コーナー・インデックスについて

柳 井 浩

§1 コーナー・インデックス

英和辞典では単語がアルファベット順にならべてある．ページの上や左右には，そこにのせてある単語の頭文字が示されている．親切なものでは，ページの端の適当な位置に切り込みを入れたり，印をつけたりして，辞書を開かなくても必要なページがどの辺にあるのかがわかるようになっている．こんな配慮がされていない辞書の場合にも，几帳面に自分で印をつけている人もよく見かける．

電話帳や住所録の場合も同様である．自家用の電話帳や住所録をつくろうと思って文具店にいけば，そのための帳面がいろいろ取りそろえられている．たいがいはページの端にアルファベットやアイウエオが印刷されている．

これらは，どちらも，頭文字による分類であるが，われわれのまわりにはその他数多くの分類法がある．性別，年月日別，業種別，地域別等である．そこで，カードやルーズ・リーフのページを，目的に応じて分類し，これにコーナー・インデックスをつけることが必要になってくる．

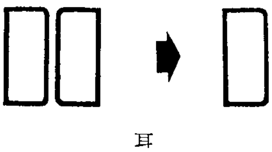
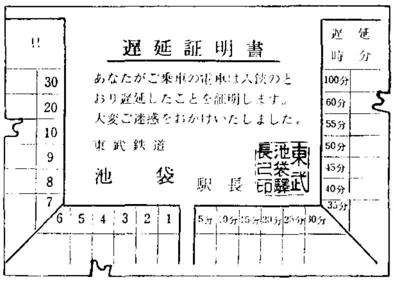


図 1

従来，このために仕切り用の色ページとか，「耳」と称せられる裏にのりのついた紙片が用いられてきた．しかし筆者の経験では，どうも具合がよくない．第1に，市販の仕切り用紙は高価であるうえ，種類が少なく，希望の分類に適さないことが多い．第2に，「耳」は貼りつけるのが面倒なうえ，はがれたり，ちぎれたりしやすい．「耳」だけがちぎれるのならまだしも，ページそのものがいたむのはどうにも不愉快である．


遅延証明書

あなたがご乗車の電車は[illegible]のとおり遅延したことを証明します。大変ご迷惑をおかけいたしました。

東武鉄道

池袋 駅長 東武池袋駅長之印

30 20 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

遅延時分 100分 60分 55分 50分 45分 40分 35分 30分 25分 20分 15分 10分 5分

図 2 小俣修一氏提供．なおこの遅延が東武電鉄の責任によるものでないことを注記しておく

整理を目的とするものではないが，図2のようにハサミを入れる方法もある．また，ホール・ソート・カードといって，このような切込みによって分類整理をするためのカードやハサミ等が市販されているが，そう手軽ではない．

そこで，筆者は数年来つぎのような方法を用いている．すなわち，右端に特別のマス目を印刷した紙を用意して，この紙に必要な事項を記入し，同時にその分類に該当するマス目をフェルト・ペン等でぬりつぶしてしまうのである．この方法によれば，紙を用意するにしても，謄写版等によれば比較的安価であるし，分類項目を直接印刷しておくこともできる．（マス目を印刷したカードやレポート用紙が市販されればよいのだが．）また，油性のフェルト・ペンはよくしみるので，とじてから，開かなくてもそのページの位置がわかる．さらに，つぎのマス目以下をハサミで切りとって，順にかさねてとじておけばページを開くのにも便利である．凝り性の人な

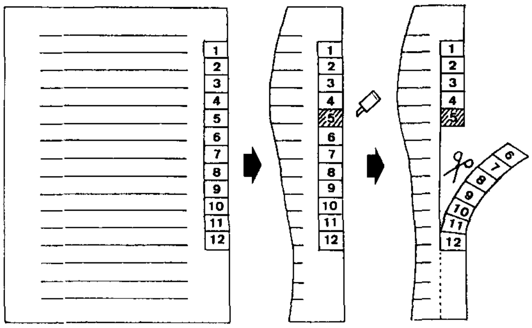


図 3

ら，マス目をぬりつぶすとき，色わけをして分類項目数をふやすこともできよう．（もっとも，これには常に色ものフェルト・ペンを用意しておかなくてはならないし，コピーをとるとき具合が悪いのでおすすめはできない．）

§2 分類法，コード化

どのような形にせよ，コーナー・インデックスは必要なものだし，便利なものであるが，なんといっても，限られた大きさの紙の上にそれなりの大きさの場所を占めるのであるから，マス目の数をそれほど多くするわけにはいかない．1つのマス目が占める幅は，見やすさ，紙の寸法の精度，印刷の精度，製本の精度，ルーズ・リーフの場合の穴の大きさ，あるいはカードとカード箱のすきま等を考えると，隣のマス目とのすきまも入れて1cm以下にするのはかなりむずかしい．そこで，JIS A4判(210mm×297mm)の紙の上端と右端を使っても，50個のマス目ぐらいがせいいっぱいであろう．普通使われているカード類の大きさはA5判以下であるから，この数を少なくする分類法を考える．

例　1年間＝366日の各日付ごとに分類されるべき多数のカードを考える．コーナー・インデックスのつけ方としては，極端な場合もふくめて，つぎのような例がある．

(i)　カードの端に366個のマス目をつくる．——この方法は，もちろん，紙の大きさから考えて不可能である．

(ii)　月を示すための12個のマス目と，日を示すための31個のマス目を用意する．——この方法によれば，マス目の数は全部で12＋31＝43となり，実行可能な数になる．

(iii)　日付の10の位の数は0，1，2，3の4種類であるから，このための4個のマス目と1の位のマス目を10個用意する．——この方法によれば，マス目の数は全部で12＋4＋10＝26となり，マス目の数はさらに少なくなる．

(iv)　月日というやり方をやめて，八十八夜とか二百十日というように，その年のはじめからかぞえて何日目にあたるかを示すことにしよう．この場合，100の位は0，1，2，3の4個，10および1の位には，それぞれ，10個ずつのマス目を用意する．——この方法によれば，マス目の数は全部で4＋10＋10＝24となり，マス目の数はさらに少なくなる．

このように，コード化に改良を加えることによってマス目の数をへらすことができる．理論的な最小値は何程であろうか？

ここで，ちょっと注意しておきたいことがある．それは「どのマス目もぬりつぶされていない場合にはゼロと見なす」というやり方についてである．たとえば，先の例の(iii)において，日付の10の位の数は0，1，2，3の4つであるが，このやり方にしたがえば1，2，3の3つのマス目を準備すればよいことになる．ただこの方法によると，書き忘れ，情報不足等による未記入等がことごとく0とみなされてしまうという欠点があるので，ここでは考えないことにする．

このような条件のもとで，必要なマス目の数をもっとも少なくするようなコード化がどのようなものであるかを考えてみよう．

§3 定　式　化

1°) 分類項目総数をNとする．§2の例でいえば$N=366$である．

2°) 分類というものは，一般に，いわゆるトゥリー構造を持っている．§2の例の(iii)の分類法を示したのが図6である．

これは，いわば，カードのマス目を展開したもので，レベルⅠの点からは12の月に対応する12本の枝，レベルⅡの各点からは日付の10の位の数0，1，2，3に対応する4本の枝，レベルⅢの各点からは日付の1の位の数に対応する10本の枝が出ている．（もっとも，32～39日という日付は存在しないのだから，レベルⅢの点3からは0と1に対応する2本の枝が出ていればよいのだが，カードのマス目では図のような構造になっている．）

そこで，図4のトゥリーは

$$(12,\ 4,\ 10)$$

という構造を持っているということにしよう．一般の場合にも

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

という書き方をすればよい．ここに，x_iは第iレベルの各点から出ている枝の数である．したがって，x_iは

$$x_i \geqq 2$$

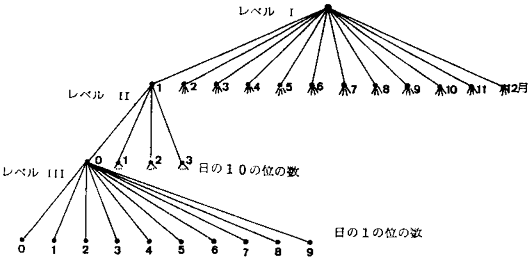


図 4

なる整数である．実際，$x_i=0$ や $x_i=1$ では分類上意味がない．また，n はレベルの数である．

3⁰) ところで，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ という構造のコード化によれば

$$x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

種の分類項目がつくれる．したがって，必要な分類項目総数が N なら

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \geqq N$$

という関係が成立していなければならない．

§2の例の(iii)の場合には

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 12 \times 4 \times 10 = 480 > 366$$

であるから366種の‘日付’を区別するのに十分だということがわかる．

4⁰) 一方，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ という構造の場合には

$$J_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

という個数のマス目が使われる．§2の例の(iii)の場合には，すでに述べたように，

$$J_3 = 12 + 4 + 10 = 26$$

である．

5⁰) そこで，問題をつぎのように定化することができる．

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \min_{\{x_i, n\}}!$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \geqq N \qquad \text{(定式化 1)}$$

$$x_i \in \{2, 3, 4, \cdots\}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

ここで注意すべきことは，n も変数だということである．最適なコード化がいくつのレベルからなるトゥリー構造を持つのかはまだわかっていないからである．

6⁰) もう1つ注意しておこう．x の添字 i はレベルの番号を入れかえても差し支えはない．もちろん，この場合トゥリーの外見は変わるが，われわれの問題にはなんの影響も与えない．‘日付’は年月日の順に示されても，日月年の順に示されても，はっきり約束ができていればよいはずである．実際，日本の習慣では年月日の順に書かれるが，英語圏では月日年，ドイツ語，フランス語では日月年の順に書かれる習慣になっている．

§4 大ざっぱな解法—3進分類法

まず問題の大ざっぱな解を求めてみよう．§5で厳密な解法を述べるが，答はほとんど同じになる．定式化1における問題のむずかしさは x_i や n が正の整数だという点にある．

1⁰) まず n を与えられたものとし，x_i や N が整数だという条件も忘れ，不等号条件も等号条件におきかえて，つぎのような問題を解いてみることにしよう．

日	51. 6. 15
独	15. Juni 1976
仏	15 JUIN 1976
英	JUN 15 1976

図 5

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \min_{\{x_i\}}!$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = N \qquad \text{(定式化 2)}$$

$$x_i \in \boldsymbol{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

λ をラグランジュ乗数とし，ラグランジュ関数 L を

$$L := \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda\left(\prod_{i=1}^{n} x_i - N\right)$$

と定義し，これを x_i で微分してゼロとおけば

$$1 - \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j = 0$$

を得る．したがって‘最適な’な x_i（$\hat{x}_i$ とかく）はつぎの式を満足する

$$\hat{x}_i - \lambda \prod_{j=1}^{n} \hat{x}_j = 0$$

すなわち

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \cdots = \hat{x}_n$$

さらに制約条件から

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \cdots = \hat{x}_n = N^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = n N^{\frac{1}{n}}$$

を得る．

このことから，各レベルの各点から出る枝の数は，大ざっぱにいって，等しいのがよいということがわかる．

2⁰) つぎに，$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = nN^{\frac{1}{n}}$ を最小にするような n を求めよう．$\ln z$ という関数は狭義の単調増加性を持つから

$$\ln \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = \ln n N^{\frac{1}{n}}$$

$$= \ln n + \frac{1}{n} \ln N$$

を n に関して最小にすればよい．ここでも n が整数だという条件を忘れて，微分してゼロとおけば，‘最適な’ n（$\hat{n}$ とかく）がつぎのようにして求められる．

$$\frac{d}{dn}\left[\ln n + \frac{1}{n} \ln N\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \ln N$$

$$\frac{1}{\hat{n}} - \frac{1}{\hat{n}^2} \ln N = 0$$

$$\hat{n} = \ln N$$

また，これに対応して

$$\hat{x}_i = N^{\frac{1}{\hat{n}}} = N^{\frac{1}{\ln N}} = e \fallingdotseq 2.7$$

が得られる．

このことから，最適なコードの場合，各レベルの各点から出る枝の数は，レベルによって，2あるいは3がよいことがわかる．いいかえれば，2～3進法で分類するのがよい．

3⁰）3進法分類法によって新しい暦をつくり，月日をあらわしてみよう．

$\ln 366 \doteqdot 5.90$

$3^6=729,\ 3^5 \cdot 2^1=486$

であるから(3, 3, 3, 3, 3, 2)という構造を持つトゥリーをつくればよい．(§5で(3, 3, 3, 2, 2, 2, 2)という形の解もあることがわかる.)こうすればマス目の数は3×5＋2＝17個ですむ．この暦によれば

1月1日～(1, 1, 1, 1, 1, 1)

1月2日～(1, 1, 1, 1, 1, 2)

1月3日～(1, 1, 1, 1, 2, 1)

1月4日～(1, 1, 1, 1, 2, 2)

という具合にあらわされる．

ことわっておくが，こういった暦法がマス目の数を少なくするからといって，現行の暦法をやめてこれにかえようと主張しているのではない．こんなやり方でカードに日付がつけられたら誰だって迷惑する．ただ，現行のものが理論的な最適解と比べてどのぐらい違うかを参考にすればよいと考えている．§2の例の(iii)で述べた方法ではマス目の数が26個であるが，われわれの習慣ということを考えれば立派なものだと思っている．

§5　厳密な解法

§4では§3でたてた問題を大ざっぱに解いてみた．§3でたてた問題は整数形の計画問題である．よく知られているように，整数形の計画問題の最適解は整数条件をとりのぞいた問題の最適解を‘丸めた’ものとはかぎらない．この点の不安を解消するため，もう一度，厳密な解法を試みることにする．

1⁰）§3で述べたように，分類というものはトゥリー構造を持っている．そこで各レベルの点から出ている枝の数を$x_1, x_2, \cdots, x_n$として，これで分類の構造を示した．

また，xの添字はレベルの番号をあらわしているのだが，この番号を入れかえても差し支えのないことは§3ですでに注意した．

さらに，x_iは2以上の整数であるから，$(x_1, x_2, \cdots x_n)$と書いて分類法を示すかわりに，x_iのうちで等しいものを大きさの順に並べて

$$\overbrace{2, \cdots, 2}^{y_2}; \overbrace{3, \cdots, 3}^{y_3}; \cdots; \overbrace{k, \cdots, k}^{y_k}; \cdots$$

とかいて$(y_2, y_3, \cdots, y_k, \cdots)$によって分類法を示すこともできる．すなわち

y_k：各点から出る枝の数がk本であるレベルの数

$y_k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$

したがって，レベルの数nは

$$n=y_2+y_3+\cdots+y_k+\cdots$$

となる．また

$$\prod_{i=1}^{n} x_i=2^{y_2}3^{y_3}\cdots k^{y_k}\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=2y_2+3y_3+\cdots+ky_k+\cdots$$

となる．

そこで，われわれの問題をつぎのように定式化しなおすことができる．

$$J=2y_2+3y_3+4y_4+\cdots=\min!$$
$$2^{y_2}3^{y_3}y_4\cdots \geqq N \qquad \text{（定式化3）}$$
$$y_k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$$

あるいは，対数をとって，

$$J=2y_2+3y_3+4y_4+\cdots=\min!$$
$$(\ln 2)y_2+(\ln 3)y_3+(\ln 4)y_4+\cdots \geqq \ln N$$
$$y_k \in \{0, 1, 2, \cdots\} \qquad \text{（定式化4）}$$

2⁰）定式化3あるいは4をみれば，これらが無限個の変数に関する整数形線形計画問題であることがわかる．しかし，これらにおいて，$y_4=0,\ y_5=0, \cdots$としてもよいことが証明される．いいかえれば，4本以上の枝を持つレベルは，2本あるいは3本の枝を持ついくつかのレベルにわけても，うまくやれば，マス目の数をふやさないですむのである．

補助定理

≪$k \in \{4, 5, 6, \cdots\}$，$y_k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$

のとき

$k_{y_k} \geqq 2y_2+3y_3$

$k^{y_k} \leqq 2^{y_2} \cdot 3^{y_3}$

なる$y_2, y_3 \in \{0, 1, 2, \cdots\}$が存在する．≫

証明はむずかしくはないが，場合わけをして1つずつ取りあつかわなければならない．退屈なので割愛する．

3⁰）2⁰の補助定理によって，y_2あるいはy_3だけがゼロでない値を持つ分類法の中に最適解が少なくとも1つはあることがわかった．そこで，あらためて

$u=y_2$

$v=y_3$

とおき，問題をつぎのように定式化しなおす．

$$f(u, v)=2u+3v=\min!$$
$$2^u 3^v \geqq N \qquad \text{（定式化5）}$$
$$u, v \in \{0, 1, 2, \cdots\}$$

あるいは，これと等価であるが，対数をとって

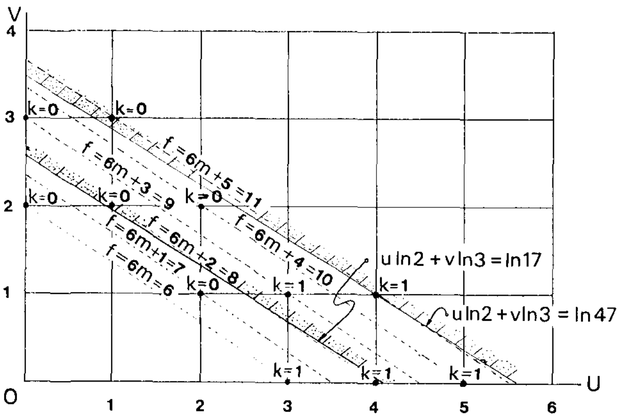


図 6

$$f(u,v)=2u+3v=\min!$$
$$u\ln 2+v\ln 3 \geqq \ln N \qquad (定式化 6)$$
$$u,v\in\{0,1,2,\cdots\}$$

とすることもできる.

これは2変数の整数線形計画問題であるから図6のように図示することができる.

目的関数 $f(u,v)$ の等高線は，u, v を実数として考えるなら，勾配 $-2/3$ の直線である．しかし u, v は非負の整数しかとらないので，目的関数の値が等しくなる格子点を結んだとしても，等高線はとびとびにしかあらわれない．これらの等高線を整等高線とよぼう.

一方，制約条件を与える境界線

$$u\ln 2+v\ln 3=\ln N$$

は $-\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\cong -0.63$ という勾配を持つ，f の等高線よりはほんの少し横に‘ねた’直線である.

さて，uv-平面における，第1象限の格子点で，直線 $u\ln 2+v\ln 3=\ln N$ から上側にあるものが，われわれの問題の許容解である．境界線と整等高線とは平行ではないから，境界線は，通常，何本かの整等高線と交わる．これらの整等高線のうちで，値のもっとも小さいものの上に格子点があれば，これが最適解である．なければ，つぎつぎと，値の大きい整等高線の上をさがせばよい.

また，図6からつぎのようなこともわかる．すなわち v 軸上の相隣る2つの格子点の間には，常に，2本の整等高線が通っているから，$u=0$ なる解だけを用いることにしても，f の値としてはたかだか2だけ大きくなることがあるにすぎない．したがって，3進法を使っても2および3による‘変’進法の場合よりそれほどよくなるわけではない．マス目が，せいぜい2つ節約できるだけである.

しかし，ここでは少しいこじになって正確な解を求めてみることにしよう．そのために，もう少し話をくわしくする.

整等高線上の格子点

整等高線によって uv-平面における，第1象限の格子点を分類する．整等高線の係数が2と3で，その最小公倍数が6であるから，整等高線も6種類に分類する．（整等高線上の非負格子点の数まで考えると6種類に分類することが必要だが，その他の取りあつかいでは，もう少し粗い分類ですむものがある．いちいち区別するのも煩雑さを増すだけなので，本稿では6種類に分類することで統一した.）表1がその結果である．また，ここで，同一整等高線上にある格子点が

$$\left.\begin{array}{l} u_k=u_0+3k \\ v_k=v_0-2k \end{array}\right. \quad k=0,1,2,\cdots,m\,(m-1)$$

と書けることに注意しよう．ここに，k は同一整等線上にある非負格子点に，左側からつけた番号である.

つぎの命題は明らかであろう.

最適解の必要十分条件—1

格子点 (u,v) が値 $f=2u+3v$ を持つ整等高線上にあるとき≪格子点 (u,v) が最適解であるための必要十分条件は，(u,v) が許容解であり，値 f-1 を持つ整等高線上の格子点がどれも許容解でないことである.≫

最適解の適応性

つぎに，整数Nを少しずつ増加させてみよう．境界線は上に向って少しずつ平行移動する．境界線の上昇にともない，同じ整等高上にならんでいる格子点も，右側にあるものから順に許容領域の外に脱落していく．そこでつぎの命題が成立する.

≪ある整等高線上の格子点 (u_k,v_k) が最適解だとすれば，同一整等高線上の，これより左側にある非負格子点 (u_k,v_k) $(k=0,1,\cdots,k)$ も最適解であるが，逆はかならずしも成立しない.≫

実際，図6において，$N=47$のとき，$u_1=4$，$v_1=1$ は最適解の1つであるが，同時に，同じ整等高線上左側にある $u_0=1$，$v_0=3$ も最適解である.

逆に，$N=17$のとき，$u_0=1, v_0=2$ は最適解であるが，同じ整等高線上右側にある格子点 $u_1=4$, $v_1=0$ は $2^{u_1}3^{v_1}=16<17$であるから許容解でなく，したがって最適解でもない.

表 1 $m=0,1,2,\cdots$

$f(u,v)$	u	v	k	個数
$6m$	$u_k=3k$	$v_k=2m-2k$	$k=0,1,\cdots,m$	$m+1$
$6m+1$	$u_k=3k+2$	$v_k=2m-2k-1$	$k=0,1,\cdots,m-1$	m
$6m+2$	$u_k=3k+1$	$v_k=2m-2k$	$k=0,1,\cdots,m$	$m+1$
$6m+3$	$u_k=3k$	$v_k=2m-2k+1$	$k=0,1,\cdots,m$	$m+1$
$6m+4$	$u_k=3k+2$	$v_k=2m-2k$	$k=0,1,\cdots,m$	$m+1$
$6m+5$	$u_k=3k+1$	$v_k=2m-2k+1$	$k=0,1,\cdots,m$	$m+1$

したがって，最適解の集合のうちでも，u の値が小さい最適解ほど多くのNに対して最適解でありうる．このことをつぎのようにいうことにしよう．

≪最適解の集合のうちでも，u の値(したがって k の値) が小さいものほど‘適応性’が大きい．すなわち，(u_0, v_0)が適応性がもっとも大きい最適解になる.≫

以上から，最適解の必要十分条件をつぎのようにいいなおすことができる．

最適解の必要十分条件—2

格子点(u, v)が値$f:=2u+3v$ を持つ整等高線上にあるとき，≪格子点(u, v) が最適解であるための必要十分条件は，(u, v)が許容解であり，値$f-1$を持つ整等高線上にある，もっとも左側にある非負格子点が許容解でないことである.≫

最適解が存在する範囲

前にも述べたように，境界線は目的関数の整等高線より‘ねて’いるので，境界線は通常何本かの整等高線と交わる．このため，非負格子点のうちで u の値(したがって k の値)がある程度以上大きいものは最適解にはなり得ない．

わかりやすくするために a, b 等の係数を少しかえて図解したのが図7である．図7において

直線 P_0P_1 を $au+bv=f$

直線 Q_0Q_1 を $au+bv=f-1$

直線 R_0R_1 を $au+bv=f-2$

なる値を持つ整等高線としよう．いま，境界線がAの位置にあるとき，P_0が唯一の最適解である．Nの値を少しずつ小さくすれば境界線は下降し，整等高線 P_0P_1 との交点は右下へ移動し，やがて格子点 P_1 に到達する(境界線C)．しかし，このときには境界線と整等高線Q_0Q_1との交点が，すでに第1象限に侵入しており，格子点Q_0が最適解になっている．したがって，整等高線 P_0P_1 上の最適解は点 S_0(Q_0 をとおる境界線 B と整等高線 P_0P_1 との交点)の左側にしか存在し得ない．

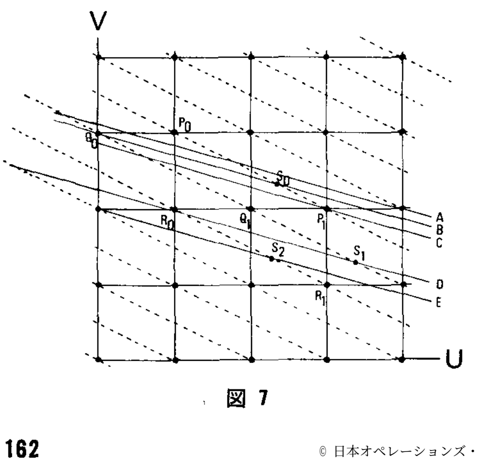


図 7

同様の議論によって，整等高線 $Q_0Q_1(R_0R_1)$の最適解が点 S_1 (S_2) より左側にしか存在し得ないことがわかる．

このように，最適解の集合には，その整等高線によって異なる上限がある．この上限はその整等高線や相隣る(1つ下側にある)整等高線上の格子点の分布に依存してきまるので，これらを表1に対応してくわしく計算すると表2のようになる．

最適解の一覧表

以上に述べた条件をみたす非負の格子点はなんらかのNに対して最適解となる．また，すでに述べたように，最適解は境界線 $u\ln 2+v\ln 3=\ln N$ のすぐ上にある整等高線上の非負の格子点であり，N の増加にともない，右側にあるものから順に許容領域外に脱落し，ついで1つ上の整等高線上の格子点が最適解になる．そこで，最適

表 2

$f(u, v)$	$\hat{u}$	k
$6m$	$\hat{u}\leqq 9$	$k\leqq 3$
$6m+1$	$\hat{u}\leqq 8$	$k\leqq 2$
$6m+2$	$\hat{u}\leqq 10$	$k\leqq 3$
$6m+3$	$\hat{u}\leqq 9$	$k\leqq 3$
$6m+4$	$\hat{u}\leqq 8$	$k\leqq 2$
$6m+5$	$\hat{u}\leqq 10$	$k\leqq 3$

表 3　(＊はもっとも適応性の大きい解)

	N			f	u	v	m
	3^{2m}		$2^8 3^{2m-5}$	$6m+1$	8	$2m-5$	$m\geqq 3$
			$2^5 3^{2m-3}$		5	$2m-3$	$m\geqq 2$
＊			$2^2 3^{2m-1}$		2	$2m-1$	$m\geqq 1$
	$2^2 3^{2m-1}$		$2^{10} 3^{2m-6}$	$6m+2$	10	$2m-6$	$m\geqq 3$
			$2^7 3^{2m-4}$		7	$2m-4$	$m\geqq 2$
			$2^4 3^{2m-2}$		4	$2m-2$	$m\geqq 1$
＊			$2\ 3^{2m}$		1	$2m$	$m\geqq 0$
	$2\ 3^{2m}$		$2^9 3^{2m-5}$	$6m+3$	9	$2m-5$	$m\geqq 3$
			$2^6 3^{2m-3}$		6	$2m-3$	$m\geqq 2$
			$2^3 3^{2m-1}$		3	$2m-1$	$m\geqq 1$
＊		$<N\leqq$	3^{2m+1}		0	$2m+1$	$m\geqq 0$
	3^{2m+1}		$2^8 3^{2m-4}$	$6m+4$	8	$2m-4$	$m\geqq 2$
			$2^5 3^{2m-2}$		5	$2m-2$	$m\geqq 1$
＊			$2^2 3^{2m}$		2	$2m$	$m\geqq 0$
	$2^2 3^{2m}$		$2^{10} 3^{2m-5}$	$6m+5$	10	$2m-5$	$m\geqq 3$
			$2^7 3^{2m-3}$		7	$2m-3$	$m\geqq 2$
			$2^4 3^{2m-1}$		4	$2m-1$	$m\geqq 1$
＊			$2\ 3^{2m+1}$		1	$2m+1$	$m\geqq 0$
	$2\ 3^{2m+1}$		$2^9 3^{2m-6}$	$6m+6$	9	$2m-4$	$m\geqq 3$
			$2^6 3^{2m-4}$		6	$2m-2$	$m\geqq 2$
			$2^3 3^{2m-2}$		3	$2m$	$m\geqq 1$
＊			3^{2m}		0	$2m+2$	$m\geqq 0$

解を表3のようにならべることができる．なお，表3において，mに下限が与えられているのは，mがこれより小さいと対応する格子点が$v≧0$という条件をやぶって，第1象限の外に出てしまうことがあるためである．下限より小さいmの場合には，非負性の条件が満たされているか否か，いちいち確める必要がある．

また，もっとも適応性の大きい最適解を，$N=1$, ～, 59048について示したのが表4である．ここで，もっとも適応性の大きい最適解は$u≦2$の範囲にあることを注意しておこう．

おわりに

このようにして，3(2)進法がもっとも場所をとらない分類法だということがわかった．試みに10進分類法と比較してみよう．10進2桁なら$10^2=100$の分類項目をまかなうことができるが，$10+10=20$のマス目が必要である．これに対し，3(2)進法なら，表4から明らかなように，20個のマス目で1458の分類項目をまかなうことができる．

表 4

N			f	u	v
1		2	2	1	0
2		3	3	0	1
3		4	4	2	0
4		6	5	1	1
6		9	6	0	2
9		12	7	2	1
12		18	8	1	2
18		27	9	0	3
27		36	10	2	2
36		54	11	1	3
54		81	12	0	4
81		108	13	2	3
108		162	14	1	4
162	$<N≦$	243	15	0	5
243		324	16	2	4
324		486	17	1	5
486		729	18	0	6
729		972	19	2	5
972		1458	20	1	6
1458		2187	21	0	7
2187		2916	22	2	6
2916		4374	23	1	7
4374		6561	24	0	8
6561		8748	25	2	7
8748		13122	26	1	8
13122		19683	27	0	9
19683		26244	28	2	8
26244		39366	29	1	9
39366		59049	30	0	10

しかも，この3という数が，われわれにとって大変なじみの深いものであることはなおありがたい．事実，こういった分類も身近かに数多い．大，中，小；特上，上，並；松，竹，梅等はその例である．さらに帝国陸海軍の士官の階級に(大中少)×(将佐尉)と3進法が用いられていたことも肩章や襟章という小さな場所に，金筋や星の数で階級を示す必要性とあわせて考えると興味深い．

また，弥陀如来の印相(手のくみあわせ方)も九品印といって(上品，中品，下品)×(上生，中生，下生)の階位に分類されているのだそうである．

もちろん，ここで電子計算機の記憶装置との関係についても指摘しておかなければならない．磁気記憶装置の素子も2つの状態だけをとり得るようになっているという点で，われわれのマス目と同じである．そこで，使用する素子の数を少なくしようとすれば，本論の結果が最適だということになる．

本稿の結果を得たのち，筆者は，何人かの，とくに電子計算機関係の専門家の方に粗稿を示し，意見を求めた．その結果‘e進法’の最適性については，ずっと以前から知られていること[1]，また，ホール・ソート・カードに関する理論としてやはりe進法の最適性が確められていること[2]等がわかった．しかし，整数計画の問題として取りあつかったものはまだないようなので本誌の紙面をお借りすることにした．

数学的な取りあつかいという点からいえば本稿よりもう少し一般的で厳密な取りあつかいが可能であるが，あまり退屈なものになってもいけないし，編集の森村英典先生のご意向もあったので，できるかぎりはぶいて話をすすめた．この点，ものたりなく思われた方もあろうかと思う．くわしい点については別の機会に発表しようと思い，目下準備中なのでご意見等お寄せいただければ幸いである．

最後に，多くの有益なご意見や資料をくださった山梨大・末包良太，防衛大の岸　尚の両先生，また同僚の大駒誠一，新井康世，福川忠昭，永田守および西村知夫の各氏に感謝の意を表したい．

参 考 文 献

[1] 城　憲三，牧之内三郎；「計算機械」共立出版，東京
[2] 増山元三郎他；「パンチカードの理論と実際」南江堂，東京1957

(やない・ひろし　慶応義塾大学工学部)