

積分幾何学について (4)

腰塚 武志

2.11 応用例 3

前節の結果を応用してランダムな直線が矩形の領域をよぎるとき、直線のこの領域内での長さの期待値と分散を求めてみよう。これが現実の問題とされた例として文献 [16] をあげることができる。もっともこの文献の中ではわれわれの言う「ランダムな直線」について算出されているわけではない。

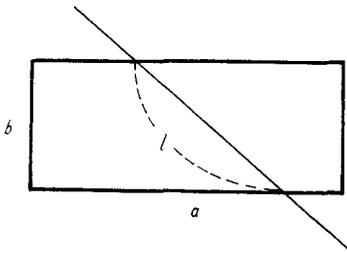


図 2.42

いま図 2.42 のように長辺、短辺の長さがそれぞれ a, b の矩形を考え、これをよぎるランダムな直線の矩形内での長さを l とする。すると l の期待値 $E(l)$ は (2.33) 式からすぐつぎのように求められる。

$$E(l) = \pi ab / 2(a+b) \quad (2.49)$$

つぎに分散を得るためには、 l の 2 次モーメントを求めなければならない。領域が円の場合は直接求めるほうが簡単だが、矩形の場合には前節の Crofton の第 3 定理を応用する。すなわち式 (2.48) において $n = -1$ とおくと

$$\int r^{-1} dP_1 dP_2 = \int l^2 dG \quad (2.50)$$

となり、上式の右辺のかわりに左辺を求めてもよいことがわかる。

そこでどうせ (2.50) の左辺の積分を計算するのなら、他にも応用できるように矩形内の互いに独立で一様にランダムな 2 つの点について、その 2 点間の距離の確率密度関数を求めておこう。求め方はいくつか考えられるが文献 [17] によるつぎの方法がもっとも計算しやすいも

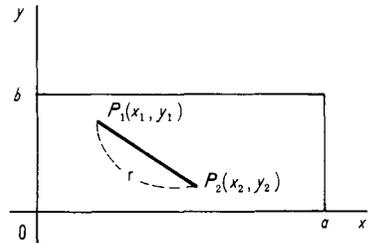


図 2.43

のと思われる。

図 2.43 のように 2 点を P_1, P_2 とし、その座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする。すると x_1, x_2 は区間 $(0, a)$ で互いに独立な一様分布にしたがっていると考えられ、 y_1, y_2 は区間 $(0, b)$ で同様に考えられる。そこで

$$X = |x_1 - x_2|, \quad Y = |y_1 - y_2|$$

とおくと、これらの確率密度関数 $f(X), f(Y)$ はよく知られているようにつぎのようになる。

$$f(X) = \frac{2(a-X)}{a^2} \quad 0 < X < a$$

$$f(Y) = \frac{2(b-Y)}{b^2} \quad 0 < Y < b$$

X と Y は独立と考えられるから X と Y の同次分布は上の 2 つの関数の積として以下のようにあらわされる。

$$f(X, Y) = \frac{4(a-X)(b-Y)}{a^2 b^2} \quad (2.51)$$

ただし $0 < X < a, 0 < Y < b$

ここで 2 点 P_1, P_2 の間の距離を r とすると

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

であり、さらに θ を

$$\theta = \tan^{-1}(Y/X)$$

として (X, Y) を (r, θ) の極座標に変換する。

すると $X = r \cos \theta, Y = r \sin \theta,$

$$[dX, dY] = r[dr, d\theta]$$

となるから (2.51) より r と θ の同次分布はつぎのようになる。

$$f(r, \theta) = \frac{4r}{a^2 b^2} (a - r \cos \theta)(b - r \sin \theta)$$

$$= \frac{4r}{a^2b^2} (ab - ar \sin \theta - br \cos \theta + \frac{r^2}{2} \sin 2\theta)$$

よってこれを θ に関して積分すれば r の周辺分布, すなわち求めたい r の確率密度関数が得られることになる。 θ の積分の範囲は r によって異なるので, まず上式を形式的に θ_1 から θ_2 まで積分しておく。

$$\begin{aligned} f(r) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{4r}{a^2b^2} \{ ab(\theta_2 - \theta_1) + ar(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \\ &\quad - br(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - \frac{r^2}{4}(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) \} \end{aligned}$$

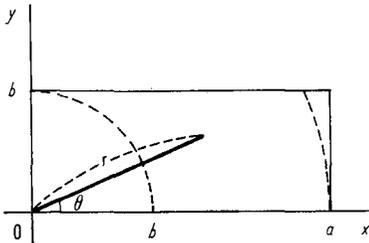


図 2.44

そして図2.44から明らかなように θ の範囲は r の大きさによってつぎの3つの場合に分けられる。

$$0 < r \leq b \text{ のとき } \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$$

$$b \leq r \leq a \text{ のとき } \theta_1 = 0, \theta_2 = \sin^{-1}(b/r)$$

$$a \leq r < \sqrt{a^2 + b^2} \text{ のとき } \theta_1 = \cos^{-1}(a/r), \theta_2 = \sin^{-1}(b/r)$$

以上から計算して整理すると $f(r)$ はつぎのように求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < r \leq b \text{ のとき} \\ f(r) = \frac{2r}{a^2b^2} \{ ab\pi - 2(a+b)r + r^2 \} \\ b \leq r \leq a \text{ のとき} \\ f(r) = \frac{2r}{a^2b^2} \left\{ 2ab \sin^{-1} \frac{b}{r} + 2a \sqrt{r^2 - b^2} - 2ar - b^2 \right\} \\ a \leq r < \sqrt{a^2 + b^2} \text{ のとき} \\ f(r) = \frac{2r}{a^2b^2} \left\{ 2ab \left(\sin^{-1} \frac{b}{r} - \cos^{-1} \frac{a}{r} \right) \right. \\ \left. + 2a \sqrt{r^2 - b^2} - 2b \sqrt{r^2 - a^2} - (r^2 + a^2 + b^2) \right\} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

この関数は $r=a$, $r=b$ において連続でなめらかである。これは微分するとすぐわかる。

この(2.52)をもとに r^{-1} の期待値を計算すると, 簡単ではないが結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned} E(r^{-1}) &= \int r^{-1} f(r) dr \\ &= \frac{2}{a^2b^2} \left\{ \frac{1}{3}(a^3 + b^3) - \frac{1}{3}(a^2 + b^2)^{3/2} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + a^2b \log \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + ab^2 \log \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right\}$$

ところで r^{-1} と l^2 の期待値は式(2.50)との関連で

$$E(r^{-1}) = \int r^{-1} dP_1 dP_2 / \int dP_1 dP_2$$

$$E(l^2) = \int l^2 dG / \int dG$$

とあらわされる。そして

$$\int dP_1 dP_2 = a^2b^2, \quad \int dG = 2(a+b)$$

だから(2.50)式は期待値を用いて

$$a^2b^2 E(r^{-1}) = 2(a+b) E(l^2)$$

とあらわすことができ, $E(l^2)$ はつぎのようになる。

$$E(l^2) = \frac{a^2b^2}{2(a+b)} E(r^{-1})$$

以上と(2.49)から, l の期待値 $E(l)$ と分散 $V(l)$ はつぎのようにあらわされる。

$$E(l) = \frac{\pi ab}{2(a+b)}$$

$$V(l) = \frac{1}{a+b} \left\{ \frac{1}{3}(a^3 + b^3) - \frac{1}{3}(a^2 + b^2)^{3/2} \right.$$

$$\left. + a^2b \log \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + ab^2 \log \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right\}$$

$$- \left\{ \frac{\pi ab}{2(a+b)} \right\}^2 \quad (2.53)$$

ここで $b=ca$ ($0 < c \leq 1$) とおき

$\log(c + \sqrt{c^2 + 1}) = \sinh^{-1} c$ と表示すれば(2.53)は

$$E(l) = \frac{\pi c}{2(1+c)} a$$

$$V(l) = \left[\frac{1}{1+c} \left\{ \frac{1}{3}(1+c^3) - \frac{1}{3}(1+c^2)^{3/2} + c \sinh^{-1} c \right. \right.$$

$$\left. + c^2 \sinh^{-1} \frac{1}{c} \right\} - \left\{ \frac{\pi c}{2(1+c)} \right\}^2 \right] a^2 \quad (2.54)$$

と表現できる。そこで(2.54)において $a=1$ とし, c の値による $E(l)$, $V(l)$ の値のグラフを図2.45, 図2.46に示す。

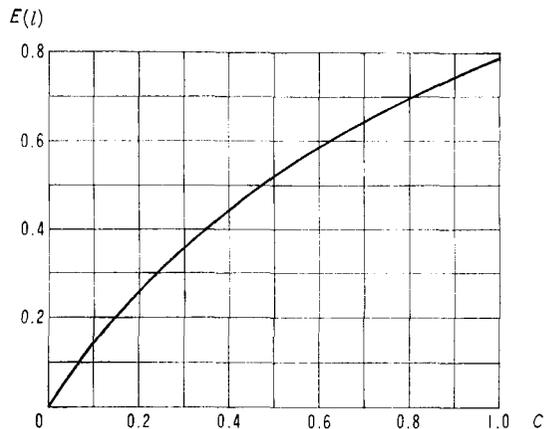


図 2.45

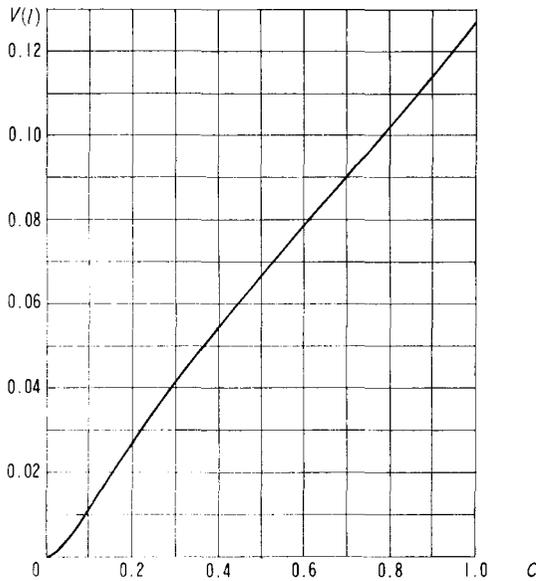


図 2.46

2.12 応用例 4

この節で述べることは筆者がOR学会の研究発表会で発表したもの(文献[18])の一部である。ここでは背景にある現実の問題等は略し、純粋に幾何確率の問題として述べようと思う。

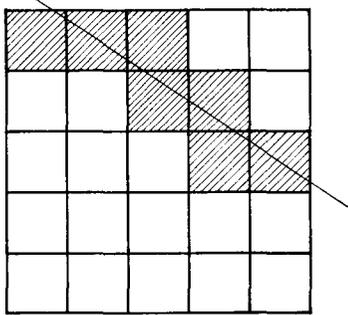


図 2.47

まずこの節で用いる特殊な用語をつぎのように規定しておく。図2.47のようにある領域に格子状の網をかけ、それでできた小さな1つの領域を「メッシュ」といい、網のほうを「メッシュの境界線」または単に「境界線」という。またメッシュの集合の端となる境界線を「メッシュ全体の境界線」または単に「全体の境界線」といい、これに囲まれた内部を「対象領域」ということにする。ただし前回ははじめに述べたように領域は開領域を意味するものとする。

ここではこの対象領域を矩形とし、これをよぎるランダムな直線を考え、この直線がよぎるメッシュ(図2.47

の斜線で示された部分)の個数について、その期待値、分散さらには確率分布を導出してみよう。

そこでこの節での基礎となる関係式を導いておく。いま直線とメッシュの境界線との交点数を k 、直線がよぎるメッシュの個数を m とする。1つのメッシュに着目するとこのメッシュを直線がよぎる場合、境界線に2つの交点ができる。そこでメッシュごとに交点を数えていくと、普通の交点は隣接するメッシュで2度数えられ、全体の境界線上にある2つの交点のみが一度だけ数えられる。したがって

$$2m = 2(k-2) + 2$$

が成り立つからこれを整理して以下の式が得られる。

$$m = k - 1 \quad (2.55)$$

ところで対象領域をよぎる直線の中には、かならずしも(2.55)が成り立たないものが存在する。境界線と一致する直線がその1つである。さらに境界線同士の交点を通る直線については、 k の数え方により(2.55)が成り立たない場合も起こりうる。しかしこれらの直線は2.4節でみてきたように測度が0である。そこで対象領域をよぎる直線に関しては、ほとんどいたるところ(2.55)が成り立つ。

これによってランダムな直線がよぎるメッシュの個数についての問題は、ランダムな直線とメッシュの境界線との交点数についての問題として考えることが可能になったわけである。

(i) 期待値

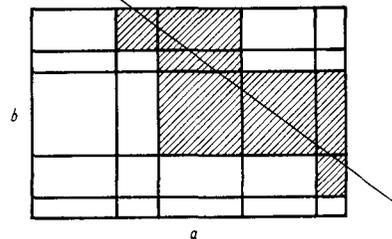


図 2.48

いま図2.48のように対象領域の横の長さを a 、縦の長さを b とし、それらがそれぞれ n_1 個、 n_2 個の区間に分割されているものとする。すなわちメッシュの個数は全体で $n_1 n_2$ 個である。ただし、いまのところ分割の仕方は等間隔でなくてもよいことにしておく。

このとき対象領域は凸で、対象領域の境界すなわちメッシュ全体の境界線の長さは $2(a+b)$ となり、すべての境界線の長さは $(n_2+1)a + (n_1+1)b$ となる。そこでこの境界線と直線との交点数を前述のように k とあらわすと、 k の期待値 $E(k)$ は2.5節(ii)の(2.20)からつぎのよ

うに求められる。

$$E(k) = \frac{\int k dG}{\int dG} = \frac{2\{(n_2+1)a + (n_1+1)b\}}{2(a+b)} \\ = \frac{n_2a + n_1b}{a+b} + 1 \quad (2.56)$$

よって(2.55)式からランダムな直線がよぎるメッシュの個数 m の期待値 $E(m)$ はつぎのようになる。

$$E(m) = E(k) - 1 = \frac{n_2a + n_1b}{a+b} \quad (2.57)$$

ここでもし $n_1 = n_2 = n$ のときは

$$E(m) = n \quad (2.58)$$

と簡潔できれいな結果が得られる。これは $a \neq b$ で、しかも図2.48のようにメッシュの大きさがまちまちであっても成り立つことは興味深い。

さらに図2.48の境界線のある部分が欠けている場合でも、すべてのメッシュが凸であれば容易に $E(m)$ が算出できることはこれまでの議論で明らかであろう。実はこの場合が現実的な問題として最初に解かれたものなのである。

(ii) 分散

直線がよぎるメッシュの個数 m と、直線とメッシュの境界線との交点数 k の分散をそれぞれ $V(m)$ 、 $V(k)$ とすれば(2.55)から

$$V(m) = V(k) \quad (2.59)$$

が成り立つ。そこで $V(m)$ を得るためには $V(k)$ が求められればよいことがわかる。

$V(k)$ を求める場合、直線がいちいち何本の境界線と交わるかを考えて確率分布を導き、それによって分散を算出できないわけではない。しかしこの方法では議論の展開が冗漫になるばかりでなく計算にも手数がかかる。この確率分布から求める正攻法がやっかいなのは、直線がある境界線に交わる事象と他の境界線に交わる事象とを分けるのがむずかしいからである。このような場合にはからめ手の方法ともいうべき Fréchet の公式を用いるのが得策である。

この公式についてくわしくは文献 [19] を参照していただきたいが、これはつぎのようにあらわされる。

$$\mu_j = j! N_j \quad (2.60)$$

$$\text{ただし } \mu_j = E\{k(k-1)\cdots(k-j+1)\}$$

(j 次の階乗モーメント)

$$N_j = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j})$$

(N_j については包除原理を思い浮かべていただきたい。 A_1, A_2, \dots, A_p は p 個 ($p > j$) のかならずしも独立でなく、また排反でもない事象。)

ここで(2.60)において $j=1$ とおくと

$$\mu_1 = N_1, \quad \mu_1 = E(k)$$

が得られる。この問題での N_1 を言葉で表現するならつぎのようになる。メッシュの境界線の中から1本を取り出し、1本ごとに直線がそれをよぎる確率(他の境界線をよぎるかどうかについては考えなくてよい)を算出する。そして、この確率を境界線すべてについて加え合せると、これが N_1 である。前述の期待値の計算における $\int k dG / \int dG$ がこの N_1 にあたることは Crofton の公式(2.14)の導出における議論を考えればわかることであろう。

つぎに $j=2$ とおくと(2.60)は

$$\mu_2 = 2N_2,$$

$$\mu_2 = E\{k(k-1)\} = E(k^2) - E(k)$$

したがって $V(k)$ は以下のようになる。

$$V(k) = E(k^2) - \{E(k)\}^2 \\ = 2N_2 + E(k) - \{E(k)\}^2 \quad (2.61)$$

$E(k)$ は(2.56)でわかっているので N_2 が得られれば $V(k)$ は求められることになる。

ここで N_2 を言葉であらわすとつぎのようになる。メッシュの境界線のうちから2本の組合せを取り出し、その2本を直線がよぎる確率(当該の2本以外については考えない)を計算する。 N_2 とはこの確率をすべての組合せについて加え合せたものである。2本の組合せは境界線が互いに平行な場合と、互いに直交する場合の2つにわけて考えることができる。そこで N_2 を N_P と N_O にわけて N_P は平行な場合を、 N_O は直交する場合をあらわすものとする。

$$N_2 = N_P + N_O \quad (2.62)$$

前の図2.48の場合にも N_P 、 N_O はこれから述べる方法と同じように計算可能であるが、いたずらに煩雑になるのを避け、ここでは1メッシュを縦横の長さがそれぞれ1の正方形とし、このメッシュが全体で縦横 n 個ずつ計 n^2 個あるものとして考えていこう。すると(i)での a 、 b 、 n_1 、 n_2 はすべて n に等しくなる。そして対象領域をよぎる直線の集合の測度は全体の境界線の長さに等しいから $4n$ となる。

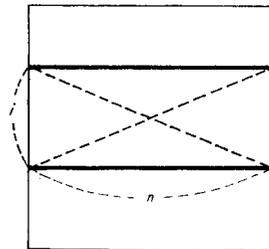


図 2.49

まず N_P の計算からはじめよう。図2.49のように距離が i 離れた互いに平行な境界線について考える。この2

本の境界線を同時によぎる直線の測度は(2.21)から

$$2(\sqrt{n^2+i^2}-i)$$

とあらわされる。そこでこれを全体の測度 $4n$ で割れば1つの組合せの確率が求められたことになる。この場合のメッシュの構成では図2.49において横の平行な組合せすべてにわたって確率を加え合せると、これは縦の平行な組合せすべてにわたって加え合せたものと等しくなる。そこで横の組合せについて計算したものを2倍すればよい。したがって N_P は以下ようになる。

$$\begin{aligned} N_P &= \frac{2}{4n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \cdot 2(\sqrt{n^2+i^2}-i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (n-i+1) \sqrt{n^2+i^2} - \frac{1}{6}(n+1)(n+8) \end{aligned}$$

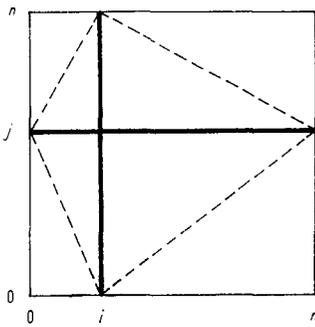


図 2.50

つぎに N_0 を計算しよう。ここで図2.50のように対象領域に対して境界線ごとに0から n までの座標を与え、座標 (i, j) で交わっている2つの境界線について考える。この2本の境界線をよぎる直線の測度は(2.31)からつぎのようにあらわされる。

$$4n - \{ \sqrt{i^2+j^2} + \sqrt{i^2+(n-j)^2} + \sqrt{(n-i)^2+j^2} + \sqrt{(n-i)^2+(n-j)^2} \}$$

そこでこれを全体の測度 $4n$ で割り、交点に着目して加え合せると N_0 は以下ようになる。

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{1}{4n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [4n - \{ \sqrt{i^2+j^2} + \sqrt{i^2+(n-j)^2} \\ &\quad + \sqrt{(n-i)^2+j^2} + \sqrt{(n-i)^2+(n-j)^2} \}] \\ &= \frac{1}{4n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (4n - 4\sqrt{i^2+j^2}) \\ &= (n+1)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sqrt{i^2+j^2} \end{aligned}$$

よって N_2 は(2.62)から N_P と N_0 を加えて

$$N_2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^n \sqrt{n^2+i^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i \sqrt{n^2+i^2} -$$

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+8) + (n+1)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sqrt{i^2+j^2} \quad (2.63)$$

となる。ところで(2.56)からこの場合 $n_1 = n_2 = n$ なので $E(k) = n+1$ である。よってこれと(2.63)を(2.61)に代入すれば $V(k)$ が求められ、(2.59)から分散 $V(m)$ は以

下のように導かれる。

$$\begin{aligned} V(m) &= \frac{2}{3}(n^2-1) + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^n \sqrt{n^2+i^2} \\ &\quad - \frac{2}{n} \sum_{i=0}^n i \sqrt{n^2+i^2} - \frac{2}{n} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sqrt{i^2+j^2} \quad (2.64) \end{aligned}$$

上式を $n=1$ から10まで計算した結果を表2.2に示す。

表 2.2

n	$V(m)$
1	0
2	0.5858
3	1.6317
4	3.1126
5	5.0232
6	7.3614
7	10.1265
8	13.3182
9	16.9361
10	20.9801

この式は少々見当をつけづらいので式中の級数の近似式を Euler-Maclaurin の公式によって、 n の1次の項まで求める。すると

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{n^2+i^2} \sim \frac{\sqrt{2+c}}{2} n^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} n$$

$$\sum_{i=0}^n i \sqrt{n^2+i^2} \sim \frac{2\sqrt{2}-1}{3} n^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} n^2$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sqrt{i^2+j^2} \sim \frac{\sqrt{2+c}}{3} n^3 + \frac{1+\sqrt{2+c}}{2} n^2$$

ただし $c = \log(1+\sqrt{2})$

となる。これらを(2.64)に代入して n の1次の項までとると n の1次の項は消えて

$$V(m) \sim \frac{4-3\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{3} n^2 \quad (2.65)$$

$$\left(\frac{4-3\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{3}\right) \approx 0.212911$$

となる。最後にもう少し近似の程度のよいものを記す。

$$\begin{aligned} V(m) &\sim \frac{4-3\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{3} n^2 \\ &\quad - \frac{3-2\sqrt{2}+2\log(1+\sqrt{2})}{6} n + \frac{77\sqrt{2}}{960} \left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.66) \end{aligned}$$

(iii) 確率分布

前にもふれたが直線がよぎるメッシュの個数 m の確率分布 $P(m)$ も求められないわけではない。これには今までと同じように(2.21)、(2.55)が重要な役割を演ずるわけなのだが、紙面の関係もあるのでその結果だけを以下に示す。ただしメッシュの構成は(ii)と同じように1メ

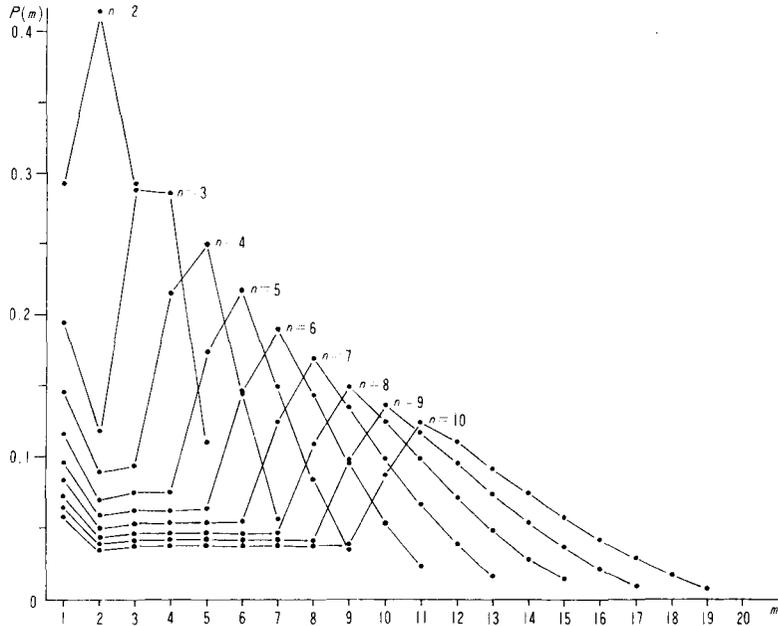


図 2.51

ッシュを1辺の長さ1の正方形とし、これが縦横 n 個ずつあるものとする。

$1 \leq m < n$ のとき

$$P(m) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{m-1} \{ 2\sqrt{i^2 + (m-i)^2} - \sqrt{i^2 + (m-i-1)^2} - \sqrt{(i+1)^2 + (m-i)^2} \}$$

$$P(n) = \sqrt{n^2+1} - n + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \{ 2\sqrt{i^2 + (n-i)^2} - \sqrt{i^2 + (n-i-1)^2} - \sqrt{(i+1)^2 + (n-i)^2} \}$$

$n < m \leq 2n-1$ のとき

$m = n+r$ ($0 \leq r \leq n-1$) として

$$P(m) = P(n+r)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n-r}{n} \{ \sqrt{n^2 + (r+1)^2} + \sqrt{n^2 + (r-1)^2} \\ &\quad - 2\sqrt{n^2 + r^2} \} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=r}^{n-1} \{ 2\sqrt{i^2 + (n+r-i)^2} - \sqrt{i^2 + (n+r-i-1)^2} \\ &\quad - \sqrt{(i+1)^2 + (n+r-i)^2} \} \end{aligned} \quad (2.67)$$

これを $n=1 \sim 10$ について図示すると図2.51のようになる。この確率分布から期待値と分散を求められないわけではないが、(i)と(ii)で述べたものよりはるかに計算が煩雑になる。

ここで前の分散のときと同じように確率分布の式にある級数を近似して、(2.67)の n^{-1} のオーダーの近似式を求める。するとこれはつぎのようになる。(ただし、 $P(1)$ 、 $P(2)$ は近似ではなく真の値である。)

$$P(1) = \frac{1}{n} (2 - \sqrt{2})$$

$$P(2) = \frac{1}{n} (2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$$

$3 \leq m < n$ のとき

$$P(m) \sim \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^{-1} 1 \right)$$

$$P(n) \sim \frac{1}{n} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^{-1} 1 \right)$$

$n < m \leq 2n-1$ のとき

$m = n+r$ として

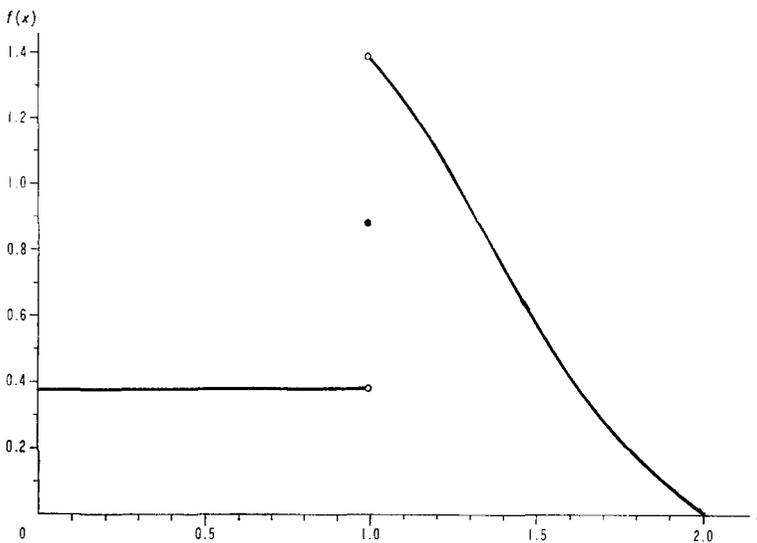


図 2.52

$$P(n+r) \sim \frac{1}{n} \left\{ \frac{(n-r)(2n^2+r^2)}{(n^2+r^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^{-1} \frac{n-r}{n+r} \right\}$$

(ただし $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$,
 $\sinh^{-1} 1 = \log(1 + \sqrt{2})$ とする.)

(2.68)

この式の近似の程度は、 $n=4$ のときすでに相対誤差が1%以下である。

さらに $x=m/n$

とおいて $n \rightarrow \infty$ としたときの極限の連続分布を求めると、確率密度関数 $f(x)$ は以下のようになり、これを図示すると図2.52のようになる。

$0 < x < 1$ のとき

$$f(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^{-1} 1$$

$$f(1) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^{-1} 1$$

$1 < x < 2$ のとき

$$f(x) = \frac{(2-x)\{2+(x-1)^2\}}{\{1+(x-1)^2\}^{3/2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^{-1} \frac{2-x}{x}$$

(2.69)

結局 $f(x)$ は $x=1$ で特異点を有することになり、上

式から除いてもよいのだが極限の分布なのでそのまま入れておくことにする。そして x の期待値と分散を(2.69)から積分して求めると

$$E(x) = 1$$

$$V(x) = 4 - 3 \frac{\sqrt{2} + \sinh^{-1} 1}{3}$$

となり、(i)、(ii)で得られた結果から導かれるものと一致する。(つづく)

参考文献(つづき)

- [16] 林知己夫, 他: 動く調査対象集団に対する標本調査について—III, 統計数理研究所彙報, 第17巻, 第1号, (1969), 5—21.
- [17] Ghosh, B.: Random distances within a rectangle and between two rectangles. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 43 (1951), 17—24.
- [18] 腰塚武志: ランダムな直線がよぎるメッシュの個数について, 日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集, (1975), 55—56.
- [19] 中山伊知郎編: 現代統計学大辞典, 東洋経済新報社, (1962), 37.
(こしづか・たけし 東京大学工学部都市工学科)