

積分幾何学について (3)

腰塚 武志

2.6 Crofton の第 1 定理

これから Crofton によって導出された定理をいくつか述べていくが、定理につけた番号は便宜的なもので一般的なものではないことをおことわりしておく。

前回では(2.17)の導出の際「凸閉曲線と交わる直線」という表現を用いた。ここでは凸閉曲線に囲まれた凸領域を単に凸領域とよぶことにして、「凸領域をよぎる直線」という表現を用いる。このとき凸閉曲線を凸領域の境界とよぶ。そこで「凸閉曲線と交わる直線」の集合を X 、「凸領域をよぎる直線」の集合を X' とすると、 $X \supset X'$ で、 $X - X'$ は凸閉曲線と接する直線の集合となり、この測度は 0 である。したがって X と X' の測度は等しいので以上の 2 つの表現を問題によって適宜使い分けていくつもりである。

さて第 1 定理は 2 つの凸領域をともによぎる直線の集合の測度に関するものである。

いま図 2.28 のように 2 つの凸領域 C_1, C_2 があって、 C_1, C_2 の境界にともに接する接線が接点 A, B, C, D, E, F, G, H を用いてそれぞれ AB, CD, EF, GH とあらわされるものとする。そして EF, GH の交点を O とし、凸閉曲線 $OEACGO, OHBDFO$ に囲まれた凸領域をそれぞれ Γ_1, Γ_2 とする。また C_1, C_2 をともを含む最小凸領域(最小凸被覆)を C_{12} とすると、これは図において凸閉曲線 $ABDCA$ に囲まれた凸領域をあらわすと C_{12} をよぎる直線はかならず Γ_1 と Γ_2 のどちらか

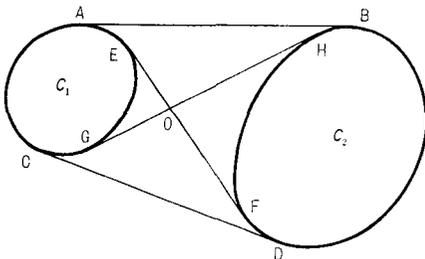


図 2.28

一方かまたは両方をよぎる。ただし O を通って線分 AB, CD に交わる直線は例外だが、測度が 0 なので測度の計算では除いて考える。

ここで凸領域 Γ の境界の長さを $L(\Gamma)$ であらわすものとすれば、前回の(2.17)から Γ をよぎる直線の集合の測度は $L(\Gamma)$ となる。よって $L(\Gamma_1)$ は Γ_1 のみをよぎる測度と Γ_1, Γ_2 をともによぎる測度を加えたものであるし、 $L(\Gamma_2)$ も Γ_1 と Γ_2 を入れ換えて同様に述べるができる。そこで Γ_1, Γ_2 をともによぎる直線の集合を G_{12} とすればその測度は包除関係から以下のように求められる。

$$m(G_{12}) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2) - L(C_{12}) \quad (2.27)$$

ところで図 2.28 から明らかなように Γ_1 と Γ_2 をともによぎる直線は必ず C_1, C_2 をともによぎる。逆に C_1, C_2 をともによぎる直線はかならず Γ_1, Γ_2 をともによぎる。したがって G_{12} は C_1, C_2 をともによぎる直線の集合でもある。そこで $L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$ を $L(C_1, C_2)$ とおいてこれと $L(C_{12})$ を図 2.28 の長さであらわしてみよう。ただし線分 AB の長さを \overline{AB} で、弧 BC の長さを \widehat{BC} で表示する。

$$L(C_1, C_2) = \overline{AE} + \widehat{EF} + \overline{FD} + \widehat{DB} + \widehat{BH} + \overline{HG} + \widehat{GC} + \widehat{CA}$$

$$L(C_{12}) = \overline{AB} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{CA}$$

Crofton の表現では(文献 [1])この $L(C_1, C_2)$ を C_1 と C_2 のまわりを通るエンドレスバンド (endless band) の内で C_1 と C_2 の間で交差するほうの長さとし、 $L(C_{12})$ は交差しないほうの長さとしている。 L を使う表記法は違いますがこの表現は直観に訴え、記憶するにも大変便利なものである。つまり C_1 と C_2 をともによぎる直線の集合の測度は上述の 2 つのエンドレスバンドの長さの差としてつぎのようにあらわされる。

$$m(G_{12}) = L(C_1, C_2) - L(C_{12}) \quad (2.28)$$

以上の議論で図 2.28 において接点とした A, \dots, H は矩形の角のような点でもよいことがわかるであろう。

もし C_1 と C_2 が交わっているとすると、交差するエンドレスバンドを通すことができない。ところが C_{12} を前と同じに考えると、 C_{12} をよぎる直線は図 2.29 から明ら

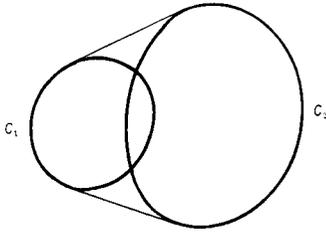


図 2.29

かなように C_1 か C_2 のどちらか一方かまたは両方をよぎる。図 2.28 において Γ_1 と Γ_2 が考えられたのは C_{12} をよぎる直線のうちで C_1 と C_2 を両方ともよぎらない直線が存在したからである。そこで (2.27) において Γ_1, Γ_2 をそれぞれ C_1, C_2 と置き換えれば C_1 と C_2 が交わっているときの測度が以下のように求められる。

$$m(G_{12}) = L(C_1) + L(C_2) - L(C_{12}) \quad (2.29)$$

Crofton の第 1 定理とは以上の (2.28) と (2.29) を併せてさすものとする。

気づかれた方もいると思うが、前回の 2.5 の (iii) の 2 つの線分をともによぎる直線の測度 (2.21) は実は (2.28) の特別な場合である。これは C_1, C_2 を線分とすれば明らかであろう。(2.21) 式の場合四辺形 $ABCD$ は凸である

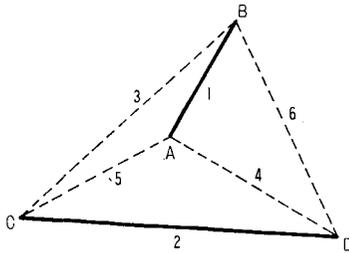


図 2.30

という前提があった。ところが凸でなくても (2.28) から算出が可能である。図 2.30 で前回のように線分 AB, CD, BC, AD, AC, BD の長さをそれぞれ $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ とする。すると (2.28) から線分 AB, CD をともによぎる直線の集合の測度はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} m(G_{12}) &= L_2 + L_3 + L_1 + L_4 - (L_5 + L_6) \\ &= 2L_1 + L_4 + L_3 - (L_5 + L_6) \end{aligned} \quad (2.30)$$

さらに 2 つの線分が交わっているときは、図 2.31 の右

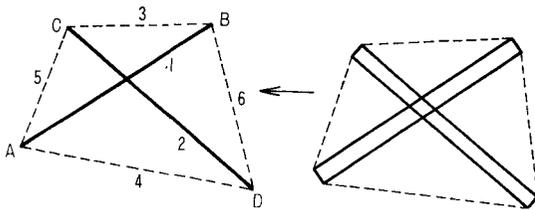


図 2.31

側の図の細長い矩形に (2.29) を適用しその極限を考える。すると 2 つの線分 AB, CD をともによぎる測度はつぎのようになる。

$$m(G_{12}) = 2(L_1 + L_2) - (L_3 + L_4 + L_5 + L_6) \quad (2.31)$$

ただし L_i は前と同じである。

さて (2.30), (2.31) 式の導出は定理 (2.28), (2.29) の簡単な応用であった。しかしこの定理はもっと複雑な問題に 응용が可能で、それにはのちほどふれることにする。

2.7 Crofton の第 2 定理

この定理にはつぎのような積分が必要なのでこれについてまず述べることにする。

いま凸領域 C があってこれをよぎる直線のこの領域内の長さを l とし、積分 $\int l dG$ について考える。すると l は p, θ の関数としてあらわされ、図 2.32 のように原点をこの領域の内部にとるとこの積分はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \int l dG &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r(\theta)} l(p, \theta) dp \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{r(\theta)} l(p, \theta) dp + \int_0^{r(\theta+\pi)} l(p, \theta+\pi) dp \right) d\theta \end{aligned}$$

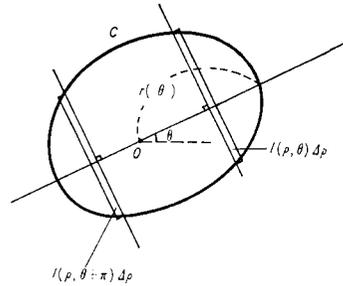


図 2.32

ところで C の面積を S とすると、図から明らかなように上式の括弧の中は S に等しい。そこで次式が得られる。

$$\int l dG = \pi S \quad (2.32)$$

前々回 (1) のはじめに述べた l の期待値 $E(l)$ はこれを用いたもので、 C の境界の長さを L とするとつぎのように求められる。

$$E(l) = \frac{\int l dG}{\int dG} = \frac{\pi S}{L} \quad (2.33)$$

さて本題にもどろう。これから述べる定理は凸領域をよぎる 2 本の直線の交点に関するものである。

いま凸領域 C とこれをよぎる直線の対 g_1, g_2 があるものとする。 g_1 と g_2 はこの領域内で交わる場合と外で交わる場合があるが、最初に C の内部で交わる場合の直線の対の集合の測度について考えてみよう。図 2.33 のよう

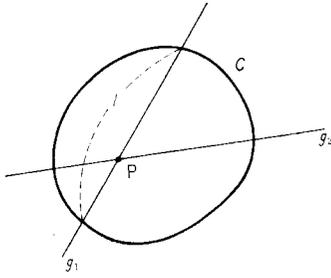


図 2.33

に g_1 をまず固定し, g_1 の C 内での長さを l とする. すると, この長さ l の線分をよぎる直線はかならず C をよぎる. そこでこの線分をよぎる直線の測度は前回の(2.15)から $2l$ だから, これと(2.32)から C 内で交わる測度はつぎようになる.

$$\int_{P \in C} dG_1 dG_2 = \int 2ldG_1 = 2\pi S \quad (2.34)$$

ただし P は g_1 と g_2 の交点をあらわす.

全体の測度はいうまでもなく

$$\int dG_1 dG_2 = \int dG_1 \int dG_2 = L^2 \quad (2.35)$$

だから C の外で交わる測度は $L^2 - 2\pi S$ となる. また C をよぎるランダムな 2 直線についてその交点が C 内にある確率 P_C はつぎのように求められる.

$$P_C = 2\pi S / L^2 \quad (2.36)$$

したがって C が半径 r の円のとき, この確率は

$$P_C = 2\pi(\pi r^2) / (2\pi r)^2 = 1/2$$

となる.

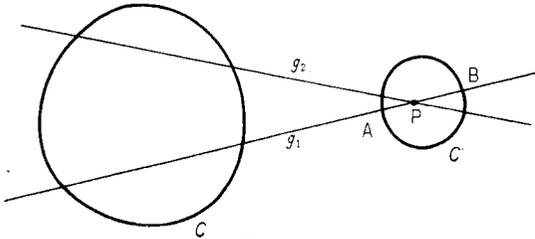


図 2.34

つぎに C の外部で交わる場合について考えてみよう.

図2.34のように C の外部に凸領域 C' をとり, C と C' をともによぎる直線 g_1 をまず固定する. そして g_1 と C' の境界との交点を図のように A, B とする. g_1 と g_2 が C' の内部で交わるときは, g_2 は C と線分 AB をともによぎらなければならない. そこで定理(2.28)を用いて C と AB をともによぎる直線の集合の測度を求める. 領域 C' が微小であれば, 2つのエンドレスバンドと C との接点は図2.35のように, F, H でほとんど一致しているとみなせる. それに FB と FA , また HB と HA , はほとんど平行であるとみなせる. そこで A から FB に垂線をおろしてその足を E , A から HB に垂線をおろしてその足を

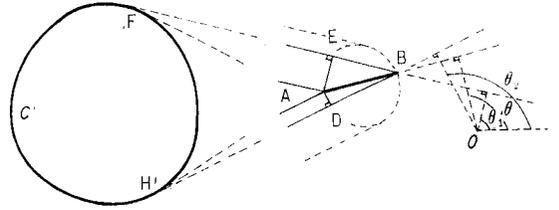


図 2.35

D とする. すると求めたい測度であるエンドレスバンドの長さの差は以下のようにあらわされる.

$$\int_{P \in C'} dG_2 = 2AB - (BE + BD)$$

さらに AB の長さを l , 原点から AB を含む直線 g_1 におろした垂線の角度を θ , FB, HB におろした垂線の角度をそれぞれ θ_1, θ_2 とすれば, $\angle ABE = \theta - \theta_1$, $\angle ABD = \theta_2 - \theta$ となる. よって $BE = AB \cos(\theta - \theta_1)$, $BD = AB \cos(\theta_2 - \theta)$ だから上式の右辺はさらにつぎのようにあらわされる.

$$l \{ 2 - \cos(\theta - \theta_1) - \cos(\theta_2 - \theta) \}$$

そこでこれを各 g_1 について積分すれば求めたい測度が得られるわけである. l についてはこの微小凸領域 C' の面積を ΔQ とすると

$$\int l dp = \Delta Q$$

となる. また直線 g_1 の角度 θ については C' が微小であることから $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ とみなせるから, この範囲で積分すればよい.

したがって g_1 と g_2 が C' 内で交わる場合, すなわち交点 P が C' 内にある場合の測度はつぎのように求められる.

$$\begin{aligned} \int_{P \in C'} dG_1 dG_2 &= \int l \{ 2 - \cos(\theta - \theta_1) - \cos(\theta_2 - \theta) \} dG_1 \\ &= \Delta Q \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{ 2 - \cos(\theta - \theta_1) - \cos(\theta_2 - \theta) \} d\theta \\ &= \Delta Q \{ 2(\theta_2 - \theta_1) - 2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \} \end{aligned}$$

そこで $\omega = \theta_2 - \theta_1$ とおき, この微小領域をどんどん小さくしていったら図2.36のように点 Q とすれば, Q における測度の密度は上式の結果を微小領域の面積 ΔQ で割って $2(\omega - \sin \omega)$ となる. そこで Q の座標を (x, y) とし, $dQ =$

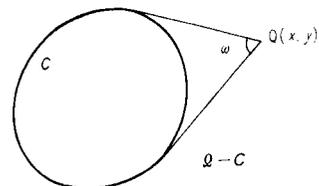


図 2.36

$[dx, dy]$ とすれば上の結果と (2.34), (2.35) からつぎのように Crofton の第 2 定理が導かれる。

$$L^2 = 2\pi S + 2 \int_{\Omega-C} (\omega - \sin \omega) dQ \quad (2.37)$$

ただし Ω は平面全体をあらわすものとする。

以上は文献 [1] の Crofton 自身の証明方法にもとづいて少し詳しく述べたものである。極限のとり方等で議論の仕方が粗いと思われるかもしれない。ところでこれには Lebesgue による別な証明があり (文献 [14]), 文献 [3], [4], [5] ではこちらを採用している。そこで厳密な証明を知りたい場合はこれらを参照していただきたい。Crofton の方法をあえてとった理由は, Lebesgue の方法が積分に重きを置くのに対し, この方法は幾何学的であり, この定理を発見した筋道がよくわかると思われるからである。

この節の最後として凸領域 C が半径 1 の円の場合, この円をよぎるランダムな 2 直線によってできる交点の確率密度関数をこの第 2 定理から求めておこう。まず (2.37) をこの目的にかなうように書き直しておく。

$$1 = \int_0^{2\pi} \frac{dQ}{L^2} + \int_{\Omega-C} \frac{2(\omega - \sin \omega)}{L^2} dQ \quad (2.38)$$

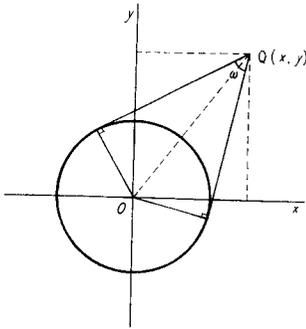


図 2.37

図 2.37 のように原点と円の中心を一致させると ω と x, y との関係が

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となるから以下が得られる。

$$\omega = 2 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \omega = 2 \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2}$$

そこで $L = 2\pi$, $S = \pi$ を (2.38) に代入して

$$1 = \int_0^{2\pi} \frac{dxdy}{2\pi} + \int_{\Omega-C} \frac{1}{\pi^2} \left(\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right) dxdy$$

となるから, 交点の確率密度関数 $f(x, y)$ はつぎようになる。

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \quad (x^2 + y^2 < 1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{\pi^2} \left(\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right) \\ &\quad (x^2 + y^2 \geq 1) \end{aligned} \right. \quad (2.39)$$

そして $f(x, y)$ の中心 O を通る断面として x 軸で切ったものは図 2.38 のようにあらわされる。

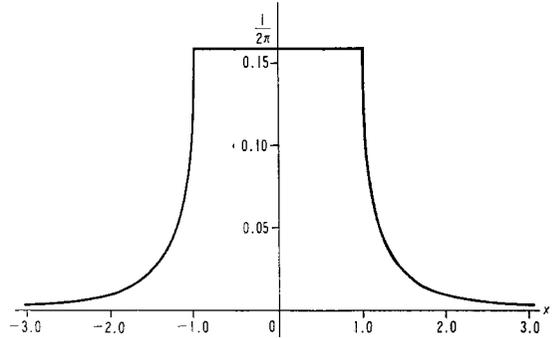


図 2.38

2.8 応用例 1

凸領域 C があって図 2.39 のようにランダムな直線が m 本 C をよぎっているとす。すると C はこれらの直線によっていくつかの小領域に分割される。そこで m がわかっているとき, 分割された領域の数の期待値を求めてみよう。

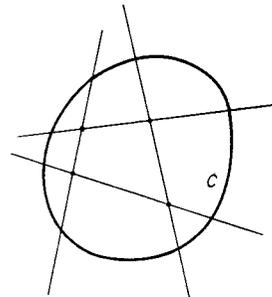


図 2.39

まずつぎの補題が必要になる。

[補題] 凸領域 C をよぎる直線の数 m , 直線同士の交点の数を n , 直線によって分割された領域の数を k とすると, これらの間にはつぎの関係式が成立する。

$$k = m + n + 1 \quad (2.40)$$

[証明] グラフ理論における Euler の公式を用いる。ここでは C をよぎる直線について, C の外部は無いのと考える。Euler の公式における頂点には C の境界と直線との交点も含まれ, 1 本の直線は境界と 2 度交わるから頂点数を N_v とすると $N_v = n + 2m$ となる。

辺の数 N_e は各頂点の次数を総計して 2 で割ったものに等しく, 次数は直線同士の交点が 4, 境界と直線との交点が 3 だから $N_e = (4n + 3 \cdot 2m) / 2 = 2n + 3m$ 。またこの公式における領域数 N_r は C の外部も 1 つと数えるから

$N_r = k + 1$ となる。したがって Euler の公式 $N_o - N_e + N_r = 2$ に以上を代入すると(2.40)が得られる。(証明終り)

ここで m 本の直線 g_1, g_2, \dots, g_m によってできる交点について考えよう。任意の $g_i, g_j (i \neq j)$ によって C 内のできる交点の数を n_{ij} で表示すると、これは 0 か 1 の値しかとらない。 $n_{ij} = 1$ の確率すなわち交点が C 内にある確率は前節の(2.36)から C の面積を S 、境界の長さを L とすると $2\pi S/L^2$ である。したがって n_{ij} の期待値 $E(n_{ij})$ はつぎのようになる。

$$E(n_{ij}) = 2\pi S/L^2$$

n については

$$n = \sum_{i \neq j} n_{ij}$$

となるから、 n の期待値 $E(n)$ は以下のようになる。

$$E(n) = \sum_{i \neq j} E(n_{ij}) = \binom{m}{2} \frac{2\pi S}{L^2} \quad (2.41)$$

n_{ij} と n_{ik} すなわち g_i と g_j の交点と g_i と g_k の交点とは g_i 上にあるという点で互いに独立とは言えないだろうが上式は期待値なのでさしつかえない。

よって(2.40)と(2.41)から k の期待値はつぎのように導出される。

$$E(k) = m + m(m-1) \frac{\pi S}{L^2} + 1 \quad (2.42)$$

余談になるが、あるとき筆者が Crofton の第 2 定理についてあれこれ考え、上式(2.42)を導いた。そして周囲の人達に筆者がはじめて導出したものであると吹聴していた。ところがある日文献リストの中で文献[15]が目に入った。そこでさっそくアメリカに居た友人に探してもらった。彼は苦勞してやっとプリンストンの図書館にあることを突き止め、筆者の手元にコピーを送ってくれた。論文はスペイン語で書かれていて筆者には読めないのだが、数式だけでまったく同じように導かれていることがわかった。残念ながら筆者が生まれる以前、すでに公にされていたわけである。

2.9 応用例 2

前節と同じように凸領域 C があって、その面積を S 、境界の長さを L とする。 C をよぎる直線が何本かあるとき、この直線同士によってできる交点の数から直線の領域内での長さの総計を推定しよう。

直線の本数の推定値を \hat{m} であらわすと、前節の(2.41)から現実の交点数 n によって \hat{m} の推定式が得られる。

$$\hat{m}(\hat{m}-1) = \frac{L^2}{\pi S} n \quad (2.43)$$

これを \hat{m} に関する 2 次方程式として解くと煩雑な式になるだけなので、以下の不等式にそって考える。

$$(\hat{m}-1)^2 < \hat{m}(\hat{m}-1) < \hat{m}^2$$

であるから

$$\hat{m}-1 < L\sqrt{\frac{n}{\pi S}} < \hat{m}$$

となり、つぎの不等式が成り立つ。

$$L\sqrt{\frac{n}{\pi S}} < \hat{m} < L\sqrt{\frac{n}{\pi S}} + 1$$

ここで直線 1 本のこの領域内での長さの期待値は(2.33)より $\pi S/L$ である。よって直線の領域内での長さの総計 A の推定値を \hat{A} とすると

$$\hat{A} = \hat{m}\pi S/L$$

となる。そこでこれと前の不等式から以下が成り立つ。

$$\sqrt{\pi n S} < \hat{A} < \sqrt{\pi n S} + l \quad (2.44)$$

ただし $l = \pi S/L$ (1 本の期待値) とする。 l は n と無関係な量だから n が大きくなると(2.44)から漸近的な推定式として以下の式が得られる。

$$\hat{A} \sim \sqrt{\pi n S} \quad (2.45)$$

この推定値はもちろん不偏ではないが、全体の面積さえ知っていれば交点を数えるだけで長さの推定ができるし、式が簡単なため記憶しやすい利点もある。ただし領域は凸でなければならない。

試みに前回(1)の図 2.6 を例にとると、 $n=233$ で、 C を半径 10 の円とすると $\sqrt{\pi n S} \approx 479.5$ 、一方実測値は $A \approx 498.7$ である。

もっと直線の本数を減らし、1 回の本数を 10 としてやはり半径 10 の円で試みた 4 回の結果を表 2.1 に示す。

表 2.1

試行	I	II	III	IV
交点数 n	19	21	20	23
推定値 $\sqrt{\pi n S}$	136.9	144.0	140.5	150.7
実測値 A	157.1	136.3	139.3	168.5

2.10 Crofton の第 3 定理

これは凸領域における 2 点間の長さとして、この凸領域をよぎる直線の領域内での長さとの関係について成り立つ定理である。

いま図 2.40 のように 2 つの点 P_1, P_2 があり、その座

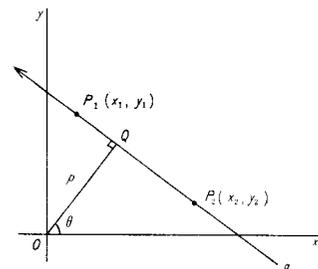


図 2.40

標がそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ であらわされているものとする。ここで P_1, P_2 を結んでできる直線 g を考え、これにおろした垂線の足を Q 、垂線の長さを p 、垂線と x 軸との角度を θ とする。 Q を g 上での原点とし、図のように向きを考え g 上の P_1, P_2 の座標をそれぞれ t_1, t_2 とする。すると Q の座標は $(p \cos \theta, p \sin \theta)$ であらわされるから $i=1, 2$ に対して以下が成り立つ。

$$x_i = p \cos \theta - t_i \sin \theta$$

$$y_i = p \sin \theta + t_i \cos \theta$$

これから

$$dx_i = \cos \theta dp - (p \sin \theta + t_i \cos \theta) d\theta - \sin \theta dt_i$$

$$dy_i = \sin \theta dp + (p \cos \theta - t_i \sin \theta) d\theta + \cos \theta dt_i$$

となるから dx_i と dy_i の外積はつぎようになる。

$$\begin{aligned} & [dx_i, dy_i] \\ &= (p \cos^2 \theta - t_i \sin \theta \cos \theta) [dp, d\theta] + \cos^2 \theta [dp, dt_i] \\ &\quad - (p \sin^2 \theta + t_i \sin \theta \cos \theta) [d\theta, dp] \\ &\quad - (p \sin \theta \cos \theta + t_i \cos^2 \theta) [d\theta, dt_i] \\ &\quad - \sin^2 \theta [dt_i, dp] \\ &\quad - (p \sin \theta \cos \theta - t_i \sin^2 \theta) [dt_i, d\theta] \\ &= p [dp, d\theta] + [dp, dt_i] - t_i [d\theta, dt_i] \end{aligned}$$

そこでこれを用いて $i=1, 2$ に対し、つぎのような外積を考える。

$$\begin{aligned} & \cdot [dx_1, dy_1, dx_2, dy_2] \\ &= -t_2 [dp, dt_1, d\theta, dt_2] - t_1 [d\theta, dt_1, dp, dt_2] \\ &= (t_2 - t_1) [dp, d\theta, dt_1, dt_2] \end{aligned}$$

そして $dP_i = [dx_i, dy_i]$ 、 $dG = [dp, d\theta]$ とおき、さらに我々の積分は正の値のみを考えているから、上式は以下のようなになる。

$$[dP_1, dP_2] = |t_2 - t_1| [dG, dt_1, dt_2] \quad (2.46)$$

以上の議論では g 上での座標の原点を垂線の足 Q にとった。しかしこれを各直線に対して定まる別な点にとっても、(2.46)式は成立する。なぜならこのときの P_1, P_2 の g 上の座標を t'_1, t'_2 とすると

$$t'_1 = t_1 + c(p, \theta), \quad t'_2 = t_2 + c(p, \theta)$$

となるから結局

$$|t'_2 - t'_1| [dG, dt'_1, dt'_2] = |t_2 - t_1| [dG, dt_1, dt_2]$$

となって同じことになる。

さて点 P_1, P_2 が図2.41のように凸領域 C に含まれて

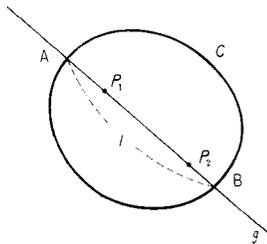


図 2.41

いると考え、 P_1, P_2 を結ぶ直線 g と C との交点を A, B とする。原点を B にとり、線分 AB の長さを l とする。このとき $|t_2 - t_1|^{n+1}$ を P_1, P_2 をそれぞれ A から B まで動かしてつぎのような積分を計算する。

$$\begin{aligned} & \int |t_2 - t_1|^{n+1} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^l \left(\int_0^t |t_2 - t_1|^{n+1} dt_1 \right) dt_2 \\ &= \int_0^l \left(\int_0^{t_2} (t_2 - t_1)^{n+1} dt_1 + \int_{t_2}^l (t_1 - t_2)^{n+1} dt_1 \right) dt_2 \\ &= \frac{1}{n+2} \int_0^l [t_2^{n+2} + (l - t_2)^{n+2}] dt_2 \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} l^{n+3} \quad (2.47) \end{aligned}$$

ここで C 内の2つの点 P_1, P_2 の距離を r とし、 r の巾を C 内のすべての点の対について積分したものを考える。すると(2.46)から

$$\int r^{nd} P_1 dP_2 = \int |t_2 - t_1|^{n+1} dG dt_1 dt_2$$

となるのでこれと(2.47)からつぎのCroftonの第3定理が成り立つ。

$$\int r^{nd} P_1 dP_2 = \frac{2}{(n+2)(n+3)} \int l^{n+3} dG \quad (2.48)$$

ただし $n \geq 1$ である。

この式で $n=0$ とおき、凸領域 C の面積を S とすると、

$$S^2 = \frac{1}{3} \int l^3 dG$$

が得られる。実はこれがCroftonの導いたもので、上の(2.48)はその拡張といえることができる。

そこで $\int l^2 dG$ を求めればこれまでわかっている l の期待値だけでなく分散も算出できる。これについては次節の応用例で本格的に述べることにする。

最後に誤解のないようにつけ加えておく。凸領域の任意の2点を結んでできる直線をもとに計算した結果、(2.48)が導出された。計算の結果はランダムな直線と関係がある。しかし凸領域でのランダムな点を結んでできる直線がランダムな直線になるわけではない。これは積分の展開を考えれば明らかであろう。(つづく)

参考文献(つづき)

- [14] Lebesgue, H. : Exposition d'un Mémoire de M. W. Crofton. *Nouvelles Annales de Math.*, (4), 12(1912), 481-502.
- [15] Santaló, L. A. : The mean value of the number of parts into which a convex domain is divided by n arbitrary straight lines. (In Spanish.) *Rev. Union Mat. Argentina*, 7(1941), 33-37.

(こしづか・たけし 東京大学工学部都市工学科)