

線形計画法における いくつかの分解原理について

鈴木 康彦

われわれは、経済・経営の問題を解こうとしたとき、それを線形計画モデルに定式化することさえできれば、最適解を得ることができる。しかし、現実の経済・経営の問題に線形計画法を適用しようとするとき、ときとして、モデルのサイズがあまりに大きくなり、データの収集費用、マトリックスの整備、あるいは計算費用などに困難をきたすことがある。そこで、これらの困難性を克服するための手法が、これまで、数多く発表されている。われわれが、これから問題にしようとしている分解原理は、その1つの手法と言える。

分解原理とは、特殊な構造の大規模プログラムを小さな問題に分解することによって、全体の最適解を能率よく求める手法である。その手法は、非線形計画法を除き、線形計画法にかぎってみても、数は決して少ない。そこで、ただ解を能率よく求めることばかりでなく、経済・経営の意思決定の問題をも考慮に入れている分解原理について言及したい。

ところで、われわれが取り上げようとしている分解原理は、つぎのような経営学的状況を想定している。企業は、本部と、個々の制約を持つ各事業部に分解される。本部は、共通資源の利用と、共通目標への貢献との観点から、各事業部を統轄する。したがって、各事業部には、本部の制約を破らない範囲での意思決定が、認められる。

さて、分解原理の諸手法を概観するにあたり、1つの分類基準を与えておこう。それは、本部から各事業部、あるいは各事業部から本部には、それぞれどのような情報が伝達されるか、によって分類される。

その1つは、価格・数量型分解原理とよばれるものである。すなわち、本部から各事業部には、価格が伝達され、各事業部から本部には、数量が伝達される。

もう1つは、数量・価格型分解原理とよばれるものであり、本部から各事業部には、数量が、各事業部から本

部には、価格が伝達される。

われわれは、この小論において、上の基準で分類された4つの分解原理について、概観と若干のコメントを与えることを目的とする。まず、価格・数量型分解原理として、1.1において、G. B. Dantzig and P. Wolfe⁶⁾ の分解アルゴリズムを、そして、1.2において、E. Balas¹⁾ の実行不可能価格法を取り上げる。つぎに、数量・価格型分解原理として、2.1において、J. Kornai and Th. Lipták¹⁶⁾ の2階層プログラミングについて、そして、2.2において、A. ten Kate²²⁾ の直接資源配分法について言及する。

1. 価格・数量型分解原理

1.1. Dantzig-Wolfe の分解アルゴリズム

Dantzig-Wolfe の解法は、分解原理の先駆的業績である。そのモデルは、つぎのように与えられる。

原問題：

$$(1.1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n A^j x^j = b \\ x^j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$(1.2) \quad B^j x^j = b^j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(1.3) \quad \sum_{j=1}^n {}^t c^j x^j \quad \max$$

ただし、 A^j , B^j , b , b^j , c^j , および x^j は、それぞれ、 $m \times n_j$ 行列、 $m_j \times n_j$ 行列、 m 次列ベクトル、 m_j 次列ベクトル、 n_j 次列ベクトル、および n_j 次列ベクトルである。なお、 ${}^t c^j$ は、 c^j の転置を意味する。

まず、解法を得る準備として、事業部プログラムの解集合 $S_j (j=1, 2, \dots, n)$ を定義する。

$$S_j = \{x^j | x^j \geq 0, B^j x^j = b^j\}$$

ところで、 $S_j (j=1, 2, \dots, n)$ は、有界とはかぎらないが、有界とする。そのとき、集合 $S_j (j=1, 2, \dots, n)$ は、凸多

面体となる。 S_j の端点の集合を

$$\dot{S}_j = \{x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{k(j)}\} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

とすると, $S_j = [\dot{S}_j]$ である。ただし, $[\dot{S}_j]$ は $\dot{S}_j$ の凸包を意味する。よって, 任意の $x_j \in S_j$ について

$$(1.4) \quad x_j = \sum_k s_{jk} x_j^k, \quad s_{jk} \geq 0, \quad \sum_k s_{jk} = 1, \quad x_j^k \in \dot{S}_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

である。

つぎに

$$(1.5) \quad \begin{cases} a^{jk} = A^j x_j^k & (j=1, 2, \dots, n; \\ c_{jk} = t^j x_j^k & k=1, 2, \dots, k(j)) \end{cases}$$

とおく。すると, 原問題(1.1)~(1.3)は, (1.4)および(1.5)より, つぎのような本部プログラムに変形される。

本部プログラム:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k(j)} s_{jk} a^{jk} = b \\ s_{jk} \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n; \\ & k=1, 2, \dots, k(j)) \end{cases}$$

$$(1.7) \quad \sum_{k=1}^{k(j)} s_{jk} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(1.8) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k(j)} s_{jk} c_{jk} \quad \max$$

さて, 本部プログラム(1.6)~(1.8)を作成するにあたり, 気がつくことは, 前もって $\dot{S}_j (j=1, 2, \dots, n)$ を求めておくことは, 決して能率的ではない, ということである。そのため, 以下に述べる事業部プログラムを提出する。

本部プログラム(1.6)~(1.8)において, 実行可能解が得られているとする。そのとき, 本部は, この実行可能解に対応する双対変数のベクトル $(\pi; t^j \rho)$ を計算する。ただし, $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ および $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ は, それぞれ, (1.6)および(1.7)に対応する双対変数のベクトルである。各事業部は, このベクトル $(\pi; t^j \rho)$ をもとに, つぎのプログラムを解く。

事業部プログラム:

$$(1.9) \quad \begin{cases} B^j x^j = b^j \\ x^j \geq 0 \end{cases}$$

$$(1.10) \quad (t^j - t^j \pi A^j) x^j \quad \max \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

各事業部は, この問題から得られた最適産出量ベクトル $x^j (j=1, 2, \dots, n)$ を, 本部に報告する。

本部は, この $x^j (j=1, 2, \dots, n)$ をもとに

$$\begin{aligned} \delta &= (t^j - t^j \pi A^j) x^j - \rho_j \\ &= \max_j \left[\max_{\substack{B^j x^j = b^j \\ x^j \geq 0}} (t^j - t^j \pi A^j) x^j - \rho_j \right] \end{aligned}$$

を計算し, 本部プログラム(1.6)~(1.8)の最適性を判定

する。 $\delta > 0$ ならば, 最適性は満たされていない。本部プログラムの基底に

$$\{t^j (A^j x^j); 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0; -t^j x^j\}$$

を入れ, 新しい価格ベクトル $(t^j; t^j \rho)$ を計算する。一方, $\delta \leq 0$ ならば, 最適解が得られたことになる。かくして, $\{s_{jk}\}$ は, 本部プログラムの最適解を与える。そして, 原問題の最適解は

$$x_j = \sum_k s_{jk} x_j^k, \quad s_{jk} \geq 0, \quad \sum_k s_{jk} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

より求められる。

ところで, W. J. Baumol and T. Fabian²⁾は, このような Dantzig-Wolfe の解法について, 「各事業部は, それ自身の力によって, 産出量ベクトルのウェイト $s_{jk} (j=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, k(j))$ をかならずしも見いだし得ない」と述べ, その1例として, つぎのことを指摘した。

すなわち, 共通資源の供給が十分でないときには, 企業全体にとっての最適解は, 事業部の実行可能領域の内点を与える。したがって, 事業部の実行可能領域の境界点を与えないという意味で, 企業全体にとっての最適解は, 事業部の最適解ではないことを指摘した。しかし, P. Maiti and R. Sengupta¹⁷⁾は, この指摘に対して, 批判的見解を提出した。すなわち, 彼らは, まず, 「企業全体にとっての最適解は, 事業部の最適解である」という定理を証明する。そして, それをもとに, 「企業全体にとっての最適解は, 事業部の実行可能領域の内点にはなり得ない」と結論した。ところが, Baumol-Fabian²⁾は, Maiti-Sengupta のそのような結論は, かならずしも正しくないことを, 数値例をもって, 明らかにしている。

1.2. Balas の実行不可能価格法

Balas は, 原問題(1.1)~(1.3)を解く方法として, 2つの解法をあげている。しかし, 第2の方法は, Dantzig-Wolfeの解法と, 類似点が多いため, 第1の方法のみにして述べることにしよう。

まず, 事業部プログラムは, 1.1で述べた(1.9)~(1.10)と同じように与えられる。

事業部プログラム:

$$(1.11) \quad \begin{cases} B^j x^j = b^j \\ x^j \geq 0 \end{cases}$$

$$(1.12) \quad (t^j - t^j u A^j) x^j \quad \max \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

ただし, u は, m 次列ベクトルである。

さて, 事業部プログラム(1.11)~(1.12)を任意の u について解き, 最適基底解を $\bar{x}^j (j=1, 2, \dots, n)$ とする。こ

の $\bar{x}^j$ の基底変数の番号の集合と、非基底変数の番号の集合を、それぞれ、 $\bar{M}_1^j$ と $\bar{M}_2^j$ であらわす。そして、つぎのように定義する。

$$\bar{A}_1^j = (a_{ij}^j), \quad \bar{B}_1^j = (b_{ij}^j), \quad \text{および} \quad \bar{x}^j M_1 = (\bar{x}_{ij}^j) \\ (h \in \bar{M}_1^j; j=1, 2, \dots, n),$$

さらに、 A^{jh} および B^{jh} を、それぞれ、行列 A^j および B^j の第 h 列とする。

以上の定義をもとに、(1.11)を変形すると

$$x_{ij}^j = \bar{x}_{ij}^j - \sum_{h \in \bar{M}_2^j} y_{ih}^j x_{jh}^j \quad (i \in \bar{M}_1^j; j=1, 2, \dots, n)$$

となる。ただし、 $(\bar{B}_1^j)^{-1} B^j = (y_{ih}^j)$ である。そして、行列 (y_{ih}^j) の第 h 列を y^h であらわす。

シンプレックス表の最適性の判定基準は

$$g^j(u) = \sum_{i \in \bar{M}_1^j} (c_i^j - u A_i^j) y_{ih}^j - (c_h^j - u A_h^j) \\ \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n; h=1, 2, \dots, n_j)$$

である。ただし、 c_h^j は、ベクトル c^j の第 h 成分である。ここで、加えて、つぎのことがらを定義する。

$$\bar{N}^j = \{h \in \bar{M}_2^j \mid g^j(u) = 0\} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$f^j h = \bar{A}_1^j y^h - A^{jh} \quad (j=1, 2, \dots, n; h=1, 2, \dots, n_j)$$

および

$$\bar{b} = b - \sum_{j=1}^n A^j x^j$$

われわれは、これまでの準備をもとに、本部プログラムをみちびくことにする。事業部プログラム(1.11)～(1.12)の最適基底解 $\bar{x}^j$ について、 $\bar{N}^j \neq \phi$ のとき、つぎのようにおく。

$$(1.13) \quad x_{ij}^* = \begin{cases} x_{ij}^j - \sum_{h \in \bar{N}^j} y_{ih}^j x_{jh}^j & (i \in \bar{M}_1^j) \\ x_{ij}^j & (i \in \bar{N}^j) \\ 0 & (i \in \bar{M}_2^j - \bar{N}^j) \end{cases}$$

$$(1.14) \quad x_{ij}^* \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n_j) \\ (j=1, 2, \dots, n)$$

(1.14)を考慮して、(1.13)を(1.1)に代入すると

本部プログラム：

$$(1.15) \quad - \sum_{j=1}^n \sum_{h \in \bar{N}^j} f^j h x_{jh}^* + \eta - \eta' = \bar{b}$$

$$(1.16) \quad \sum_{h \in \bar{N}^j} y^{jh} \leq \bar{x}^j M_1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(1.17) \quad x_{jh}^* \geq 0 \quad (h \in \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n), \\ \eta_i, \eta'_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$(1.18) \quad z = - \sum_{i=1}^m \eta_i - \sum_{i=1}^m \eta'_i \quad \max$$

を得る。ただし、 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ 、および $\eta' = (\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m)$ である。なお、双対はつぎのようである。

双対問題：

$$(1.19) \quad -t v f^j h + t w^j y^j h \geq 0 \quad (h \in \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n)$$

$$(1.20) \quad -1 \leq v_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$(1.21) \quad w_{ij}^j \geq 0 \quad (i \in \bar{M}_1^j; j=1, 2, \dots, n)$$

$$(1.22) \quad z = t v \bar{b} + \sum_{j=1}^n t w^j \bar{x}^j M_1 \quad \min$$

ただし、 $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ 、および $w^j = (w_{1j}^j, w_{2j}^j, \dots, w_{m_jj}^j)$ である。

これより、事業部プログラム(1.11)～(1.12)と、本部プログラム(1.15)～(1.18)を用い、いかに原問題(1.1)～(1.3)が解かれるか、を述べることにする。まず、 $u=0$ として、事業部プログラムを解く。そして、ステップ1に移る。

ところで、繰り返し計算が、何回か行なわれたとする。そのとき、 $u=\bar{u}$ に対応して、事業部プログラムの最適基底解 $\bar{x}^j (j=1, 2, \dots, n)$ が得られたとする。

ステップ1

事業部 j は、 $g^j(\bar{u})$ にもとづき、 $\bar{N}^j (j=1, 2, \dots, n)$ を求める。

本部は、各事業部の計算結果をもとに、 $f^j h (h \in \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n)$ および $\bar{b}$ を計算する。そして、双対問題(1.19)～(1.22)の最適解 $(t\bar{v}, t\bar{w}^1, t\bar{w}^2, \dots, t\bar{w}^n)$ を得る。

ステップ2

(a) $z=0$ ならば、本部プログラムから求まる $x_{ij}^j (h \in \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n)$ に対応する(1.13)は、原問題(1.1)～(1.3)の最適解を与える。

(b) $z < 0$ で、かつ、ある j について、 $\bar{w}^j \neq 0$ ならば、当該事業部プログラムの基底 $\bar{B}_1^j$ において、 $\bar{w}_{ij}^j > 0$ に対応するベクトル B^{ji} を掃出し、 $x_{jh}^j > 0 (h \in \bar{N}^j)$ に対応するベクトル B^{jh} を挿入する。本部は、これをもとに新しい $f^j h$ と $\bar{b}$ を計算する。本部プログラムにおいて、すべての j について、 $\bar{w}^j = 0$ となるようにして、ステップ2(c)に移る。

(c) $z < 0$ で、かつ、すべての j について、 $\bar{w}^j = 0$ ならば、 $t\bar{v} f^j h (h \in \bar{M}_2^j - \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n)$ を計算する。

$$\theta = \inf \left\{ +\infty, \frac{g^j h(\bar{u})}{t\bar{v} f^j h} \mid t\bar{v} f^j h > 0 \right. \\ \left. (h \in \bar{M}_2^j - \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n) \right\}$$

を求める。 $\theta = +\infty$ ならば、原問題(1.1)～(1.3)は、実行可能解を持たない。一方、 $\theta < \infty$ ならば、新しい価格ベクトル $\bar{u} = \bar{u} + \theta \bar{v}$ を計算する。本部は、この $\bar{u}$ を各事業部に伝達する。各事業部は、 $\bar{u}$ にもとづき、おのおのの事業部プログラムを解く。これより、ステップ1にもどる。

ところで、以上に述べた Balas の解法は、Dantzig-Wolfe の解法と、事業部プログラムについて、ほぼ同一である。したがって、ここでも1.1で述べた「各事業部は、それ自身の力によって、産出量ベクトルのウェイ

トをかならずしも見いだし得ない」という Baumol-Fabian の指摘が、そのままあてはまる。

さらに, Balas の解法は, Dantzig-Wolfe の解法と比べ, より多くの情報を, 各事業部から本部に伝達しなければならない。すなわち, 最適基底解 $\bar{x}^j (j=1, 2, \dots, n)$ ばかりでなく, $y^{jh} (h \in \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n)$, および $g^j_h(u) (h \in \bar{M}^j - \bar{N}^j; j=1, 2, \dots, n)$ をも伝える必要がある。

2. 数量・価格型分解原理

2.1. Kornai-Lipták の 2 階層プランニング

Kornai-Lipták のモデルは, つぎのように展開される。

原問題:

$$(2.1) \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(2.2) \quad {}^t c x \max$$

ただし, A, b, c , および x は, それぞれ, $M \times N$ 行列, M 次列ベクトル, N 次列ベクトル, および N 次列ベクトルである。

まず, 行列 A , ベクトル c , および x を

$$(2.3) \quad \begin{bmatrix} {}^t x \\ A \\ {}^t c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t x^1 & {}^t x^2 & \dots & {}^t x^j & \dots & {}^t x^n \\ A^1 & A^2 & \dots & A^j & \dots & A^n \\ {}^t c^1 & {}^t c^2 & \dots & {}^t c^j & \dots & {}^t c^n \end{bmatrix}$$

のように分割し, 原問題(2.1)~(2.2)をつぎのように書きかえる。

$$(2.4) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n A^j x^j \leq b \\ x^j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$(2.5) \quad \sum_{j=1}^n {}^t c^j x^j \max$$

ただし, A^j, c^j , および x^j は, それぞれ, $M \times n_j$ 行列, n_j 次列ベクトル, および n_j 次列ベクトルである。つぎに, (2.3) に対応して, 本部は, 各事業部にベクトル b を分割配分する。すなわち

$$\sum_{j=1}^n d^j = b,$$

ただし, d^j は, M 次列ベクトルである。各事業部は, このように配分されたベクトル d^j をもとに, つぎのプログラムを作成する。

$$\begin{cases} A^j x^j \leq d^j \\ x^j \geq 0 \end{cases}$$

$${}^t c^j x^j \max \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

そして, 事業部プログラムとしては, この問題の双対を用いる。

事業部プログラム:

$$(2.6) \quad \begin{cases} {}^t \pi^j A^j \geq {}^t c^j \\ \pi^j \geq 0 \end{cases}$$

$$(2.7) \quad {}^t \pi^j d^j \min \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

ただし, π^j は, M 次列ベクトルである。

ところで, 論を進めるにあたり, つぎのことがらを仮定する。

$$(2.8) \quad X = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$$

とするとき

$$(2.9) \quad X^* = \{x^* | x^* \in X, {}^t c x^* = \max_{x \in X} {}^t c x\} \neq \emptyset$$

そして,

$$(2.10) \quad X_j(d^j) = \{x^j | A^j x^j \leq d^j, x^j \geq 0\} \neq \emptyset$$

かつ

$$(2.11) \quad \Pi_j = \{\pi^j | {}^t \pi^j A^j \geq {}^t c^j, \pi^j \geq 0\} \neq \emptyset \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

さらに, つぎの 2 点を定義する。

$$(2.12) \quad D = \left\{ \begin{bmatrix} d^1 \\ \vdots \\ d^n \end{bmatrix} \mid \sum_{j=1}^n d^j = b, \right. \\ \left. {}^t \pi^j d^j \geq \min_{\pi^j} \max_{x^j} {}^t \pi^j A^j x^j, \right. \\ \left. x^j \in X_j(d^j), \pi^j \in \Pi_j, j=1, 2, \dots, n \right\}$$

および

$$(2.13) \quad X(d) = X_1(d^1) \times \dots \times X_n(d^n) \\ = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \mid x^j \in X_j(d^j), j=1, 2, \dots, n \right\}$$

すると, (2.8)~(2.13)の仮定および定義より

$$X = \bigcup_{d \in D} X(d)$$

が成立する。

さて, 任意の $d = ({}^t d^1, \dots, {}^t d^n) \in D$ について

$$(2.14) \quad \varphi_j(d^j) = \max_{x^j \in X_j(d^j)} {}^t c^j x^j = \min_{\pi^j \in \Pi_j} {}^t \pi^j d^j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

とあらわし

$$(2.15) \quad \varphi(d) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(d^j)$$

とする。そのとき, つぎの定理が成立する。

定理. $X = \bigcup_{d \in D} X(d)$ ならば

$$\max_{d \in D} \varphi(d) = \varphi(d^*) = \max_{x \in X} {}^t c x = \phi$$

である。

ここで

$$P = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n \\ = \left\{ p = \begin{bmatrix} \pi^1 \\ \vdots \\ \pi^n \end{bmatrix} \mid \pi^j \in \Pi_j, j=1, 2, \dots, n \right\}$$

と定義する。そのとき, (2.15)は, (2.14)より, つぎのようになる。

$$(2.16) \quad \varphi(d) = \min_{p \in P} {}^t p d$$

かくして、(2.16)と定理より、原問題(2.1)～(2.2)の最適値 Φ は、つぎのように与えられる。

$$(2.17) \quad \Phi = \max_{d \in D} \min_{p \in P} {}^t p d = {}^t p^* d^*$$

ところで、Kornai-Lipták は、(2.17)を1つのゲームとみなす。ゲームの解法としては、G. W. Brown and J. Robinson^{4), 19)}の模擬遊戯法を利用する。すなわち

本部プログラム：

$$\sum_{j=1}^n d^j = b$$

$${}^t \pi^j d^j \geq \min_{x^j} \max_{x^j} {}^t \pi^j A^j x^j, \quad x^j \in X_j(d^j), \quad \pi^j \in \Pi_j$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n {}^t \pi^j d^j \quad \max$$

には

$${}^t p d^*(p) = \max_{d \in D} {}^t p d$$

を対応させる。一方、事業部プログラム(2.6)～(2.7)には

$${}^t p^*(d) = \min_{p \in P} {}^t p d$$

を対応させる。そして、実際の解法手続は、以下の逐次解法にゆだねられる。

逐次解法：

$(M \times n)$ 次列ベクトル d と、 $(M \times n)$ 次列ベクトル p は、それぞれ、つぎの規則にしたがう $(M \times n)$ 次列ベクトルの系列 $d\{1\}, d\{2\}, \dots, d\{T\}, \dots$ と $(M \times n)$ 次列ベクトルの系列 $p\{1\}, p\{2\}, \dots, p\{T\}, \dots$ とから構成される。

段階 I：

ステップ I 任意の $d \in D$ を選ぶ

ステップ II $d\{1\} = d$ 、とおく

ステップ III $p^*(1) = \min_{p \in P} p(d\{1\})$ 、を求める

ステップ IV $p\{1\} = p^*(1)$ 、とおく

段階 T ($T=2, 3, \dots$)：

ステップ I $d^*(T) = \max_{d \in D} d(p\{T-1\})$ 、を求める

ステップ II $d\{T\} = [(T-1)/T]d\{T-1\} + [1/T]d^*(T)$ 、を計算する

ステップ III $p^*(T) = \min_{p \in P} p(d\{T\})$ 、を求める

ステップ IV $p\{T\} = [(T-1)/T]p\{T-1\} + [1/T]p^*(T)$ 、を計算する

この逐次解法は、一般に、Brown-Robinson の模擬遊戯法の利用と考えられている。しかし、筆者はここで、解の系列 $d\{T\}$ および $p\{T\}$ は、Brown-Robinson の解の系列とは、各段階における最適解の求め方について異なっていることを主張したい。すなわち、Brown-

Robinson の解の系列は、以下のように与えられている。

利得行列 A は、 $m \times n$ 行列であるとする。さらに、 u^i (あるいは、 v^j) を、第 i (あるいは、第 j) 成分が 1 で、他の成分がゼロである m 次 (あるいは、 n 次) 列ベクトルとする。そのとき、 m 次列ベクトル $x(T)$ および n 次列ベクトル $y(T)$ の系列は、それぞれ、つぎのように構成される。

(1) $x(0)$ および $y(0)$ は、それぞれ、 R^m および R^n におけるゼロ・ベクトルである。

(2) $x(T) = x(T-1) + u^i$
ただし、 i は、 $Ay(T-1)$ の最大の成分の番号である。

(3) $y(T) = y(T-1) + v^j$
ただし、 j は、 ${}^t x(T)A$ の最大の成分の番号である。

よって、Brown-Robinson の解の決定方法、(2)および(3)と、Kornai-Lipták の段階 T ($T=2, 3, \dots$) における解の決定方法、ステップ I、II およびステップ III、IV とは、最大・最小のきめ方について異なっている。したがって、Kornai-Lipták の解の系列の収束性を保証するためには、Kornai-Lipták のように、Brown-Robinson の定理によりというのでは、不十分である。新たに、Kornai-Lipták の解の系列自身の収束性を証明しなければならない。

2.2. ten Kate の直接資源配分法

ten Kate は、Kornai-Lipták の解法は、Brown-Robinson の模擬遊戯法をそのまま利用していると理解しているがために、反復計算を無限回行なえば、収束すると考えている。しかし、その解法は、収束の速度が遅く、有限回の範囲内では収束しないと批判している。ten Kate は、有限回で収束することをめざし、つぎに述べるような解法を与えた。

まず、2.1 における問題 (2.4)～(2.5) をつぎのように変形する。

$$\begin{cases} Ax^j - d^j \leq 0 \\ x^j \geq 0 \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n d^j = b$$

$$\sum_{j=1}^n {}^t c^j x^j \quad \max$$

この問題の双対は

$$(2.18) \quad \begin{cases} {}^t \pi^j A^j \geq {}^t c^j \\ \pi^j \geq 0 \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(2.19) \quad {}^t \pi^j - {}^t \pi^* = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(2.20) \quad {}^t \pi^* b \quad \min$$

となる。ただし、 π^* は、 M 次列ベクトルである。

さて、(2.18) について、Dantzig-Wolfe の解法のよ

うに、すべての端点解を見いだすことを考える。

$$H_j = \{\pi^j | {}^t\pi^j A^j \geq {}^t c^j, \pi^j \geq 0\} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

と定義する。 H_j は、おのおのの j について有界であるとする。そのとき、 $H_j (j=1, 2, \dots, n)$ は、凸多面体となる。 H_j の端点の集合を

$$\dot{H}_j = \{\pi^{j1}, \pi^{j2}, \dots, \pi^{jk(j)}\}$$

とあらわすと、 $H_j = [\dot{H}_j] (j=1, 2, \dots, n)$ である。よって、任意の $\pi^j \in H_j$ について

$$\pi^j = \sum_k s_{jk} \pi^{jk}, \quad s_{jk} \geq 0, \quad \sum_k s_{jk} = 1, \quad \pi^{jk} \in \dot{H}_j \\ (j=1, 2, \dots, n)$$

以上の結果を、問題(2.18)～(2.20)に適用すると、つぎのようになる。

$$(2.21) \quad \begin{cases} {}^t\pi^* - \sum_{k=1}^{k(j)} s_{jk} {}^t\pi^{jk} = 0 \\ s_{jk} \geq 0 \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, n; \\ k=1, 2, \dots, k(j))$$

$$(2.22) \quad \sum_{k=1}^{k(j)} s_{jk} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(2.23) \quad {}^t\pi^* b \quad \min$$

かくして、ten Kate は、問題(2.21)～(2.23)の双対であるつぎの問題を本部プログラムにする。

本部プログラム：

$$(2.24) \quad \sum_{j=1}^n d^j = b$$

$$(2.25) \quad {}^t\pi^{jk} d^j \geq z_j, \quad \pi^{jk} \in \dot{H}_j \quad (j=1, 2, \dots, n; \\ k=1, 2, \dots, k(j))$$

$$(2.26) \quad \sum_{j=1}^n z_j \quad \max$$

ただし、 z_j は変数である。なお、事業部プログラムとしては

事業部プログラム：

$$(2.27) \quad \begin{cases} {}^t\pi^j A^j \geq {}^t c^j \\ \pi^j \geq 0 \end{cases}$$

$$(2.28) \quad {}^t\pi^j d^j \quad \min \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

を採用する。

ten Kate は、以上に述べた体系を解くにあたり、2段階法を取り上げ、実行可能性と最適性について述べている。しかし、実際の計算手続という点で、この体系は、つぎに述べるようなことが指摘される。

原問題(2.1)～(2.2)を、本部プログラム(2.24)～(2.26)と、事業部プログラム(2.27)～(2.28)との相互関連のもとに解こうとしたとする。そのとき、各事業部から本部に報告される価格ベクトル $\pi^j (j=1, 2, \dots, n)$ は、基底に入れるべきベクトルとしてではなく、つけ加えるべき制限条件式として、本部プログラムに参加する。したがって、この体系における本部プログラムは、各事業

部から報告された価格ベクトル $\pi^j (j=1, 2, \dots, n)$ を取り入れるたびごとに、あらためてつくりかえられなければならない。

Dantzig-Wolfe の解法における本部プログラムは、前サイクルのシンプレックス表をもとに、機能的にピボット操作が施された。したがって、ten Kate の本部プログラムは、Dantzig-Wolfe のそれと比べ、かなりの計算量を必要としよう。

む す び

われわれは、これまで4つの分解原理について、概観と若干のコメントを与えてきた。しかし、分解原理のすべてをつくしてはいない。言えることは、われわれが設定した、価格・数量型および数量・価格型という分類に合致した標準的手法を取り上げたことである。この小論で述べることのできなかった手法については、別の機会に言及したい。

参 考 文 献

- 1) Balas, E., "An Infeasibility-Pricing Decomposition Method for Linear Programs", *Operations Research*, 14, 5(1966), 847-73.
- 2) Baumol, W. J. and T. Fabian, "Decomposition, Pricing for Decentralization and External Economies", *Management Science*, 11, 1 (1964), 1-32.
- 3) ———, "Comments on Maiti and Sengupta's Note", *Management Science*, 19, 12 (1973), 1461-2.
- 4) Brown, G. W., "Iterative Solution of Games by Fictitious Play", Chapter 24 of Koopmans 13), 374-6.
- 5) Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- 6) Dantzig, G. B. and P. Wolfe, "Decomposition Principle for Linear Programs", *Operations Research*, 8, 1 (1960), 101-11.
- 7) ———, "The Decomposition Algorithm for Linear Programs", *Econometrica*, 29, 4 (1961), 767-78.
- 8) Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New York, 1960. (邦訳：和田貞夫・山谷恵俊共訳、『線型経済学』, 紀伊国屋書店, 1964).

- 9) Gass, S. I., *Linear Programming: Methods and Applications*, 3rd. ed., McGraw-Hill, New York, 1969. (邦訳: 小山昭雄訳, 『線形計画法一方法と応用一原書第3版』, 好学社, 1972).
- 10) Geoffrion, A. M., "Elements of Large-Scale Mathematical Programming, Part I: Concepts", *Management Science*, 16, 11(1970), 652-75.
- 11) ———, "Elements of Large-Scale Mathematical Programming Part II: Synthesis of Algorithms and Bibliography", *Management Science*, 16, 11 (1970), 676-91.
- 12) Hagelschuer, P. B., *Theorie der Linearen Dekomposition*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- 13) Koopmans, T. C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York, 1951.
- 14) ———, "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", Chapter 3 of Koopmans 13), 33-97.
- 15) Kornai, J., *Mathematical Planning of Structural Decisions*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- 16) Kornai, J. and Th. Lipták, "Two-Level Planning", *Econometrica*, 33, 1 (1965), 141-69.
- 17) Maiti, P. and R. Sengupta, "A Note on the Possibility of Decentralization in a Model of Allocation of Resources", *Management Science*, 19, 12 (1973), 1459-61.
- 18) Orchard-Hays, W., *Advanced Linear-Programming Computing Techniques*, McGraw-Hill, New York, 1968. (邦訳: 高橋磐郎・出居茂監修, 小国力・坂本正巳共訳, 『コンピュータによる線形計画法』, 培風館, 1973).
- 19) Robinson, J., "An Iterative Method of Solving a Game", *Annals of Mathematics*, 54, 2 (1951), 296-301.
- 20) 鈴木康彦, "リニア・プログラミングによる経営管理の分権化," 商学論集, 44, 3(1976), 139-78.
- 21) ———, "Dantzig-Wolfe の分解原理における全体最適と部門最適の関係," 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌, 投稿中.
- 22) ten Kate, A., "Decomposition of Linear Programs by Direct Distribution", *Econometrica*, 40, 5 (1972), 883-98.

(すずき・やすひこ 福島大学経済学部)