“辞書的順序”や“摂動”は線形計画法の教科書から姿を消すことになるでありましょう

第9回数理計画法国際シンポジウム
(1976年8月ブダペスト)
における話題から

伊 理 正 夫

はじめに

3年ごとに開かれている International Symposium on Mathematical Programming の第9回目が去る8月ハンガリーのブダペストで開催された．主催国が東欧圏にあったにもかかわらず300余名の参加者が集まり盛会であったのは，この分野の研究が世界的にすっかり定着したことを示すものとして喜ばしい．日本からの参加者は6名，発表は7件(共著を含めると8件)であった．

この Symposium の International Program Committee の一員に加えられてしまったこともあって，1週間の会期中できるだけ真面目になるべく幅広くいろいろな sessions に顔を出して，数理計画法の理論および応用の世界における最近の動向を知ろうと努めてみた．

いうまでもなく，話の大半は日本でいえば修士論文に毛の生えたようなものであったが（もっとも，最近では日本の修士論文の質も急落の一途をたどっているとの説もあるのでこの比較は当を得ていないかもしれない)，さすがにこれはと感心させられる話も多かった．特定の専門的主題に関する高度の研究のすばらしいものについては，それぞれ，適当な機会に適当な方法で紹介されることを期待して，おそらくほとんどすべての読者が関心を持たれるであろうごく初等的な話題で，私が感心したことの1つを紹介させていただきたい．

話をしたのは，2年ほど前に Cornell 大学で故 Fulkerson 教授のもとで博士課程を終えた Robert G. Bland という若い人．彼の研究の本当の目的は，マトロイドに方向性を持たせたような数学的体系の公理化というようなことであるらしいが，そのような“一般的立場から”線形計画法とその解法としての単体法を眺めているうちに気づいたことであるという．

単 体 法

線形計画法について学んだことのある人なら誰でも単体法のことはご存知だろうが，一応の復習を兼ねて，記号の定義をしておこう．

c_0, a_{ij}, b_i, c_j $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$を与えられた実定数として(行列$[a_{ij}]$の階数は$m$であると仮定する)，**制約条件：**

$$x_j \geqq 0 \quad (j=1,\cdots,n), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,\cdots,m) \tag{2}$$

を満足する**実行可能解** x_j の中で目的関数：

$$z = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3}$$

の値を最小にするようなものを求めるというのが，標準形の線形計画問題である．n 個の変数 x_j の中から適当に m 個のもの(**基底変数**とよばれる；その番号の集合を$I=\{i_1,\cdots,i_m\}$とし，残りの番号の集合を$J=\{1,\cdots,n\}-I$とする）を選び，(2)，(3)の $m+1$ 個の式の適当な一次結合をつくることによって，(2)，(3)と等価な式群でつぎの形(**基底形式**とよばれる)をしたものを得ることができる($\bar{c}_0, \bar{a}_{ij}, \bar{b}_i, \bar{c}_j$ は I を定めれば定まる)：

$$x_i + \sum_{j\in J} \bar{a}_{ij}x_j = \bar{b}_i \quad (\forall i \in I), \tag{4}$$

$$z = \bar{c}_0 + \sum_{j\in J} \bar{c}_j x_j. \tag{5}$$

すべての $i(\in I)$に対して $\bar{b}_i \geqq 0$ であるような基底 I のことを**実行可能基底**とよぶ．実行可能基底でかつ $\bar{c}_j \geqq 0$ $(\forall j \in J)$ であるようなもののことを**最適基底**とよぶ．I が最適基底なら，$x_i=\bar{b}_i(\forall i\in I)$，$x_j=0\ (\forall j\in J)$，$z=\bar{c}_0$ が問題の解を与える．そして，問題に解があるならこのような形の解（**最適基底解**という）があるということも，単体法の副産物として知ることができる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

具体的に線形計画問題を解くためには，現在では単体法を用いるのが定石になっている．(主)**単体法**では，まず，何か1つ実行可能基底 I が与えられたとして，そこから出発する（そのような基底は，もとの問題を少し修正した問題をやはり単体法で解くことによりつくることができる）．そして，$\bar{c}_j\,(j\in J)$ の中に負のものがなければ I が最適基底であるからすべては終わる．
そうでなければ

＜A＞　$\bar{c}_{j_0}<0$ であるような1つの $j_0(\in J)$ を選び，その j_0 に対して

＜B＞　$\bar{a}_{ij_0}>0$ であるような $i(\in I)$ の中で $\bar{b}_i/\bar{a}_{ij_0}$ の値がもっとも小さいようなものの1つ，i_0，を選び，

（すべての $i(\in I)$ に対して $\bar{a}_{ij_0}\leqq 0$ なら，もとの問題に有限な解がないことはすぐわかるので，このときも終わりになる），

$$I'=(I-\{i_0\})\cup\{j_0\},\qquad J'=(J-\{j_0\})\cup\{i_0\}$$

とおくと，簡単に検算できるように，I' がまた1つの実行可能基底で，それに関する基底形式の諸係数は

$$\bar{a}'_{ij}=\bar{a}_{ij}-\bar{a}_{ij_0}\bar{a}_{i_0j}/\bar{a}_{i_0j_0}\qquad(\forall i\in I'-\{j_0\},\ \forall j\in J'-\{i_0\},\qquad(6)$$

$$\bar{a}'_{j_0j}=\bar{a}_{i_0j}/\bar{a}_{i_0j_0}\quad(\forall j\in J'-\{i_0\})\qquad(7)$$

$$\bar{a}'_{ii_0}=-\bar{a}_{ij_0}/\bar{a}_{i_0j_0}\quad(\forall i\in I'-\{j_0\})\qquad(8)$$

$$\bar{c}'_0=\bar{c}_0+\bar{c}_{j_0}\bar{b}_{i_0}/\bar{a}_{i_0j_0}\qquad(9)$$

$$\bar{c}'_j=\bar{c}_j-\bar{c}_{j_0}\bar{a}_{i_0j}/\bar{a}_{i_0j_0}\quad(\forall j\in J'-\{i_0\})\qquad(10)$$

$$\bar{c}'_{i_0}=-\bar{c}_{j_0}/\bar{a}_{i_0j_0}\qquad(11)$$

$$\bar{b}'_i=\bar{b}_i-\bar{b}_{i_0}\bar{a}_{ij_0}/\bar{a}_{i_0j_0}\quad(\forall i\in I'-\{j_0\})\qquad(12)$$

$$\bar{b}'_{j_0}=\bar{b}_{i_0}/\bar{a}_{i_0j_0}\qquad(13)$$

となる．そこで，この新しい I' を I だと思って，上の手続(**ピボット演算**という)を繰り返すというのが，単体法である．

単体法でピボット演算を反復しているときつぎつぎとあらわれる実行可能基底において

＜C＞　追い出される番号 i_0 に対して $\bar{b}_{i_0}>0$

が常に成り立っていれば，$\bar{c}_{j_0}<0$ で $\bar{a}_{i_0j_0}>0$ であるから，(9)により $\bar{c}'_0<\bar{c}_0$ である．$\bar{c}_0$ は基底を定めれば定まるものであるから，この場合，反復の過程で同一の基底が2度以上あらわれることはできない．基底の数が ${}_nC_m$ を超えないことは自明であるから，単体法の計算はいつかは終わりになる．

仮定＜C＞が成り立っているとすれば，以上のようなきわめて簡単な原理にもとづく話に少々周辺的な補いをするだけで，単体法の話は完了するわけである．

退化と巡回

線形計画法のことが書いてある本をみると，単体法について上記のような記述だけですませてあるものも少なくない．それで実用上あまり困らないからである．上記のような話だけを理解してプログラムを組んだものがいたとしても，そのプログラムはまず間違いなくすべての線形計画問題を解いてくれるであろう．しかし，実際には仮定＜C＞が成立たない場合（**退化**が起きているという）はいくらでもあるので，理論的にはもっと“きちんとして”おかないと気持が悪い．

そこで，“ちゃんとした”本では，そこのところに大変な神経を使う．退化が起きると，上記の規則＜A＞，＜B＞にしたがって基底の変換を行なっているというだけでは，もしかすると同じ基底がなんべんもあらわれて，いつになっても脱出できない無限ループに入り込むかもしれない．少なくとも理論的にはそうならないという保障はない．また実際，規則＜A＞，＜B＞にしたがっているというだけでは，そのような**巡回**に陥る例がいくつか古くから知られている．退化が生じても巡回は起こさないようにするために，単体法をさらに精密化して，$\bar{b}_i$ と $\bar{c}_0$ を単なる“数”ではなく“ベクトル”に一般化し，数の大小関係をベクトルの間の“辞書的順序”に一般化した大がかりな“理論”に裏づけられた方法が考えられ，本格的な書物にはそのことが相当の行数（いやむしろページ数）を割いて書いてある．（少し直観的にわかりやすい説明として“摂動法”というものもあるが，内容的にはほぼ同じものである．）

私自身も致し方なくそうした本を書いたことがあるが（“線形計画法”，白日社，1973），とにかくここのところを書くときは厭な気分であった．しかも，巡回の例を人為的につくることができるにもかかわらず，辞書的順序のような特別の巡回対策をとり入れないで普通につくられたプログラムでもけっして循回は起こさないということが“経験的に”知られているのであるから（だからかどうかはしらないが，商用の大規模ＬＰシステムの単体法のプログラムにも巡回対策は施されてないという話を聞いたことがある），何のためにこんな大がかりな“理論”を展開しなければならないのかと，書きながら懐疑的にならざるをえなかった．

退化が起こるとどうなるかをもう少しくわしく観察してみよう．規則＜B＞により基底から追い出される i_0 に対して $\bar{b}_{i_0}=0$ であれば，規則＜A＞により基底にとり入れられる j_0 に対してつぎの基底では $\bar{b}'_{j_0}=0$ となり（式(13)参照），またそれ以外の $i(\in I)$ に対しては

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$\bar{b}'_i=\bar{b}_i$ である(式(12)参照). そして, ある基底に関して $\bar{b}_i=0$ で, そのとき規則<A>により選ばれた j_0 に対して $\bar{a}_{ij_0}>0$ であれば, その i は i_0 として選ばれる候補となる. そこで, $\bar{c}_0$ が減少しないで一定に保たれている間は(したがって巡回を起こしてしまえばもちろん), ある j が基底にとり入れられるとそれが基底から追い出されるまで $\bar{b}_j=0$ でありつづける.

Bland 氏の巡回対策

もちろん巡回が起こるかどうかは, 規則<A>, <B>で j_0, i_0 が一意的に定まらない場合にどのようにして j_0, i_0 を定めるかにも依存する. Bland 氏が提案している対策にはかなり手の込んだ(しかし実用的には効率のよさそうな)ものもあるが, その中でもっとも簡単明瞭(ばかばかしいほど単純)なのはつぎのとおりである:

<A′> 規則<A>で j_0 を選ぶとき候補者が2個以上あれば, もっとも小さいもの(問題を与えるとき変数にふられていた番号のもっとも若いもの)を選べ;

<B′> 規則<B>で i_0 を選ぶとき候補者が2個以上あれば, もっとも小さいものを選べ.

これで, どのような場合にも i_0, j_0 が確定することは間違いない. そして, もし巡回が生じるとしたら, それは, ある定まった基底の集合の中を定まった順序で永久に廻りつづけるものになるであろう.

しかし, これほど簡単なことで巡回が起こらないのなら, なぜもっと早く気づかれなかったのであろうか. もしかすると, すでに気づきかけた人はいたのに, "摂動"とか"辞書的順序"とかいう概念が大変もっともらしいので, 「むずかしいことは有難いことだ」という偏見に専門家が惑わされていたため, それ以上つきつめることがされなかったのではなかろうか.

巡回が起こらないことの証明

上記の対策<A′>, <B′>にしたがうと巡回が起きないということの Bland 氏による証明が, また, つぎのようなきわめて初等的な容易なものであるというのも嬉しい. いまや, 線形計画法の理論は, 厳密さを犠牲にせずにしかもきわめて簡単に述べられるようになったわけである. 証明の方針は, 対策<A′>, <B′>をとり入れたにもかかわらず巡回が起こったと仮定して矛盾をみちびくことである.

巡回に入り込んだ後基底にとり入れられる番号の集合を T とする(T は, 巡回に入り込んだ後, 基底にとり入れられる番号の集合をとするは巡回に入り込んだ後基底から追い出される番号の集合であるとしても同じことになることは明らか). T の中で最大のものを q とする:

$$q=\max\{j\,|\,j\in T\}. \tag{14}$$

q は巡回中に基底からなんべんでも出, なんべんでもそれに入るが, そのうちの任意のところで, q が基底に入る直前の基底を I, それに関する基底形式を(4), (5)とし, つぎに q が基底から出る直前の基底を I', それに関する基底形式を

$$x_i+\sum_{j\in J'}\bar{a}'_{ij}x_j=\bar{b}'_i \qquad (\forall i\in I'), \tag{15}$$

$$z=\bar{c}'_0+\sum_{j\in J'}\bar{c}'_j x_j \tag{16}$$

としておく($J=\{1,\cdots,n\}-I$, $J'=\{1,\cdots,n\}-I'$ とする). (すでに注意したように $\bar{c}'_0=c_0$ ではあるがいまの場合それは議論に関係ない.) そして, q の代わりに I' に入る番号を $t(\in J')$ とする.

q と t の定義からただちに

$$\bar{c}_q<0, \quad \bar{c}'_t<0, \quad \bar{a}'_{qt}>0, \tag{17}$$

$$t\in T, \quad t<q \tag{18}$$

であることはわかる.

Bland 氏の証明の要所はつぎの事実に注意することにある. 各変数 x_j, z を, (15), (16)を満足させながら

$$\triangle x_t=-1, \tag{19}$$

$$\triangle x_j=0 \quad (\forall j\in J'-\{t\}), \tag{20}$$

$$\triangle x_i=\bar{a}'_{it}(\forall i\in I'), \tag{21}$$

$$\triangle z=-\bar{c}'_t \tag{22}$$

ずつ変化させることができることは明らかである. 等式群(4), (5)は(15), (16)と等価であるから, とくに(5)から得られる

$$\triangle z=\sum_{j\in J}\bar{c}_j\triangle x_j \tag{23}$$

という式は(19)〜(22)により満たされるはずである. (22), (17)により $\triangle z>0$ であるから, (23)の右辺には正の項が存在しなければならない. それを

$$\bar{c}_r\triangle x_r>0 \quad (r\in J) \tag{24}$$

とする. ここで r がどのような番号であるかを吟味する

$$r\in J \quad \text{すなわち} \quad r\notin I \tag{25}$$

であることは r の定義の一部である. (20), (24)より

$$r\notin J'-\{t\} \quad \text{すなわち} \quad r\in I'\cup\{t\}$$

であるが, $r=t$ だとすると, $t\in J$ で, (19), (24)により $\bar{c}_t<0$ となり, I に q がとり入れられたということと<A′>, (18)とが矛盾する. したがって

$$r\in I' \tag{26}$$

である. (25), (26)は

$$r\in T \tag{27}$$

であることを語っている. (17), (21), (26)により $\bar{c}_q$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

$\triangle x_q<0$ となるから，(24)より

$$r \neq q \tag{28}$$

である．(14)，(27)，(28)より

$$r<q. \tag{29}$$

(25)，(29)と<A′>により $\bar{c}_r \geqq 0$ であるから，(24)により $\triangle x_r>0$ で，さらに(21)，(26)により

$$\bar{a}'_{rt}>0. \tag{30}$$

さて，(27)にあるように $r \in T$，すなわち，r は巡回中に基底に出入りする番号であるから，すでに観察したように，I' に関しても，$\bar{b}'_r=0$. しかし，そうだとすると，(30)と規則<B>を見比べて，r は I' から追い出される候補の1つになる．一方，われわれは，I' からは r でなくて q が追い出されると仮定していた．このことは<B′>(と(29))に違反する．(証明終わり)

線形計画法は組合せ論か？

線形計画法の“理論”は実数の“四則演算”や“大小関係”に強く依存したもので，たとえば主単体法では目的関数の値が“単調に減少”していくという性質をフルに活用している．しかし，A. W. Tucker のタブロー形式などからもわかるように，“演算的”にはタブローの各項目の符号(＋，－，0)が主要な役割を果たしている．そこで，線形計画法の理論から大小の順序関係や四則演算の代数的構造を追放して，たとえばマトロイドに符号を追加したような構造の上の組合せ論的な話にしてしまおうとの試みが執拗になされている．すでにいくらかの提案もあるが，Bland 氏はその方向でも一応の成果をあげたと話していた．

おわりに

Bland 氏が「巡回対策としては<A′>，<B′>で十分だ」といったとき，前の席にいた G. B. Dantzig 先生はけげんな顔をして「それだけでか？」と聞き直し，不審そうにブツブツ独り言をいっていた．証明を聞いたとき，私には本当らしく思え，さっそくニュースとしてご報告しようかと思ったが，なにせ前回のこのSymposiumでは，Scolnik とかいう人の「m 回の反復で $m \times n$ の線形計画問題を解く方法」という“画期的”な間違った話でひと騒ぎさせられたという前例があるので，念には念を入れようと Bland 氏に「“何か書いたもの”をくれ」と頼んでおいた．最近それが届いたので，内容を検討した上でご報告する次第である．

(いり・まさお　東京大学計数工学科)

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．