文も受注しないか, 受注するとすれば上位何件まで受注するかをきめることである. この決定は, 上位  $l$  件の注文を 1 パッケージ  $O^l$  とするとき,  $O^1, O^2, \dots, O^k$  のうちのどのパッケージも受注しないか, さもなくばどのパッケージを択一的に受注するかをきめる, という事と同じである.  $O^l$  を受注するということは限界利益の大きい順に  $l$  個まで受注することを意味する. このとき  $x^l = z^1 + z^2 + \dots + z^l$  円の限界利益が獲得される. 注文パッケージ  $O^l$  が対象であり,  $x^l$  がその対象の価値となる. また,  $k$  次元の価値ベクトル  $x = (x^1, x^2, \dots, x^k)$  の分布関数  $G(x)$  は  $z$  の分布関数  $\tilde{F}(z)$  より変数変換の公式を用いて, また  $\tilde{F}(z)$  は個々の注文の限界利益の分布関数  $F(z)$  より順序統計量の分布公式

を用いて理論的に求めることができる.

## C. 状態の推移確率

①~⑤において, 状態  $i$  のときに対象  $O$  を採択する (受注する, 捕獲する, 売却する, 購入する) とき, および採択しないとき, 次期の状態が  $j$  になる確率をそれぞれ  $P_{ij}^l, P_{ij}^0$  とする. ⑥においては状態  $i$  のときに対象  $O^l$  を採択する (上位  $l$  件まで受注する) とき, およびどの対象も採択しないとき次期の状態が  $j$  になる確率をそれぞれ  $P_{ij}^l, P_{ij}^0$  とする. ただし  $P_{ij}^0$  はすべての  $i, j \in S$  に対して定義されるが,  $P_{ij}^l, l=1, 2, \dots, k$  (①~⑤のときは  $k=1$ ) はかならずしもそうではない. 各問題に対する  $P_{ij}^0$  と  $P_{ij}^l$  および  $P_{ij}^l$  の定義範囲はそれぞれつぎのとおりである.

- ① 受注残が  $i$  期分あるとき注文 (対象) を受注しなければ次期の受注残は 1 期分減って  $i-1$  期分となる, すなわち  $i \xrightarrow{0} i-1$ , ただ  $i=0$  のときは  $0 \xrightarrow{0} 0$ . また受注残が  $i$  期分あるとき注文を受注するとその瞬間に受注残は  $i+\tau$  期分となり, よって次期の受注残は  $i+\tau-1$  期分となる, すなわち  $i \xrightarrow{1} i+\tau-1$ . ただしこのときモデルの条件より  $i+\tau-1 \leq N$ , すなわち  $i \leq N-\tau+1$  でなければならない. よってすべての  $j \in S$  に対し

$$\begin{aligned} P_{ij}^0 &= \delta_{i-1,j} \quad (i=1, 2, \dots, N) & P_{0j}^0 &= \delta_{0,j} \\ P_{ij}^1 &= \delta_{i+\tau-1,j} \quad (i \leq N-\tau+1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

- ② 前期までに  $i$  頭捕獲している期に (状態  $i$ ) 捕獲を行わなければ捕獲頭数に変化はない, よって次期の状態も  $i$  となる, すなわち  $i \xrightarrow{0} i$ . 一方捕獲されれば捕獲頭数は 1 頭増え次期の状態は  $i+1$  に変化する, すなわち  $i \xrightarrow{1} i+1$ . ただし後者の場合  $i+1 \leq N$ , すなわち  $i \leq N-1$  でなければならない.

よって

$$\begin{aligned} P_{ij}^0 &= \delta_{ij} \quad (i, j \in S), \\ P_{ij}^1 &= \delta_{i+1,j} \quad (i \leq N-1, j \in S) \end{aligned} \quad (2.2)$$

- ③ 状態  $i$  が 0 でも 1 でも, 売却が行なわれなければ ( $i=1$  のときはすでに売却済であるから売却が行なわれないという表現は不適切である. しかし現象的には売却が行なわれないと解釈してもさしつかえはない)

状態推移はおきない, すなわち  $i \xrightarrow{0} i$ . 状態  $i=0$  (売却していない) のとき売却すると売却済という状態  $i=1$  に推移する, すなわち  $0 \xrightarrow{1} 1$ . 状態  $i=1$  (売却済) のときさらに売却するということはおこり得ない. よって

$$P_{ij}^0 = \delta_{ij} \quad (i, j=0, 1), \quad P_{10}^1 = \delta_{0,1} \quad (j=0, 1) \quad (2.3)$$

- ④ ③と同じ

- ⑤ 状態  $i = (n, b)$  ( $(n, s)$ ) のとき買 (売) という行動をとらなければ状態推移はおきない (図 2), よって  $i \xrightarrow{0} i$ . 一方状態  $i = (n, b)$  にあるとき買という行動をとると

状態は同一サイクル内の売 ( $s$ ) という状態に推移する, すなわち  $(n, b) \xrightarrow{1} (n, s)$ . また状態  $i = (n, s)$  にあるとき売という行動をとると状態はつぎのサイクルの買 ( $b$ ) という状態に推移する, すなわち  $(n, s) \xrightarrow{1} (n-1, b)$ . よって

$$\begin{aligned} P_{ij}^0 &= \delta_{ij} \quad (i, j \in S) \\ P_{ij}^1 &= P_{(n,b), (n,s)}^1 = 1, \\ P_{ij}^1 &= P_{(n,s), (n-1,b)}^1 = 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

- ⑥  $P_{ij}^1$  は①の場合と同じである. 状態  $i$  (受注残  $i$  期分) のとき対象  $O^l$  を採択する, すなわち  $l$  件の注文を受注すると次期の受注残は  $i+l\tau-1$  となる, すなわち  $i \xrightarrow{l} i+l\tau-1$ . ただし  $i+l\tau-1 \leq N$ , よって  $i \leq N-l\tau+1$  でなければならない. よってすべての  $j \in S$  に対し
- $$\begin{aligned} P_{ij}^0 &= \delta_{i-1,j} \quad (i=1, 2, \dots, N) & P_{0j}^0 &= \delta_{0j} \\ P_{ij}^l &= \delta_{i+l\tau-1,j} \quad (i \leq N-l\tau+1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

#### D. 目的関数と決定空間

状態  $i$  の  $t$  期よりスタートしたとき残存期間の  $t$  期間にわたって得られる総期待価値を  $v_i(t)$  とする. われわれの目的は過程の出発点である  $T$  期よりある初期状態  $i_0$  をもってスタートしたときの総期待価値の最大値  $v_{i_0}(T)$  を達成する最適な決定規則を求めることである.  $v_i(t)$  と  $i_0$  は各問題に対してそれぞれつぎのようにいえる:  $v_i(t)$  は①⑥最大総期待限界利益 ( $i_0$  = 受注残 0), ②最大総捕獲重量 ( $i_0$  = 捕獲頭数 0), ③最大期待売却益 ( $i_0$  = 売却していない, すなわち 0), ④最小期待購入価格  $\times (-1)$  ( $i_0$  = まだ購入していない, すなわち 0), ⑤最大総期待売買差益 ( $i_0 = (N, b)$ ).

つぎは決定規則の与え方について述べる. まず①~⑤までは価値  $x$  を持った対象  $O$  を受入れるか否かということであるが, これは見方を変えれば価値  $x$  がどのようなときは受入れ, どのようなときには受入れないかという規則と同質である. この規則は数学的には価値  $x$  をディメンジョンとして持つ実軸  $R^1 = (-\infty, +\infty)$  を適当に 2 分割  $R^1 = B^0 + B^1$  ( $B^0$  と  $B$  は素) し,  $x \in B^0$  なら受入れない,  $x \in B^1$  なら受入れる, というかたちで述べられる. ⑥の決定規則も, 価値  $x^1, x^2, \dots, x^k$  を持つ対象  $O^1, O^2, \dots, O^k$  に対し,  $k$  次元ユークリッド空間  $R^k$  の適当な分割  $R^k = B^0 + B^1 + \dots + B^k$  ( $B^0, B^1, \dots, B^k$  は互いに素) を用い,  $x = (x^1, x^2, \dots, x^k) \in B^0$  ならどれも受入れない,  $x \in B^l$  なら  $O^l$  を受入れる, というかたちで与えることができる.

ある与えられた空間分割  $R^k = B^0 + B^1 + \dots + B^k$  (①~⑤の場合  $k=1$ ) を  $B$  と書き, あらゆる可能な分割  $B$  の集合を  $\mathcal{B}$  と書きこれを決定空間とよぶことにする. 問題は, 目的関数が最大になるように, 各期各状態におい

て, 決定空間  $B$  の中からどの分割  $B$  を決定規則として選ぶか, ということである. 選ばれた分割が状態  $i$  および期  $t$  に依存する ( $B_i(t)$ ) ことはいうまでもない.

(初期値  $v_i(1)$  について) 3, 4 節で最適決定規則を求めるために  $v_i(t)$  に関する基本方程式とよばれる差分方程式を誘導する. この方程式を計算していくために必要な初期値  $v_i(1)$  は各問題に対してそれぞれつぎのように与えられる: ①⑥十分大きい  $T$  期における最適選択基準だけが問題となる. そのような最適選択戦略は初期値  $v_i(1)$  の与え方にはほとんど影響されない. よって  $v_i(1) = 0 \quad i \in S$  とする. ②終了期 (1 期) において捕り残しがあれば重量いかににかかわらず捕獲すべきである. よって  $v_i(1) = E(x^1) \quad i \leq N-1, \quad v_N(1) = 0$ . ③最後には売却しなければならないから  $v_0(1) = E(x)$ ,  $v_1(1) = 0$ . ④最後には購入しなければならないから  $v_0(1) = E(-x)$ ,  $v_1(1) = 0$ , ⑤については 4 節の⑤のところで述べる.

### 3. 逐次選択過程

#### ——その一般型式—— [19]

ここでは, 前節で述べた各問題の共通要因を整理する意味も兼ねながら, いくぶん一般化して述べることにする.

A. 状態空間  $S$  各期にとり得る状態  $i$  の集合, ただし  $S$  は有限集合とする.

B. 対象と価値  $k$  種の対象  $O^1, O^2, \dots, O^k$  がある. 状態  $i$  のときに提示されるそれらの価値の価値ベクトル  $x = (x^1, x^2, \dots, x^k) \geq 0$  は分布関数  $G_i(x)$  にしたがう. ①~⑤は  $k=1$  の場合であり  $O^1, x^1, x$  を単に  $O, x, x$  と書く. ⑥は  $k \geq 2$  の場合である. また⑤以外は  $G_i(x)$  は  $i$  に依存しない. 決定すべきことは, この  $k$  種の対象のうちどの 1 つを択一的に採択するか, さもなくばどれも採択しないか, をきめることである. 対象  $O^l$  を採択すると価値  $x^l$  が獲得される.

C. 状態の推移確率 状態  $i$  の期に対象  $O^l$  を採択したとき (どの対象も採択しないとき) 次期の状態が  $j$  に推移する確率を  $P_{ij}^l (P_{ij}^0)$  とする. ただし, 各状態  $i$  において, ある理由によりその価値がいかに大きくても採択不能な対象  $O^{l_1}, O^{l_2}, \dots$  が存在することもあるとする. そこで  $L_i = \{l_1, l_2, \dots\}$  とする.  $l \in L_i$  なる  $l$  に対して  $P_{ij}^l$  は定義不能であるが, 説明の都合上適当な有限値を与えておくことにする. ただし  $L_i = \phi$  のこともあるとする. 一方,  $P_{ij}^0$  はすべての  $i, j$  に対して定義されるものとする.

D. 目的関数と決定空間 状態  $i$  の  $t$  期よりスタートしたときの総期待価値の最大値を  $v_i(t)$  とする. ただし初

期  $v_i(t)$  は適当に与えられているものとする。いま状態  $i$  の  $t$  期に対象の価値ベクトル  $x = (x^1, x^2, \dots, x^k)$  が提示されたとしよう。このとき、どの対象も採択しない場合および対象  $O^l$  を採択した場合の総期待価値はそれぞれ  $\beta \sum_j P^0_{ij} v_j(t-1)$ ,  $x^l + \beta \sum_j P^l_{ij} v_j(t-1)$  ( $l \notin L_i$ ) となる。ところで

$$y^l_i(t) = \beta \sum_j (P^0_{ij} - P^l_{ij}) v_j(t-1) \quad l \notin L_i \quad (3.1)$$

とすると、どれも採択しない場合に比べ  $O^l$  を採択することによる増分利益は  $x^l - y^l_i(t)$  となる。よって、この増分利益が  $< 0$  なら対象  $O^l$  は採択されるべきではない。このことは、採択不能な対象  $O^l$ ,  $l \in L_i$  に対しては  $y^l_i(t) = \infty$  と定義しておけば十分であることを示している。これによって採択不能という条件は自動的に処理される。以上のことからつぎのことがいえる。

$$\max \{x^l - y^l_i(t) : l=1, 2, \dots, k\} = x^{l*} - y^{l*}_i(t) \quad (3.2)$$

とすると、 $x^{l*} - y^{l*}_i(t) < 0$  ならどれも採択すべきではない、 $\geq 0$  なら  $O^l$  を採択すべきである。この決定ルールはつぎのように換言することもできる。

$k=1$ , すなわち対象が 1 種類の場合 (①~⑤),  $R^1$  の分割  $R^1 = C^0_i(t) + C^1_i(t)$  :

$$C^0_i(t) = \{x^1 : x^1 - y^1_i(t) < 0\}$$

$$C^1_i(t) = \{x^1 : x^1 - y^1_i(t) \geq 0\} \quad (3.3)$$

に対し、 $x^1 \in C^0_i(t)$  ならどれも採択しない、 $x^1 \in C^1_i(t)$  なら  $O^1$  を採択する。この場合、記号の簡単化のために  $O^1$ ,  $x^1$ ,  $y^1_i(t)$  はそれぞれ  $O$ ,  $x$ ,  $y_i(t)$  と書くこともある。

$k=2$  の場合 (⑥),  $R^2$  の分割  $R^2 = C^0_i(t) + C^1_i(t) + C^2_i(t)$  :

$$C^0_i(t) = \{x^1, x^2 : x^1 - y^1_i(t), x^2 - y^2_i(t) < 0\}$$

$$C^1_i(t) = \{x^1, x^2 : 0 \leq x^1 - y^1_i(t) < x^2 - y^2_i(t)\} \quad (3.4)$$

$$C^2_i(t) = \{x^1, x^2 : 0 \leq x^2 - y^2_i(t) \leq x^1 - y^1_i(t)\}$$

に対し、 $x = (x^1, x^2) \in C^0_i(t)$  ならどれも採択しない、

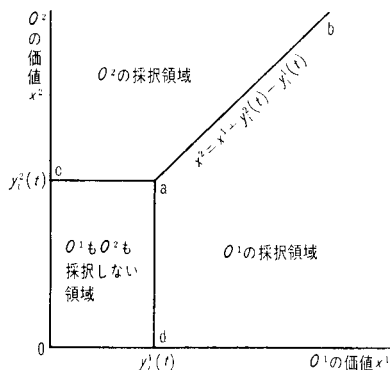


図 3 対象  $O^1$ ,  $O^2$  の採択領域

$x \in C^1_i(t)$  なら  $O^1$  を、 $x \in C^2_i(t)$  なら  $O^2$  をそれぞれ採択する。図 3 からわかるように、この空間分割の境界線が線形であること、および  $ab$  が傾斜 45 度の直線、 $ac$  が横軸に平行、 $ad$  が縦軸に平行であるということが興味ある点である。このことは、 $x^1 \geq y^1_i(t)$  かつ  $x^2 \geq y^2_i(t)$  のとき  $O^1$  か  $O^2$  という決定は価値の差  $x^2 - x^1$  だけに、 $x^1 < y^1_i(t)$  のときどれも採択しないか  $O^2$  を採択するかという決定は価値  $x^2$  の大きさだけに、また  $x^2 < y^2_i(t)$  のときどれも採択しないか  $O^1$  を採択するかという決定は価値  $x^1$  の大きさだけにそれぞれ依存しているということを意味している。このような解釈はこのモデルの持つ経済的意味、とくに推移確率  $P^l_{ij}$  が採択された対象の価値  $x$  に依存しないという点からも直観的に理解されることである。

$k \geq 3$  の場合、 $R^k$  の分割は  $R^k = C^0_i(t) + C^1_i(t) + \dots + C^k_i(t)$  :

$$C^0_i(t) = \{x : x^n - y^n_i(t) < 0, n=1, 2, \dots, k\}$$

$$C^l_i(t) = \{x : 0 \leq x^l - y^l_i(t) \leq x^n - y^n_i(t), n=1, 2, \dots, k\} \quad l=1, 2, \dots, k \quad (3.5)$$

( $C^l_i(t)$  における不等号 “ $\geq$ ” のあるものは、この  $k+1$  個の部分集合が互いに素になるように “ $>$ ” に置き換えられるものとする。このときこれらの部分集合が実際に  $R^k$  の分割になっていることは直観的にも明らかである。紙面の都合上、厳密な証明はここでは述べない。)

さて以上の説明はかなり直観的である。数学的には前節の **D** の最後のところで述べたようにあらゆる可能な分割 **B** の集合 (決定空間)  $B$  の中から総期待価値が最大になる分割を求める、というかたちで定式化されるべきである。実はそのような意味での最適分割が上記の分割  $C_i(t)$  で与えられるのである。このことをつぎに述べよう。

**E. 基本方程式と  $y^l_i(t)$  の計算手続** 定義より明らかに (ただし  $T \geq t \geq 2$ )

$$v_i(t) = \max_{B \in B} \left\{ \int_{B^0} \beta \sum_j P^0_{ij} v_j(t-1) dG_i(x) + \sum_{l=1}^k \int_{B^l} (x^l + \beta \sum_j P^l_{ij} v_j(t-1)) dG_i(x) \right\} \quad (3.6)$$

$$= \beta \sum_j P^0_{ij} v_j(t-1)$$

$$+ \max_{B \in B} \left\{ \sum_{l=1}^k \int_{B^l} (x^l - y^l_i(t)) dG_i(x) \right\} \quad (3.7)$$

ただし  $l \in L_i$  なる  $l$  に対しては  $B^l = \phi$  でなければならぬ。ところで **D** のところでも述べたようにそのような  $l$  に対して  $y^l_i(t) = \infty$  と定義しておく。このとき  $x^l - y^l_i(t) = -\infty$  となり (3.7) 式の最大化問題において最適分割における  $B^l$  に対する解は常に  $\phi$  となる。実際、定理 1 よりこの最大化問題における解は分割  $C_i(t)$

で与えられる。  $l \in L_i$  のとき  $y^l_i(t) = \infty$  であるから  $x^l - y^l_i(t) = -\infty$  となり、よって  $C^l_i(t) = \phi$  となる。このとき (3.7) は

$$v_i(t) = \beta \sum P^0_{ij} v_j(t-1) + \sum_{l=1}^k \int_{C^l_i(t)} (x^l - y^l_i(t)) dG_i(x) \quad (3.8)$$

となる。  $y^l_i(t)$  (3.1) は  $v_j(1)$ ,  $j \in S$  を初期値とし (3.8) より順次求めることができる。

なお今後  $C_i(t)$  および  $y^l_i(t)$  を一般に最適選択基準とよび、問題①⑥に対しては最適受注選択基準、②～⑤に対しては、最適捕獲基準、最適売却基準、最適購入基準、最適売買基準とよぶことにする。

定理1  $G(x)$  をベクトル  $x = (x^1, x^2, \dots, x^k)$  の非負関数、  $R^k$  の分割  $R^k = B^0 + B^1 + \dots + B^k$  ( $B^l$  は互いに素)、あらゆる可能な分割  $B$  の集合を  $B$ ,  $y = (y^1, y^2, \dots, y^k)$  をある与えられたベクトルとする。このとき

$$D(B) = \max_{B \in B} \sum_{l=1}^k \int_{B^l} (x^l - y^l) dG(x) \quad (3.9)$$

は分割  $C$  (3.5) で与えられる。

(証明) 厳密な証明は別の機会にゆずり、ここでは大体の道筋だけを述べることにする。まず分割  $C$  が  $R^k$  の分割  $R^k = C^0 + C^1 + \dots + C^k$  であることは直観的にも明らか。このとき  $C^l = C^l \cap R^k = \sum_j (B^j \cap C^l)$ 、および任意の分割  $B \in B$  に対し  $B^l = B^l \cap R^k = \sum_j (B^j \cap C^l)$ 。これらより  $B^l = \sum_{j \neq l} (B^j \cap C^l) + (C^l - \sum_{j \neq l} (B^j \cap C^l))$  となる。この  $B^1, B^2, \dots, B^k$  を (3.9) に代入し整理することにより  $D(B) \leq D(C)$  となることが示される。

#### 4. 各問題における基本方程式

ここでは1節で与えた6つの問題に対する基本方程式が (3.8) の特別な場合としてどのように表現されるかについて述べる。①～⑤は対象の種類数  $k=1$  である。このとき価値  $x^1$ 、空間  $R^1$  の最適分割における  $C^1_i(t) = \{x^1; x^1 \geq y^1_i(t)\}$  および  $y^1_i(t)$  における上付添字の“1”は冗長だからばき、それぞれ  $x, C_i = \{x; x \geq y_i(t)\}, y_i$  と書くことにする。このとき  $C_i(t)$  を積分範囲とする積分  $\int_{C_i(t)}$  は  $\int_{y_i(t)}^\infty$  と書かれることに注意。⑥は  $k \geq 2$  の場合である。なお以下の記述においては常に  $T \geq t \geq 2$  であるとする。また初期値  $v_i(1)$  については2節のDを見よ。

$$\textcircled{1} \quad v_i(t) = \beta v_{i-1}(t-1) + \int_{y_i(t)}^\infty (x - y_i(t)) dF(x) \quad (4.1)$$

$$t=0, 1, \dots, N \quad v_{-1}(\cdot) = v_0(\cdot)$$

$$y_i(t) = \beta(v_{i-1}(t-1) - v_{i+\tau-1}(t-1))$$

$$i \leq N - \tau + 1$$

$$y_i(t) = \infty$$

$$i > N - \tau + 1$$

$$(4.2)$$

状態  $i$  (受注残が  $i$  期分あること、ただし  $i \leq N - \tau + 1$ ) の  $t$  期には限界利益  $x \geq y_i(t)$  ( $i \leq N - \tau + 1$ ) なる注文だけを受注すべきである。

(数値例1) 注文の生産時間  $\tau=2$  単位期間、最大受注残  $N=4$  期分、注文の限界利益  $z(=x)$  の分布関数  $F(z)$  ( $=G(x)$ ) は範囲  $[0, 1]$  の一様分布、割引率  $\beta=1$ :  $T=200$  期 (過程のスタート時点で存在期間が200期間あるということ) のとき最適選択基準は  $y_0(200)=0.17$ ,  $y_1(200)=0.39$ ,  $y_2(200)=0.51$ ,  $y_3(200)=0.63$  ( $i$  に関し増加)、1期あたりの平均利益は  $d(200)=v_0(200)/200 \doteq 0.35$  となる。

$$\textcircled{2} \quad v_i(t) = v_i(t-1) + \int_{y_i(t)}^\infty (x - y_i(t)) dF(x)^k \quad (4.3)$$

$$i=0, 1, \dots, N$$

$$y_i(t) = v_i(t-1) - v_{i+1}(t-1) \quad i=0, 1, \dots, N-1$$

$$y_N(t) = \infty$$

$$(4.4)$$

状態  $i$  (それまでに  $i$  頭捕獲している、ただし  $i \neq N$ ) の  $t$  期には、 $k$  頭の群の中で最大重量  $z^1$  の鯨に対し、 $z^1 \geq y_i(t)$  なら捕獲し、さもなければ捕獲しない。

(数値例2) 計画期間  $T=20$  期、最大捕獲数  $N=4$  頭、群の頭数は常に  $k=2$ 、鯨の重量  $z(=x)$  の分布関数  $F(z)$  ( $=G(x)$ ) は範囲  $[0, 1]$  の一様分布: 最大捕獲重量  $v_0(20)$  および最適捕獲基準  $y_i(t)$ ,  $i=0, 1, 2, 3$  は図5のとおり。

$$\textcircled{3} \textcircled{4} \quad v_0(t) = \beta v_0(t-1) + \int_{y_0(t)}^\infty (x - y_0(t)) dG(x) \quad (4.5)$$

$$v_i(t) = \beta v_i(t-1)$$

$$(4.5')$$

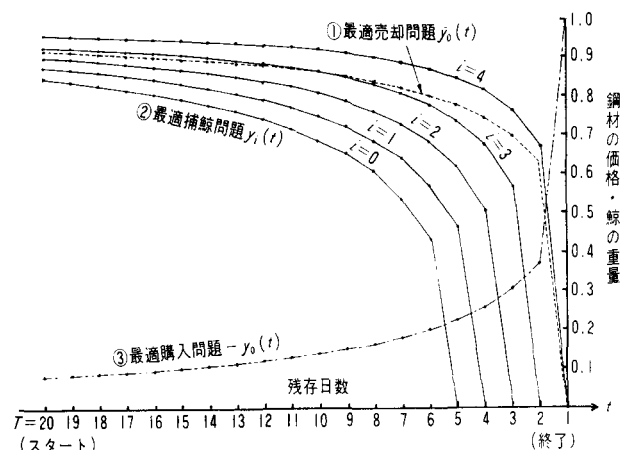


図4 数値例2, 3, 4の最適選択基準

$$y_0(t) = \beta(v_0(t-1) - v_1(t-1)), \quad y_1(t) = \infty \quad (4.6)$$

ところで  $v_1(1) = 0$  であるから (4.5') より  $v_1(t) \equiv 0$  となるから (4.6) は  $y_0(t) = \beta v_0(t-1)$  となる。③では  $G(x) = F(x)$  である。また④では  $G(x) = 1 - F(-x)$  であり、これを (4.5) に代入して整理することもできる。このようにして得られる式は同一モデルに対する坂口 [3] の結果と一致する。最適決定は、 $t$  日の価格が  $z$  円なら、③  $z \geq y_0(t)$  のときだけ売却：④  $-z \geq y_0(t)$  のときだけ購入，となる。

(数値例 3, 4) 計画期間  $T=20$  日，価格  $z$  の分布関数  $F(x)$  は範囲  $[0, 1]$  の一様分布，割引率  $\beta=1$ ：最適売却(購入)基準  $y_0(t)$  は図 4 のとおり，ただし，④に対しては  $-y_0(t)$  がグラフ化されている。

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad v_{(n,b)}(t) &= \beta v_{(n,b)}(t-1) \\ &+ \int_{y_{(n,b)}(t)}^{\infty} (x - y_{(n,b)}(t)) dG_{(n,b)}(x) \\ &\quad T \geq t > 2n \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} v_{(n,s)}(t) &= \beta v_{(n,s)}(t-1) \\ &+ \int_{y_{(n,s)}(t)}^{\infty} (x - y_{(n,s)}(t)) dG_{(n,s)}(x) \\ &\quad T \geq t > 2n-1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$y_{(n,b)}(t) = \beta(v_{(n,b)}(t-1) - v_{(n,s)}(t-1)) \quad (4.11)$$

$$y_{(n,s)}(t) = \beta(v_{(n,s)}(t-1) - v_{(n-1,b)}(t-1)) \quad (4.12)$$

状態  $(n, b)$  ( $(n, s)$ ) の  $t=2n$  ( $t=2n-1$ ) 日よりスタートするとき，モデルの条件より過程の終了日までの  $2n$  ( $2n-1$ ) 日間にわたり価格  $z$  の大きさいかにかわらず買→売→買→…→売 (売→買→売→…→売) を実行しなければならない。よって  $\mu = E(z)$  とするとき  $v_{(n,b)}(2n) = -\mu + \beta\mu - \beta^2\mu + \dots + \beta^{2n-1}\mu = -\mu(1 - \beta^{2n}) / (1 + \beta)$   $v_{(n,s)}(2n-1) = \mu - \beta\mu + \beta^2\mu - \dots + \beta^{2n-2}\mu = \mu(1 + \beta^{2n-1}) / (1 + \beta)$  となり，これを (4.9)，(4.10) の初期値とする。価格  $z$  円のときの最適売買戦略は，状態  $(n, b)$  ならば

$-z \geq y_{(n,b)}(t)$  ( $t > 2n$ ) のとき購入し，状態  $(n, s)$  ならば  $z \geq y_{(n,s)}(t)$  ( $t > 2n-1$ ) のとき売却せよ，となる。 $N=1$  の場合は坂口 [4] によってすでに研究されている。 $N=\infty$ ， $T=\infty$  ( $\beta < 1$ ) のとき (無限日間にわたり無限回の売買サイクルが許されている場合)， $v_{(n,b)}(t) \rightarrow v_b$ ， $v_{(n,s)}(t) \rightarrow v_s$  ( $n \rightarrow \infty$ ， $t \rightarrow \infty$ ) とすると (4.9) ~ (4.12) は

$$\begin{aligned} v_b &= \beta v_b + \int_{y_b}^{\infty} (x - y_b) dG_b(x) \\ G_b(x) &= 1 - F(-x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} v_s &= \beta v_s + \int_{y_s}^{\infty} (x - y_s) dG_s(x) \\ G_s(x) &= F(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$y_s = \beta(v_s - v_b) = -y_b = y \quad (4.15)$$

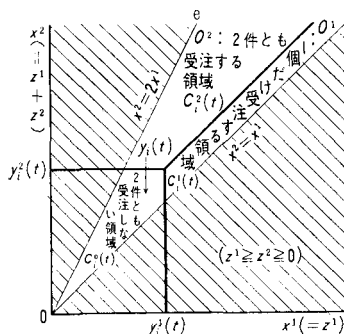
となる。このとき  $y = \beta\mu$  なることは容易に示される。すなわち，売の判定基準と買の判定基準はともに等しく，平均価格の  $\beta$  倍である。また  $\beta=1$  のときこの判定基準が  $y = \mu$  となりそのときの 1 日あたりの平均売買差益が  $d = \int_{\mu}^{\infty} (z - \mu) dF(z)$  となることも容易に示される。 $F(z)$  が正規分布  $(\mu, \sigma)$ ，指数分布 (パラメータ  $\lambda$ ) のときこの平均利益はそれぞれ  $d = \sigma / \sqrt{2\pi} \approx 0.4\sigma$ ， $d = e^{-1}\sigma$  ( $\sigma = 1/\lambda$ )  $\approx 0.367\sigma$  となる。

⑥ 毎期 2 件 ( $k=2$ ) の注文が到着する場合だけを考える (ただし  $v_{-1}(\cdot) = v_0(\cdot)$  とする)。

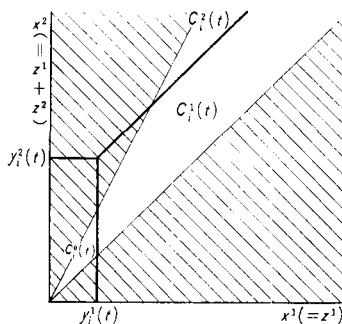
$$\begin{aligned} v_i(t) &= \beta v_{i-1}(t-1) \\ &+ \sum_{l=1}^2 \int_{C_l^i(t)} (x^l - y^l_i(t)) dG(x) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} y^1_i(t) &= \beta(v_{i-1}(t-1) - v_{i+1-t-1}(t-1)) \\ i &\leq N - \tau + 1 \\ y^2_i(t) &= \beta(v_{i-1}(t-1) - v_{i+2\tau-1}(t-1)) \\ i &\leq N - 2\tau + 1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

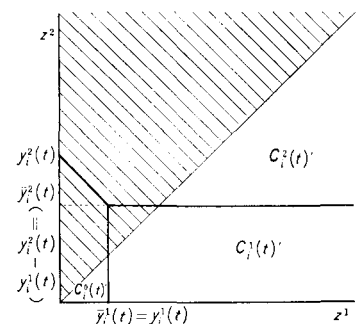
ただし  $y^1_i(t) = \infty$  ( $i > N - \tau + 1$ )， $y^2_i(t) = \infty$  ( $i > N -$



I おこり得ない分割



II 正則な分割



III 正則な分割IIの  $z$ -平面へ変換

図 5 最適受注選択問題 II (⑥) における決定規則としての空間分割

$2\tau+1$  で  $C^1_i(t)$ ,  $C^2_i(t)$  は (3.4) で与えられる。また  $\mathbf{x}=(x^1, x^2)$  で  $x^1=z^1$ ,  $x^2=z^1+z^2$ ,  $z^1 \geq z^2$  であることに注意。状態  $i$  の  $t$  期における最適決定は、 $\mathbf{x} \in C^1_i(t)$  なら限界利益の大きいほうの注文 1 件だけを受注し、 $\mathbf{x} \in C^2_i(t)$  なら 2 件とも受注し、 $\mathbf{x} \in C^0_i(t)$  なら 2 件とも受注しない、である。ところでこの問題においてはつぎの 2 点に注意すべきである。まず  $x^1 \leq x^2 \leq 2x^1$  となるから分割された平面 (図 5) におい斜線部分はおこり得ない。つぎは、点  $\mathbf{y}_i(t) = (y^1_i(t), y^2_i(t))$  が直線  $0e$  の下側には存在しないということである。もし存在すれば図 5—I のようになり、たとえば矢印の方向に  $x^2 = z^1 + z^2$  が変化するとき ( $z^1$  は固定)、2 件とも受注するという決定から 1 件だけを受注するという決定を飛び越え不連続に 2 件とも受注しないという決定に移ることになる。このような現象はわれわれの合理的直観にはそぐわないものである。そこで点  $\mathbf{y}_i(t)$  が直線  $0e$  の上側にあることすなわち  $y^2_i(t) \geq 2y^1_i(t)$  であることを“正則である”とよぶことにする。この正則性はおそらく数学的に証明されるべきことであろう。実際、著者が行なった 116 例の数値実験ではことごとく正則であったことを付言しておく。ところでこの正則性が成立するとき  $\mathbf{x}$ —平面上で与えられている式 (4.16), (4.17) を  $\mathbf{z}$ —平面上に変換するとつぎのようになる。まず

$$\bar{y}^1_i(t) = \beta(v_{i-1}(t-1) - v_{i+\tau-1}(t-1)) \quad i \leq N-\tau+1$$

$$\bar{y}^2_i(t) = \beta(v_{i+\tau-1}(t-1) - v_{i+2\tau-1}(t-1)) \quad i \leq N-2\tau+1$$

とすると  $y^1_i(t) = \bar{y}^1_i(t)$ ,  $y^2_i(t) = \bar{y}^1_i(t) + \bar{y}^2_i(t)$  となる。このとき  $\mathbf{x}$ —平面上の最適分割 (図 5—II) を  $\mathbf{z}$ —平面上に変換すると図 5—III のようになる。このとき (4.16), (4.17) は次式のように変換される (紙面の都合上説明略)。

$$v_i(t) = \beta v_{i-1}(t-1) + \int_{\bar{y}^1_i(t)}^{z^1 - \bar{y}^1_i(t)} dG^1(Z_1) \\ + \int_{\bar{y}^2_i(t)}^{z^2 - \bar{y}^2_i(t)} dG^2(Z_2)$$

$G^1(z^2)$ ,  $G^2(z^2)$  は  $z^1$ ,  $z^2$  の分布関数であり、それぞれ

$$G^1(z) = 2 \int_{-\infty}^z F(\theta) dF(\theta), \quad G^2(z) = 2 \int_{-\infty}^z (1-F(\theta))$$

$dF(\theta)$  で与えられる。そして、受注残  $i$  のときに到着する限界利益が  $z^1$ ,  $z^2$  ( $z^1 \geq z^2$ ) なる 2 つの注文に対する最適決定は、 $z^1 < \bar{y}^1_i(t)$  なら 2 件とも受注しない、 $\bar{y}^1_i(t) \leq z^1 < \bar{y}^2_i(t)$  なら限界利益  $z^1$  の注文 1 件だけを受注、 $\bar{y}^2_i(t) \leq z^2$  なら 2 件とも受注する、となる。

(数値例 6) 数値例 1 において注文が 2 件到着するとする。このとき  $\bar{y}^1_0(200) = 0.24$ ,  $\bar{y}^2_0(200) = 0.70$ ;  $\bar{y}^1_1(200) = 0.60$ ,  $\bar{y}^2_1(200) = 0.78$ ;  $\bar{y}^1_2(200) = 0.70$ ;  $\bar{y}^1_3(200) =$

$0.78$ ,  $d(200) = v_0(200)/200 = 0.418$ .

## 5. 検討および将来の課題

この研究にはまだ多くの発展拡張方向がある。たとえば、到着注文数、鯨群の頭数、売手・買手の出現および状態推移の法則が確率的な場合 (これらは一般モデル (3 節) の簡単な拡張によって比較的楽に説明できる)、①, ⑥において工程数が複数になった場合およびそれを有効勾配法などの概念を導入して簡便に解く問題 [7], [8], [10], [11], ①と③~⑥において注文主や売手・買手とゲーム論の意味において価格折衝が行なわれる場合、③~⑤において売買対象を危険分散の立場から分割売買する問題、③~⑤において売価や購入価格が正札で公表されている場合 [19], ③において売却益を  $T$  期間 (計画期間) にわたって経常費にあてその間破産しないように、しかもできるだけ高価格で売るという問題 [18], ⑤では最近日本でも導入がさかんに議論されている株のオプション取引との関係からつきない興味がある [20]。一方理論面からは、計画期間  $T = \infty$  で割引率  $\beta = 1$  の場合において解の存在や収束といった数学的にきわめてデリケートな問題および最適選択基準の性質についての理論的研究 [12], [13], [14] などが残されている。とくに後者の問題は、⑥における“正則性”の証明においては本質的な問題である。このような現実的な諸問題に対する研究と理論的な諸問題に対する研究の間をたえず往来しながら逐次選択過程の有効な一般体系を構築しようとするのが著者の当面の研究目標であり、本稿はまさにその出発点として執筆されたものである。

なお本稿投稿後、坂口実先生 (阪大) より本稿と密接な関係を持つ興味ある論文 [21] が送られてきましたことをここに付記します。

## 参考文献

- [1] Howard, R.A., Dynamic Programming and Markov Processes, The M.I.T. Press, (1960).
- [2] Derman, C., Finite State Markovian Decision Processes, Academic Press, (1970).
- [3] Sakaguchi, M., Dynamic Programming of some sequential sampling design, *J. Math. Anal. Appl.* 2, 446—466, (1961).
- [4] —, An Investment Problem: An Optimal Stopping Problem in which two stops are required, *J. Operations Research Soc. of Japan*, Vol. 14, No. 3 & 4 (1971).
- [5] Gilbert, J.P. and F. Mosteller, Recognizing

- the maximum of a sequence, J. Amer. Stat. Assoc, 61. 35—73, (1966).
- [6] J. MacQueen and R.G. Miller, Jr., Optimal Persistence Policy, *Operations Research*, May—June, (1960).
- [7] Senju, S. and Toyoda, Y., An Approach to Linear Programming with 0—1 Variables, *Man. Sci.* Vol. 15, No. 4, B 196—207, (1968).
- [8] Toyoda, Y., A Simplified Algorithm for Obtaining Approximate Solutions to Zero-One Programming Problems, *Man. Sci.* Vol. 21, No. 12, 1417—1427, (1975).
- [9] Morris, W.T., Some Analysis of Purchasing Policy, *Man. Sci.* Vol. 5, 443—452, (1959).
- [10] 千住鎮雄, 受注選択の最適化理論, インダストリアル・エンジニアリング, Vol. 11, No. 6, 8, 9, 10, 11, 12, (昭和44年).
- [11] 豊田吉顕, 多重制約下の受注選択に関する研究, 学位論文 (慶応義塾大学工学研究科, 1975年度).
- [12] 鈴木久敏, 受注選択問題における最適選択基準に関する研究, 日本経営工学会51年度春季研究発表会予稿集, 107—110.
- [13] 野村弘光, 徳橋隆行, 受注選択問題における最適政策の構造, 日本経営工学会51年度春季研究発表会予稿集, 364—365.
- [14] 野村弘光, 待ち行列システムにおける最適選択過程, 東海大学紀要工学部, No. 2, 71—75, (1974).
- [15] 生田誠三, 受注選択過程の基礎理論, JIMA, 第46号, 17—26, (1971).
- [16] —, パラメータの時間的変動を考慮した受注選択モデル, JIMA, 第51号, 9—18, (1972).
- [17] —, 最適受注選択問題の基礎的研究, 学位論文 (慶応義塾大学工学研究科, 1975年度).
- [18] —, 生存問題—財産処分によって破産を回避する問題, 日本OR学会 (1976) 秋季研究発表会アブストラクト集, 67—68.
- [19] —, 逐次選択問題における一般モデルとその応用, 日本OR学会 (1976) 秋季研究発表会アブストラクト集, 43—44.
- [20] 山一証券経済研究所編, オプション取引のすべて, 同文館, (1976).
- [21] Sakaguchi, M., Optimal Stopping Problems for Randomly Arriving offers, *Math. Japonicae* 21 (1976), 201—217.
- (いくた・せいぞう 東亜大学経営学部).