

積分幾何学について (2)

腰塚武志

前回ページ数の関係から削除した部分について簡単に述べておこう。前回の (2.9) 式のところでは述べなかったが説明ぬきで示すと、Bertrand の逆説での (b) の場合の測度 m_b は以下のようなものになる。

$$m_b(X) = \int_X \frac{1}{\sqrt{r^2 - p^2}} dp d\theta$$

そこで考えている直線の全体を Ω とすると

$$m_a(\Omega) = \pi r^2, \quad n_b(\Omega) = \pi^2, \quad m_c(\Omega) = 2\pi r$$

で、 θ に関しては一様だから、全体の測度で割り、 θ について 0 から 2π まで積分すれば p に関する確率密度関数が以下のように求められる。

$$f_a(p) = \frac{2}{r^2}p, \quad f_b(p) = \frac{2}{\pi\sqrt{r^2 - p^2}}, \quad f_c(p) = \frac{1}{r}$$

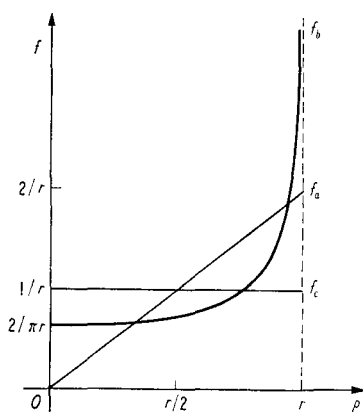


図 2.12

そこで、これらを図示すると図2.12のようになり、違いが明瞭になる。ここで一般の確率論の本のなかから1冊だけ、文献[13]をあげておこう。この本では Bertrand の逆説の項目の最後で(c)の場合が不変な測度であると述べられている。

2.3 外積の計算法

前節までに出てきたヤコビアン計算は比較的簡単であった。しかしこれからは変数変換が複雑になる。たとえば2つの点を同時に考える場合4つの変数が必要になり、ヤコビアンは4次の行列式となって計算に手数がかかる。そこで積分幾何学では以下に述べる外積の計算法が通常用いられる。

ここでは紙面の関係からこの計算法について最少の記述にとどめておく。すなわち計算法の形式的側面についてのみ述べ、理論的側面についてはふれないことにする。理論的側面についてはベクトル解析の本で、外積(または交代積)、外積代数(または Grassmann 代数)、および外微分等の項目を参照していただきたい。

さて ω_i を以下のように変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の微分についての1次式であるとする。ふつうは単に変数の1次式で議論されるがわれわれの場合はこのように限定してさしつかえない。

$$\omega_i = a_{i1}dx_1 + a_{i2}dx_2 + \dots + a_{in}dx_n$$

このとき $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$ について外積というものを考え $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h]$ で表示し、その計算法則をつぎのように与えることにする。(表記法は文献[5]によった)

- (i) 2つの項を入れかえると符号が変わる。すなわち $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots, \omega_h] = -[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots, \omega_h]$ 。
- (ii) したがって上式から $\omega_i = \omega_j$ 、すなわち $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$ の中で2つの項が等しければ $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_i, \dots, \omega_h] = 0$ 。
- (iii) $[\omega_1, \omega_2, \dots, c\omega_i, \dots, \omega_h] = c[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_h]$
- (iv) $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i + \omega_i', \dots, \omega_h] = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_h] + [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i', \dots, \omega_h]$

以上の計算法則にもとづいた例をつぎに示す。

$$x = x(x', y'), \quad y = y(x', y')$$

$$\text{のとき} \quad dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy'$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy'$$

である。これから dx と dy の外積を計算してみよう。 dx', dy' も ω の1つであることに注意してまず (iii) と

(iv) から

$$[dx, dy] = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial x'} [dx', dx'] + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} [dx', dy'] \\ + \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} [dy', dx'] + \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial y'} [dy', dy']$$

となる。ところが (i) と (ii) から

$$[dx', dx'] = 0, [dy', dy'] = 0$$

$$[dy', dx'] = -[dx', dy']$$

となり外積は

$$[dx, dy] = \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) [dx', dy']$$

となる。一方変数変換のヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'}$$

となるから外積の計算法則によって計算すればヤコビアンの計算が形式的にできる。

具体的な例として 2.2 節の (2.4) 式から計算してみよう。すなわち

$$\theta = \theta' - \alpha, \quad p = p' - a \cos \theta' - b \sin \theta'$$

から $d\theta = d\theta'$

$$dp = dp' + (a \sin \theta' - b \cos \theta') d\theta'$$

したがって $[dp, d\theta] = [dp', d\theta']$

となる。ここで $[d\theta', d\theta'] = 0$ だから実際には

$$\frac{\partial p}{\partial \theta'} = a \sin \theta' - b \cos \theta'$$

は計算しなくてもよいことがわかるであろう。

さて以上の説明ではどうも納得できないが、さりとて他の本を読む気にはならないという場合にはそのつどヤコビアンを計算してもよい。煩雑な場合がいくつかあるがそれ以外はそんなに手数がかかるわけではない。ただこの外積の計算法を用いると、変数変換によるヤコビアンの計算にあまりスペースをとられないので説明の要点がぼけずにすむ。そこでこれを用いるのは筆者にとって都合のよいことなのである。

2.4 Crofton の公式

いよいよ前回の直線の場合の不変な測度 (2.5) をもとに論議を進めていく。

いま図 2.13 のように弧曲線 AB を考えその長さを L とす

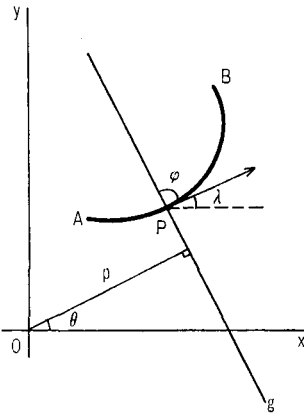


図 2.13

る。弧 AB 上の点 P の座標 (x, y) は A から P までの弧の長さ s によって以下のようにあらわされるものとする。

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (2.10)$$

ここで点 P で弧 AB と交わる直線を g とし、図のように点 P における弧の接線と g とのなす角度を φ 、接線と x 軸とのなす角度を λ とすると以下が成り立つ。

$$\theta = \lambda + \varphi - \pi/2 \quad (2.11)$$

また P は直線 g 上の点でもあるから (2.1) から

$$p = x \cos \theta + y \sin \theta$$

となり $dp = \cos \theta dx + \sin \theta dy + (-x \sin \theta + y \cos \theta) d\theta$,

ところが (2.10) と λ の定義から

$$\frac{dx}{ds} = \cos \lambda, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \lambda$$

で $\cos \theta dx + \sin \theta dy$

$$= (\cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda) ds$$

$$= \cos(\theta - \lambda) ds$$

となるから次式が導かれる。

$$dp = \cos(\theta - \lambda) ds + (-x \sin \theta + y \cos \theta) d\theta$$

したがって前節の外積の計算法から

$$[dp, d\theta] = \cos(\theta - \lambda) [ds, d\theta]$$

となる。さらに (2.11) から

$$\cos(\theta - \lambda) = \cos(\varphi - \pi/2) = \sin \varphi$$

また $d\theta = d\lambda + d\varphi$

ところが λ は s のみにより、 $d\lambda/ds$ は曲率をあらわすから、これを λ' とおいて

$$d\theta = \lambda' ds + d\varphi$$

よって $[dp, d\theta] = \sin \varphi [ds, d\varphi]$ (2.12)

が得られる。

図 2.13 から明らかなようにこの弧 AB に交わるすべての直線について考えると、(2.12) 式の右辺は $0 \leq s \leq L, 0 \leq \varphi \leq \pi$ の範囲で積分すればよい。

$$\int \sin \varphi ds d\varphi = \int_0^L \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) ds = 2L$$

ところがこの積分は曲線弧にそって行なわれたもので、(2.12) の左辺の単純な積分とは通常一致しない。すなわちこの曲線弧と交わる直線の集合の測度とはならない。

図 2.14 をみれば明らかだが弧 AB と点 P でのみ交わる直線 g のようなものばかりであれば問題ない。ところが g' のように弧と 2 つ以上の点で交わる直線があり、曲線弧にそった積分ではたとえば図の g' は P と P' でそれぞれ計算され

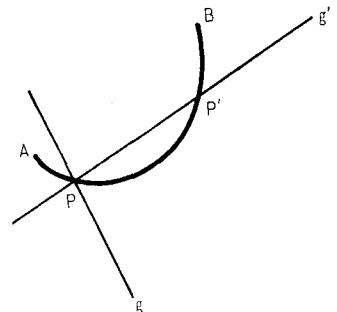


図 2.14

ているから重複している。そこで p, θ を変数として、1 以上の整数値をとる関数 $n(p, \theta)$ で上述の重複を表現すれば(2.12)式からつぎの式が導かれる。

$$\int n(p, \theta) dp d\theta = 2L \quad (2.13)$$

以上では直線と交わる曲線弧を滑らかなものとして議論してきた。ところが図2.15のようにこのような曲線弧を有限個つなぎ合せた曲線であっても、ほとんどいたるところ接線が存在するから(2.13)が成り立つことは明らかであろう。

ここで(2.13)式において $n(p, \theta) = 0$ となる場合には直線が曲線と交わらない場合と考えられるから積分の範囲をすべての直線にまで拡張することができる。もともと $n(p, \theta)$ は形式的なもので実際にはわからない場合が多いが、これを単に n で表示し、 $dp, d\theta$ の外積を $dG = [dp, d\theta]$ とすれば(2.13)から以下の式が得られる。

$$\int n dG = 2L \quad (2.14)$$

これはCroftonの公式とよばれ、直線を考えるうえで基礎的なものになる。



図 2.15

さて、(2.14)から算出できる測度について述べよう。まず図2.16のように曲線弧ABが線分のとき、これと交わる直線はすべて線分ABと1点で交わる。ただし2点A, Bを通る直線のみ例外だがこの直線は $p-\theta$ の平面1点と考えられるからこの測度は0である。したがって線分ABと交わる直線の集合Xについてほとんどいたるところ $n=1$ が成り立つから、Xの測度は公式(2.14)からつぎのようになる。

$$m(X) = \int dG = 2L \quad (2.15)$$

つまり「線分をよぎる直線の集合の測度はこの線分の長さの2倍に等しい」わけである。これは前回の(2.9)式にもとづく計算を一般化したものと言えるだろう。

ここで1点Aを通る直線の集合Xについて考えてみよう。この場合は図2.16でBがAに近づいていって一致した場合とみなせるから $L=0$ で、測度は(2.15)から

$$m(X) = 0 \quad (2.16)$$

となり、Xは測度が0の零集合であることがわかる。つまりある特定の点

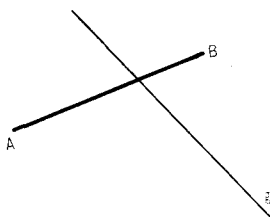


図 2.16

を通る直線は無数にあるがその測度は0である。

つぎに曲線弧の両端が一致し、しかもこれが図2.17のように凸閉曲線をなす場合について考えよう。この凸閉曲線と交わる直線gは接線を除くとすべて2つの交点を持つ。接線の集合は $p-\theta$ 平面においてgの集合の境界線をなすから測度は0である。そこでこの凸閉曲線と交わる直線の集合Xについて、ほとんどいたるところ $n=2$ が成り立つからXの測度は(2.14)から以下のようになる。

$$m(X) = \int dG = L \quad (2.17)$$

つまり「凸閉曲線に交わる直線の集合の測度はこの凸閉曲線の長さに等しい」ことになる。

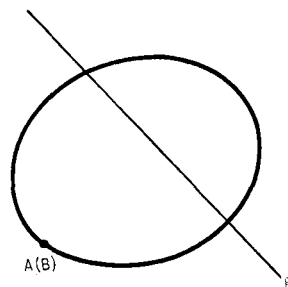


図 2.17

ここで凸閉曲線として図2.18のように細長い矩形を考え、長辺の長さをL、短辺の長さをεとする。すると(2.17)からこの矩形と交わる直線の測度は以下のようになり

$$m(X) = 2(L + \epsilon)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ として(2.15)が得られる。すなわち(2.15)は(2.17)の特別な場合であるということが出来る。

これまでの議論では連続な曲線のみを対象としてきた。しかし不連続であってもCroftonの公式は成立する。簡単な例として図2.19について考えてみよう。曲線 C_1, C_2 があってその長さをそれぞれ L_1, L_2 とする。 C_1 に着目して C_2 を無視したとき、その逆のときで公式(2.14)からつぎの2つの式が得られる。

$$\int n_1 dG = 2L_1, \quad \int n_2 dG = 2L_2$$

そこで C_1 の交点と C_2 の交点を一緒にして考え、各直線ごとに $n_1 + n_2 = n$ として新たに n を導入し、 $L_1 + L_2 = L$ として長さの総計をLとすれ

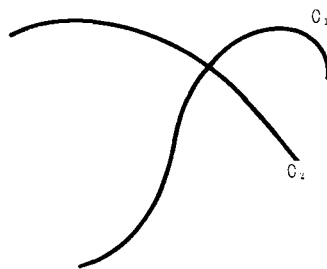


図 2.19

ば上記の2つの式を各辺ごとに加えさせて

$$\int (n_1 + n_2) dG = \int n dG = 2L$$

となり公式(2.14)が成立する。これは一般的に曲線が $C_1, C_2, \dots, C_k$ と k 個あっても成り立つことは明らかである。

さて Crofton の公式では左辺に n が入っているため測度の計算がむずかしいと受け取られるかもしれない。しかしそうではなくてすぐ前の例でも明らかのように、 n が入っているからこそ右辺が簡潔な結果になっているというべきなのである。

2.5 Crofton の公式の応用

前節までの結果からいくつかの幾何確率に関する簡単な問題を解くことができる。

(i) いま図2.20のように凸閉曲線 C_0, C があり、その長さをそれぞれ L_0, L とする。 C_0 の内部に C があるものとして、 C_0 に交わる直線が C にも交わる確率 P を求めよう。 C_0, C に交わる直線の集合をそれぞれ X_0, X とすれば前節の(2.17)から P は以下のように求められる。

$$P = \frac{m(X)}{m(X_0)} = \frac{L}{L_0} \quad (2.18)$$

つまり P は長さの比であらわされる。長さのみによるため C が C_0 内のどの位置にあっても P の値は変化しない。前回2.1節の終わりに近いところで「感覚的にすっきりしない点」という表現をしたが、これはここで述べていることと関連がある。つまり C の位置によって P の値が変化してしまう場合ランダムな直線とは言い難いわけである。

(ii) つぎに図2.21のように凸閉曲線 C_0 があってそのなかに曲線 C があるものとし、 C_0, C の長さをそれぞれ L_0, L とする。 C と交わる直線は必ず C_0 と交わるから、 C_0 と交わる直線の集合 X を C との交点数に応じて直和に分解する。つまり X_i で C との交点数がちょうど i の

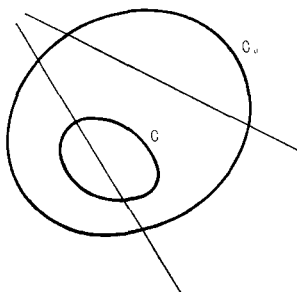


図 2.20

直線の集合をあらわして

$$X = X_0 + X_1 + X_2 + \dots$$

$$m(X) = m(X_0) + m(X_1) + m(X_2) + \dots$$

とする。

ここで、 C に関して公式(2.14)を X の範囲で適用すると

$$\begin{aligned} \int n dG &= 0 \cdot m(X_0) + 1 \cdot m(X_1) + 2 \cdot m(X_2) + \dots \\ &= 2L \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。ところが C_0 に関しては(2.17)から

$$m(X) = \int dG = L_0$$

となりこれで(2.19)式を割ると、 $m(X_i)/m(X)$ は交点数がちょうど i の場合の確率 $P(i)$ を意味し、

$$\frac{\int n dG}{\int dG} = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + \dots$$

となる。そこで上式の右辺は交点数の期待値 $E(n)$ となるからつぎの式が導かれる。

$$E(n) = \frac{\int n dG}{\int dG} = \frac{2L}{L_0} \quad (2.20)$$

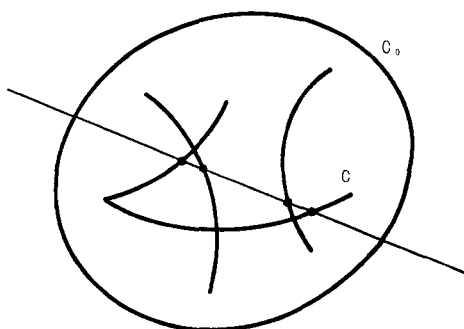


図 2.21

以上の議論では個々の $m(X_i)$ があたかも算出できたかのように述べられているが、これは(2.20)の導出をわかりやすくするために用いたので、通常は算出できないことが多い。つまり個々の $P(i)$ すなわち確率分布は判明しないが、期待値だけがわかるといった場合が圧倒的に多いのである。

(iii) つぎに図2.22のように線分 AB, CD があるとき、この2つの線分をともによぎる直線についてその測度を求めてみよう。ただし四辺形 $ABCD$ は凸であるものとする。

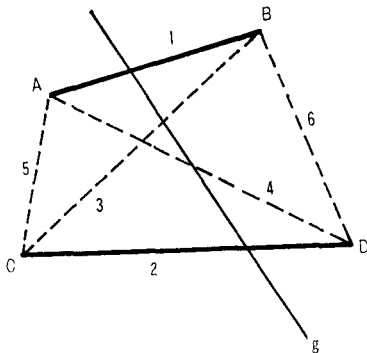


図 2.22

線分 AB, CD, BC, AD, AC, BD にそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6 と番号をつけこの番号 i で線分をあらわすとともに、その長さを L_i で表示する。さらに G_i で線分 i をよぎる直線の集合を、 G_{ij} で線分 i, j をともによぎる直線の集合をあらわすものとする。したがって求めたいものは G_{12} の測度 $m(G_{12})$ である。

さて G_3, G_4, G_5, G_6 について考えるとこれらは以下のように 2 つの線分をともによぎる直線の集合の直和として分解される。ただし点 A, B, C, D をそれぞれ通る直線については除いて考えることにする。これらは (2.16) から測度が 0 であるのでさしつかえない。

$$G_3 = G_{12} + G_{56} + G_{16} + G_{25}$$

$$G_4 = G_{12} + G_{56} + G_{15} + G_{26}$$

$$G_5 = G_{56} + G_{15} + G_{25}$$

$$G_6 = G_{56} + G_{16} + G_{26}$$

上の式は直和だからそのまま測度の式となる。たとえば G_3 に関する式では

$$m(G_3) = m(G_{12}) + m(G_{56}) + m(G_{16}) + m(G_{25})$$

となる。ほかの式にもこれをほどこして整理すると

$$m(G_3) + m(G_4) - \{m(G_5) + m(G_6)\} = 2m(G_{12})$$

となり、(2.15) から $m(G_i) = 2L_i$ だから

$$m(G_{12}) = L_3 + L_4 - (L_5 + L_6) \quad (2.21)$$

が得られる。

もし B と D が一致して図 2.23 のようになったときは、

$$L_3 = L_2, L_4 = L_1,$$

$$L_6 = 0$$

となるから (2.21) から以下ようになる。

$$m(G_{12}) = L_1 + L_2 - L_5 \quad (2.22)$$

以上の関係は線分をよぎる測度から幾何学的に導出を試み

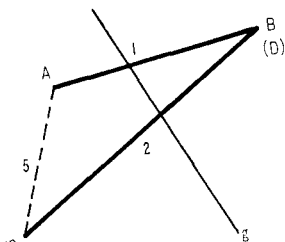


図 2.23

たが、積分によっても同じ結果を得ることが可能である。簡単な例は AB と CD のなす角度が直角の場合で、前回の (2.8) から積分を計算することによって求められる。

(iv) 前の (iii) で得られた結果をつぎの問題に応用する。図 2.24 のように矩形があって長辺の長さを a 、短辺の長さを b とする。いまこの矩形をランダムな直線がよぎるとき、平行な 2 辺をよぎる確率 P_1 、直交する 2 辺をよぎる確率 P_2 を求めてみよう。

この矩形をよぎる直線の集合 G のなかで平行な 2 辺をよぎる直線 g_1 の集合を G_1 、直交する 2 辺をよぎる直線 g_2 の集合を G_2 とする。 G_1 は長辺の場合と短辺の場合の 2 通りあるから (2.21) よりその測度は

$$m(G_1) = 2(\sqrt{a^2 + b^2} - b) + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)$$

となる。 G_2 は長辺と短辺の組合せで 4 通りあるから、

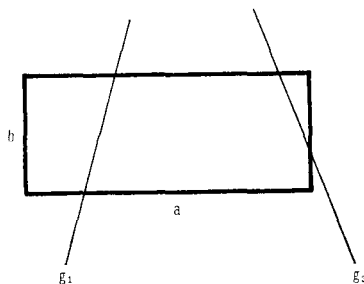


図 2.24

(2.22) よりつぎようになる。

$$m(G_2) = 4(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})$$

そこで全体の測度 $m(G) = 2(a + b)$ で割って P_1, P_2 は以下のように求められる。

$$P_1 = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b} - 1$$

$$P_2 = 2 - \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b} \quad (2.23)$$

もしこの矩形が正方形であれば、 $a = b$ として

$$P_1 = \sqrt{2} - 1, P_2 = 2 - \sqrt{2} \quad (2.24)$$

となる。よくこの正方形の場合各辺をよぎる確率を等しくして $P_1 = 1/3, P_2 = 2/3$ としてモデルを作製しているのを見かけるが、ランダムな直線の場合はこれより P_1 が大きく P_2 が小さいわけである。

(v) 前節の (2.12) 式に着目してランダムな直線について考えてみよう。円内をよぎる直線については前回の図 2.6 のように $p-\theta$ 平面での一様にランダムな点に対応させればよかった。

ところが線分をよぎる直線の場合には p, θ を変数としてとるとこの線分をよぎらない直線も対象に入ってくる。そこで (2.12) 式の s と φ を変数にとって考えてみよう。式 (2.12) と (2.15) からこの線分の長さを L とする

と

$$\int dG = \iint \sin \varphi ds d\varphi = 2L$$

となるが、これは以下のように書き直すことができ

$$\iint \frac{\sin \varphi}{2L} ds d\varphi = 1$$

したがって s と φ は独立でその確率密度関数は以下のようである解釈することができる。

$$f(s) = \frac{1}{L}, f(\varphi) = \frac{1}{2} \sin \varphi \quad (2.25)$$

ただし $0 \leq s \leq L, 0 \leq \varphi \leq \pi$

そこで図2.25のように線分をよぎるランダムな直線については、交点Pは線分上で一様にランダムであり、交角 φ は(2.25)の分布にしたがっていると考えられる。

この交角 φ に関しては直観と違うと思われる人が多いことであろう。直観では φ も $0 \leq \varphi \leq \pi$ で一様にランダムとしたいところである。現に同様と考えた例を筆者はいくつか知っている。

ところが正しくは(2.25)にしたがっているわけで、確率密度は $\varphi = \pi/2$ でもっとも高くなり、 $\varphi = 0, \varphi = \pi$ で0となる。これはラン

ダムな直線にそって見ているからで、前回と同様何本かの直線を乱数によって引いてみればこの辺の事情が感覚的によくわかるはずである。たとえば前回の図2.6の円内に線分をとって見てもよいであろう。

(vi) 前の(ii)のところで曲線との交点数がちょうど i の直線の集合を X_i としたとき、この測度 $m(X_i)$ は算出できないことが多いと述べた。しかしある種の曲線であれば算出できないわけではない。そこで複雑な場合はほかの節での応用例にゆずり、ここでは簡単な例につい

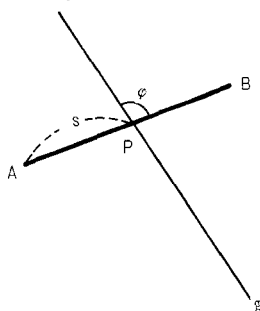


図 2.25

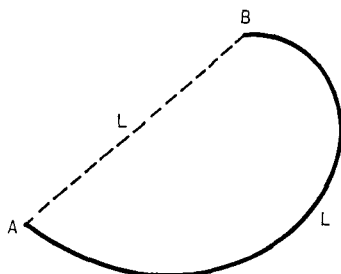


図 2.26

て述べてみよう。

図2.26のように長さ L の曲線弧 AB があって、 AB を直線で結んでできる閉曲線が凸であるものとする。線分 AB の長さを L' とし、弧 AB をよぎる直線の集合を X とする。すると

$$X = X_1 + X_2, m(X) = m(X_1) + m(X_2)$$

で、この凸閉曲線をよぎる直線の集合と X は等しいから測度は $m(X) = L + L'$ となる。一方 Crofton の公式を弧 AB に適用すると

$$\int ndG = 1 m(X_1) + 2 m(X_2) = 2L$$

となり以下の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} m(X_1) + m(X_2) = L + L' \\ m(X_1) + 2 m(X_2) = 2L \end{cases}$$

これを解いて

$$m(X_2) = L - L', m(X_1) = 2L' \quad (2.26)$$

が求められる。前出の(2.22)式は上の $m(X_2)$ の特別な場合であることがわかるであろう。

そこで弧 AB と線分 AB のなす曲線が凸であり、しかも L, L' が等しければ形の異なる弧でも直線がよぎるといふ事象に関しては差違を認めることができない。これらの曲線弧の例を図2.27に示す。



図 2.27

これらは合同ではないがある意味で「直線を仲介として合同に準ずる関係を持つ」と言えなくもない。別な言葉でいえば直線の図形に対する検出力の「鈍さ」が図2.27のように示されたわけである。「鈍さ」というと通常悪い意味にとられるがそうではなくて一種の「包容力」として筆者は積極的に評価したいと考えている。

(つづく)

参考文献 (つづき)

[13] Rényi, A. *Probability Theory*. North-Holland, Amsterdam, (1970).

(こしづか・たけし 東京大学工学部都市工学科)