

積分幾何学について (1)

腰 塚 武 志

0. はじめに

「積分幾何学」という名称は耳慣れないものであろう。筆者も当初この名称からなにもイメージできないでとまどったものである。そこで違う表題「幾何確率について」を考えてみた。しかし編集委員の方からこの解説を依頼された背景には、筆者がOR学会の研究発表会においてこの積分幾何学に基礎を置くものばかり発表してきたという事実がある。それで表題はこのとおりとするが内容は「積分幾何学にもとづく幾何確率とその応用について」としたいと思う。

名称でなにやらむずかしい分野と想像される方も多いかもしれない。しかし初歩的かつ基本的部分では積分が少しばかり煩雑である点を除くとわかりやすく、初等幾何と同じように直観的把握が可能である。しかも基本的部分の結果は簡潔で記憶しやすい。

一例をあげよう。図0.1のように凸領域があってその面積を S 、境界線の長さを L とする。いまこの領域をランダムな直線(正確には後述)がよぎるとき、この直線の領域内での長さを l とすると、 l の期待値 $E(l)$ は以下ようになる。

$$E(l) = \pi S / L \quad (0.1)$$

平面上のちょっとした問題に見当をつけるといった場合、この結果はORマンにとって大変便利なものではないだろうか。

この(0.1)式はなんと90年も前のブリタニカ百科事典第9版(文献[2])にのっている。余談になるが、この版のProbabilityの項目は全部で21ページにおよび、その

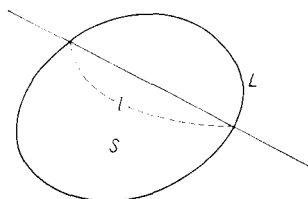


図 0.1

うちで幾何確率をあつかっているLocal Probabilityという細目には5ページがさかれている。つまり確率という項目のうちで幾何確率が1/4ほど場所を占めていたのである。

現代のブリタニカ百科事典ではこの幾何確率に関するものは跡形もなく消滅している。これは今世紀に入ってから現在までの幾何学のたどった道を極端な形で象徴していると言えるのかもしれない。しかし幾何学はほかの分野と密接にかかわり、その中に入り込んで成長し、重要性をいささかも失ってははいない。いわば名を捨てて実をとっている状態である。ところが幾何確率は消えたも同然のように細々と命脈を保っているにすぎない。

最近表題に「確率」とついている本は数えきれないほど出版されている。しかし幾何確率について本格的にふれているものはきわめて少ない。せいぜい「Buffonの針」や「Bertrandの逆説」までである。ところが積分幾何学を基礎に議論を展開すると、この逆説にはもはや逆説としての意味はないということが明確に判明する。これはもう少し流布されてもよいと思うので2章で述べることにしたい。

筆者がこれまで目にした本では「積分幾何学」の名称を冠したものに文献[3], [4], [5], [6], [7]の5冊、「幾何確率」が文献[8]の1冊、さらにこれらに準ずるものとして文献[9]がある。「積分幾何学」の名称をはじめて使用したのは[3]の著者 Blaschke で、彼による公式は「積分幾何学の主公式」(3章で述べる)とよばれている。この公式を主として面積調査に応用したいいくつかの例が本誌の創刊号である文献[10]に紹介されている。そこでのなるべく重複を避け、Blaschkeより前の人で文献[1], [2]の著者である Crofton の業績を中心に論を進めてみたいと思う。なおこの2人に[4]の著者 Santaló を加えれば、積分幾何学の基礎に貢献した人をあげるのに十分であろう。

1. 積分幾何学の基礎概念

1.1 ランダムな点

ここでは積分幾何学の基礎概念を一様にランダムな点の場合について説明する。これは感覚的にもわかりやすいものである。

図1.1のように領域 C_0 があって、内部に領域 C があるものとする。 C_0 で一様にランダムな点が C に含まれる確率 P は C_0 、 C の面積をそれぞれ S_0 、 S とすると以下のように面積比であらわされる。

$$P=S/S_0 \quad (1.1)$$

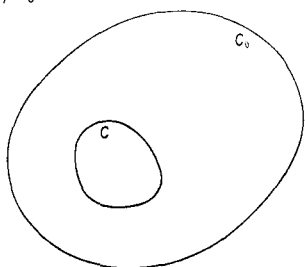


図 1.1

これは直観でもうなづけるし、自明なこととされている。しかし「なぜ面積によるのか？」という問が寄せられたとき、「自明である」または「それが定義である」という居直り以外になにか説明が可能なのであろうか。実はこの自明と思われるものの中から本質的なものを抽出したのが積分幾何学の基礎概念なのである。

1.2 点の集合の測度

前節の確率 P を得るための基礎として、 C に含まれる点の集合 X の測度(点のあつまりの量)を以下のようにおいて考えてみよう。(ただし C と X は同義語といってよいだろうが形式上わかる)

$$m(X)=\int_X f(x,y)dx dy \quad (1.2)$$

($f(x,y)$ は連続で $f(x,y)\geq 0$)

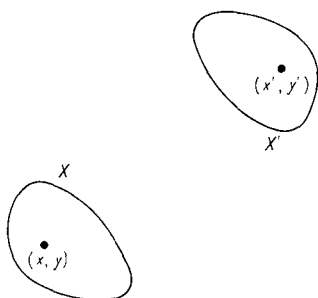


図 1.2

ここで (x,y) をつぎのような合同変換で (x',y') に移すものとする。

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + a \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{aligned} \quad (1.3)$$

すなわち図1.2のように X を X' に変換するわけである。 X' も C_0 に含まれているとすると一様の前提から合同な X と X' の測度は等しくなければならない。そうでないと合同な X と X' で確率が異なってしまう。

$$m(X')=\int_{X'} f(x',y')dx' dy'$$

だから $m(X)=m(X')$ とおいて

$$\int_X f(x,y)dx dy=\int_{X'} f(x',y')dx' dy' \quad (1.4)$$

が得られる。ところで積分の変数変換で(1.3)から

$$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}=1$$

であることにより以下の等式が成り立つ。

$$\int_{X'} f(x',y')dx' dy'=\int_X f(x',y')dx dy \quad (1.5)$$

(ただし積分の計算では通常上式の右辺は $\int_X g(x,y)dx dy$ の形になるが同じことである。)

したがって(1.4)、(1.5)式から以下の等式が得られる。

$$\int_X f(x,y)dx dy=\int_X f(x',y')dx dy \quad (1.6)$$

上式はどのように X をとっても成り立つから

$$f(x,y)=f(x',y')$$

でなければならない。そして (x,y) と (x',y') の対応は任意につけられるから

$$f(x,y)=c(\text{定数})$$

となる。これを用いて(1.1)の確率を再度表現するなら、 C_0 に含まれる点の集合を X_0 であらわして

$$P=\frac{m(X)}{m(X_0)}=\frac{c\int_X dx dy}{c\int_{X_0} dx dy}=\frac{S}{S_0}$$

となる。そこで結局 $c=1$ と おいても 一般性を失うことはないから(1.2)式の点の集合 X の測度は以下のようになる。

$$m(X)=\int_X dx dy \quad (1.7)$$

つまり積分幾何学の基礎とはこの「変換によって不変な測度を求める」ことにつきるわけである。(1.3)の変換はユークリッド幾何学の意味で合同だが、これを非ユークリッドでの合同に拡張してもよい。この方向で議論の展開は可能であるが、ここではふれないことにする。

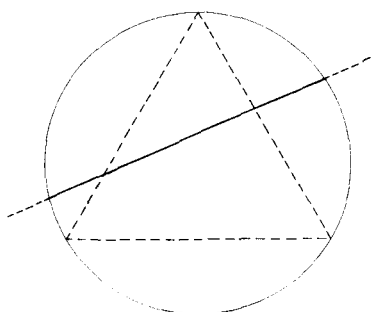


図 2.1

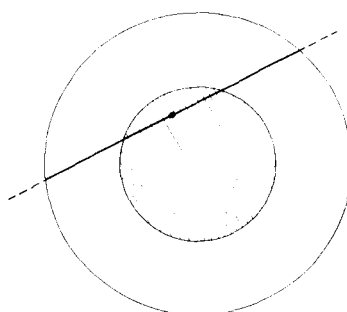


図 2.2

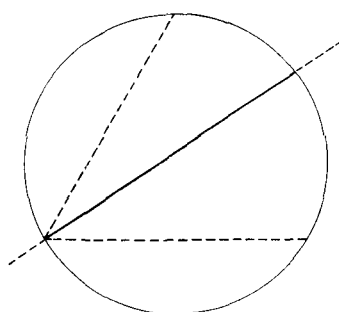


図 2.3

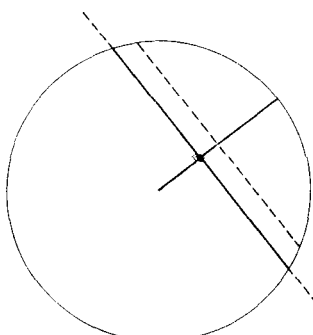


図 2.4

以上の議論はあたりまえのことを冗漫に述べているような印象を与えるかもしれない。これは点の場合が直観的に把握しやすいからで、次章の直線の場合にはこの議論の筋道が有効なものとなるであろう。

なお測度論としてきちんとした議論をする場合にはほかに満たさなければならない条件があるが、(1.2)式は明らかにそれを満たすので割愛する。

2. ランダムな直線

2.1 Bertrand の逆説

直線の場合については有名な Bertrand の逆説からはじめよう。この節とつぎの節で「ランダムな直線」としてはなにが妥当であるかという議論をするので、混乱を避けるため当初は「ランダム」という用語のかわりに「でたらめ」を使用する。

図 2.1 のように円とこれをよぎるでたらめな直線があり、この直線の円内での長さ(弦の長さ)がこの円の内接正三角形の一辺の長さよりも大きい確率を求めたい。

これにはよく知られているようにつぎの相異なる解答がある。ただし円の半径を r とすると内接正三角形の一辺の長さは $\sqrt{3}r$ となる。

(a) 弦の midpoint がこの円の中で一様に分布するものと考え、この点が円の中心から半径 $r/2$ 以内にあれば弦

の長さは $\sqrt{3}r$ 以上になる。そこで図 2.2 で明らかなように求めたい確率 P は以下のようになる。

$$P = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

(b) 弦の端点が円周上で一様に分布するものとする。円の対称性から一方の端点を円周上に固定しても一般性は

失われない。図 2.3 で明らかなように固定されないほうの端点は弦の長さに応じて 3 分された弧に対応し、これらの弧の長さは等しいから P はつぎのようになる。

$$P = \frac{\frac{2}{3} \pi r}{2 \pi r} = \frac{1}{3}$$

(c) 弦の midpoint が半径上で一様に分布するものとする。半径の角度は $(0, 2\pi)$ で一様だとすれば、半径をある角度に固

定してさしつかえない。すると図 2.4 から明らかなように P は以下のようになる。

$$P = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)}{r} = \frac{1}{2}$$

以上の 3 つの場合はでたらめな直線(または弦)の定義がそれぞれ異なるため、異なる結果が生じたわけである。そこで「幾何確率をあつかうときは注意を要する」と述べて終わりにしてしまう本が多い。

ところで 1 章の点の場合に領域 C_0 内で一様ではない分布にしたがうときは、 C 内に含まれる確率は一様のとときと異なるのがふつうである。それでも「逆説」などと大袈裟な表現はしない。では直線の場合の「逆説」は空中に矢を止める「Zenon の逆説」と同じように、逆説としての意味は過去のものとなっていると一般に受けとめられているのだろうか。これまでの筆者の経験ではどうもそうではないようである。おそらく定義の異なるでたらめな直線に関して、どのように異なるかという点まで踏み込んでいない場合が多いからであろう。

これを理論的にあつかうのは次節として、ここで少し筆者の経験を述べておきたい。筆者は積分幾何学を知る以前にでたらめな直線を定義する必要に迫られたことがあった。そのとき軽い気持ちで前述の (b) の場合のように定義していくつかの特性値の算出を試みたことがある。ところがどうも感覚的にすっきりしない点があり、この

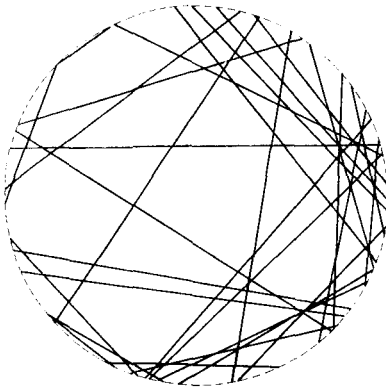


図 2.5

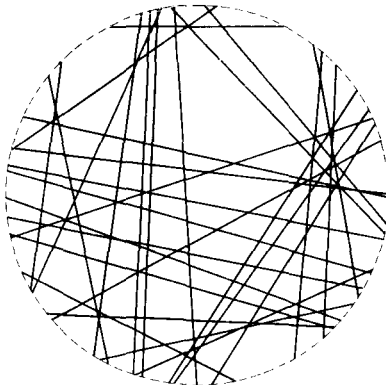


図 2.6

直線を乱数によって引いてみた。何本か引いてゆくに
つれ、筆者がイメージしていたでたらめな直線とかなり違
うものであることがわかり愕然とした。このときの感じ
を一言で述べるなら「中心附近をよぎる直線が周辺より
も少ない」というものであった。

ここでは(a)と(c)の場合を例で示す。この2つの場合
は比較的直線の本数が少なくても違いがよくわかるから
である。図2.5が(a)、図2.6が(c)の場合で、統計数値表
(日本規格協会)の一般乱数表1からそれぞれ30本ずつ直
線を引いて作成した。ただし説得力のためにはもっとよ
い図を得る乱数のシリーズもあるが、作為を加えていな
いことを強調したいため故意に表1のはじめから使用し
た。

この両図を比較すると(a)の場合のほうが周辺に近づ
くにつれ直線が多くなることがわかる。相対的に(c)よ
り(a)のほうが周辺の直線が多いのは前述の確率の計算
でもわかっている。不正確であるがえて感覚的表現を
すると、問題はどれが円内で直線の量の多少に明らかな
傾向(たとえば中心が少なく周辺が多いとか、または逆
とかいった)がないかということである。

(b)と(c)の差違を示そうとすると本数が多くなるので

(b)の場合は略す。筆者は乱数で図を作成したとき(c)の
場合がもっとも求めたいものに近いことが直観的によく
わかった。そこで次節以降の理論を理解することがきわ
めて容易であった。これを読まれている方は、図2.5と
図2.6を比較してどのような感じを持たれるであろうか。

2.2 直線の集合の測度

図2.7のように平面に直線があるとき、原点からこの
直線におろした垂線の長さを p 、垂線と x 軸とのなす角
度を θ とする。するとこの直線は p と θ を用いて

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p \quad (2.1)$$

とあらわされる。そこでこの p と θ で1章と同じように
直線の集合 X の測度を

$$m(X) = \int_X f(p, \theta) dp d\theta \quad (2.2)$$

とおき、以下合同変換で不変の条件を考える。

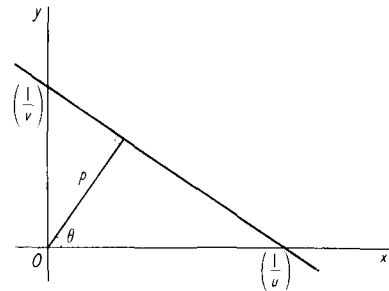


図 2.7

直線(2.1)を合同変換(1.3)によってつぎのような直線
に移すものとする。

$$x' \cos \theta' + y' \sin \theta' = p' \quad (2.3)$$

これに(1.3)を代入して

$$x(\cos \alpha \cos \theta' + \sin \alpha \sin \theta') + y(\cos \alpha \sin \theta' - \sin \alpha \cos \theta') = p' - a \cos \theta' - b \sin \theta'$$

よって

$$x \cos(\theta' - \alpha) + y \sin(\theta' - \alpha) = p' - a \cos \theta' - b \sin \theta'$$

だから、これと(2.1)から以下が得られる。

$$\theta = \theta' - \alpha$$

$$p = p' - a \cos \theta' - b \sin \theta' \quad (2.4)$$

X' で(2.3)の直線の集合をあらわし、不変の条件

$$m(X) = m(X') \text{ から}$$

$$\int_X f(p, \theta) dp d\theta = \int_{X'} f(p', \theta') dp' d\theta'$$

また(2.4)から変数変換のヤコビアンを計算すると

$$\frac{\partial(p, \theta)}{\partial(p', \theta')} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a \sin \theta' - b \cos \theta' & 1 \end{vmatrix} = 1$$

だから

$$\int_{X'} f(p', \theta') dp' d\theta' = \int_X f(p, \theta) dp d\theta$$

となり以上からつぎの等式が導かれる。

$$\int_X f(p, \theta) dp d\theta = \int_X f(p', \theta') dp d\theta$$

あとはまったく1章と同じように展開されて

$$f(p, \theta) = f(p', \theta')$$

から $f(p, \theta) = c$

よって $c=1$ において、直線の集合の測度は

(2.2)からつぎのようになる。

$$m(X) = \int_X dp d\theta \quad (2.5)$$

以上の議論は最初から変数として p と θ をとったので簡単になった。導出の過程で不変の測度は (2.5) およびその定数倍にかぎるということはわかるが、理解を深めるために異なる変数をとった場合について述べてみよう。

図2.7で直線が x 軸、 y 軸とそれぞれ座標 $1/u$, $1/v$ で交わっているものとする。このとき直線の方程式は

$$ux + vy = 1$$

であらわれ、この u , v で直線の集合の測度を以下のように定義して同様の議論を展開する。

$$m(Y) = \int_Y f(u, v) du dv \quad (2.6)$$

ただし座標の逆数としたのは計算が簡単なためで、逆数としなくても同じような議論が可能である。

直線が (1.3) で以下に変換されたとすると

$$u'x' + v'y' = 1$$

で、 u , v はつぎのようにあらわされる。

$$u = \frac{u' \cos \alpha + v' \sin \alpha}{1 - au' - bv'}, \quad v = \frac{v' \cos \alpha - u' \sin \alpha}{1 - au' - bv'} \quad (2.7)$$

そして $m(Y) = m(Y')$ と変数変換で

$$\begin{aligned} \int_Y f(u, v) du dv &= \int_{Y'} f(u', v') du' dv' = \int_{Y'} f(u', v') \frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} du' dv' \end{aligned}$$

であり、また (2.7) から次式が成り立つ。

$$(1 - au' - bv')^2 = (u'^2 + v'^2) / (u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} = (1 - au' - bv')^3 = \left(\frac{u'^2 + v'^2}{u^2 + v^2} \right)^{3/2}$$

よって

$$f(u, v) = f(u', v') \{ (u'^2 + v'^2) / (u^2 + v^2) \}^{3/2}$$

したがって

$$f(u, v) = c / (u^2 + v^2)^{3/2}$$

が導かれ、 $c=1$ において (2.6) はつぎのようになる。

$$m(Y) = \int_Y \frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} du dv \quad (2.8)$$

図2.7から u , v と p , θ との間には

$$u = \cos \theta / p, \quad v = \sin \theta / p$$

という関係があり

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, \theta)} \right| = \frac{1}{p^3}, \quad \frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} = p^3$$

だから結局 (2.8) は (2.5) に一致する。

ここで簡単な場合について例を示しておこう。前節の逆説を考えてみると、3つの場合では考え方の基礎にある直線の測度がそれぞれ違っている。そこで (a), (c) の場合について測度をそれぞれ m_a , m_c で表示すると、これらは明らかにつぎのようになっている。

$$\begin{aligned} m_a(X) &= \int_X p dp d\theta \\ m_c(X) &= \int_X dp d\theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

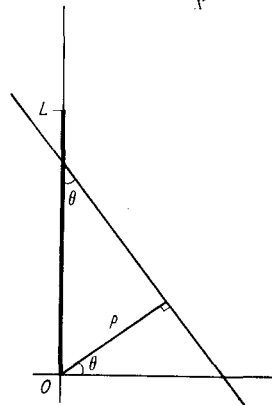


図 2.8

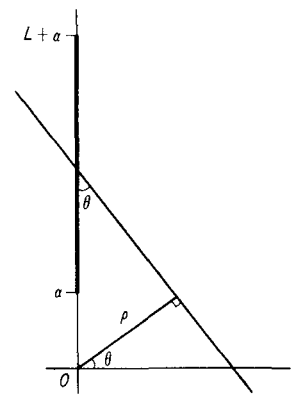


図 2.9

そこで図2.8のように一方の端点が原点と一致する長さ L の線分を考え、これをよぎる直線の集合を X 、またこの線分を図2.9のように α だけ原点から遠ざけたものをよぎる直線の集合を X' とし、以下測度の算出を試みる。図から明らかなように θ については $0 \leq \theta \leq \pi$ だけ考えればよく、ほかの場合は直線と線分が交わらない。

そして $p = l \sin \theta$ が成り立つから

$$\begin{aligned} m_a(X) &= \int_X p dp d\theta \\ &= \int_0^L \int_0^\pi l \sin^2 \theta d\theta dl \\ &= \frac{\pi L^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_a(X') &= \int_\alpha^{L+\alpha} \int_0^\pi l \sin^2 \theta d\theta dl \\ &= \frac{\pi}{4} (L^2 + 2\alpha L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_c(X) &= \int_X dp d\theta \\ &= \int_0^L \int_0^\pi \sin \theta d\theta dl \\ &= 2L \end{aligned}$$

$$m_c(X') = \int_\alpha^{L+\alpha} \int_0^\pi \sin \theta d\theta dl$$

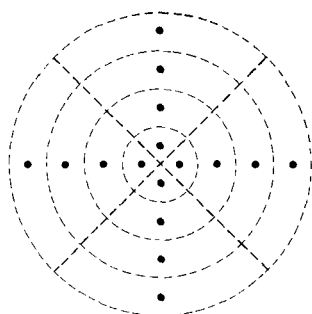


図 2.10
=2L

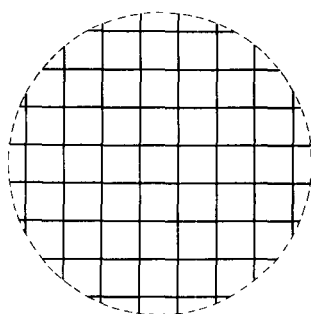


図 2.11

と計算できて

$$m_a(X) < m_a(X')$$

$$m_c(X) = m_c(X')$$

となる。 m_c は理論どおり不変の測度となっているが、 m_a は原点から離れたほうの測度が大いことがわかり、前節の図2.5、図2.6を比較して感覚的に述べたことを理論的に裏づけている。

さて1章における不変な測度(1.8)によって確率の定まる点は一様にランダムな点、あるいは略してランダムな点とよばれている。これと同じ意味あいでの(2.5)の測度によって確率の定まる直線が「ランダムな直線」とよばれている。つまり $x-y$ 平面におけるランダムな直線は $p-\theta$ 平面のランダムな点に対応するわけである。積分幾何学にもとづく論文ではこの「ランダムな直線(random lines)」または「ランダムに分布した(distributed at random)直線」という用語はすべて上述の意味で使用されているが、代表的なものとして文献[8]を、また邦訳のあるものとして文献[11]をあげておく。さらに図2.6よりも説得力のある図がのっている点で文献[12]もあげておこう。

ただし積分幾何学では「ランダム」という用語は使わないのが普通で、根幹は変換による不変な測度(図形に関する量)を求めることであり、これを基礎にすると幾何確率が求められる。したがって積分幾何学にとって幾何確率は例題であり、応用問題であるということができよう。

ここで(2.5)の感覚的説明を図によって行なってみる。わかりやすくするため「ランダム」な面を排除し、「一様性」に重点をおく。つまり有限個の規則的な点と直線で理論の不備をおかしつつ直観に訴える説明をしようというわけである。図2.10は円の中心を原点として直線におろした垂線の足を点で示したものである。 Δp , $\Delta \theta$ を点線のように考え、点線に囲まれた領域に1個ずつ規則的に点を配する。これは $p-\theta$ 平面での格子状の点に対応する。この垂線の足をもとに直線を描くと図

2.11のようになりこれは「一様」な直線といえるだろう。したがって図2.10で垂線の足を円内で一様に分布させると図2.11で円の周辺での直線の量が「多く」になってしまうことがこの2つの図からも推察できる。

今回は直線における不変な測度(2.5)の説明に大半を費やしてしまった。次回はこれをもとに応用のきく内容をもう少し簡潔に述べていくつもりである。(つづく)

参 考 文 献

- [1] Crofton, M. W. : On the theory of local probability, etc. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 158(1869), 181-199. (東大理学部物理学科図書室蔵)
- [2] Crofton, M. W. : Article "Probability". *Encyclopaedia Britannica*, 9th edn. vol. 19(1885).
- [3] Blaschke, W. : *Vorlesungen über Integralgeometrie* I, II. Teubener, Leipzig, (1936), (1937).
- [4] Santaló, L. A. : *Introduction to Integral Geometry*. Hermann, Paris(1953).
- [5] 栗田 稔 : 積分幾何学, 共立出版, (1957).
- [6] Romanov, V. G. : *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations*. Springer, Berlin, (1974).
- [7] Matheron, G. : *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley, New York, (1975).
- [8] Kendall, M. G. and Moran, P. A. P. : *Geometrical Probability*. Charles Griffin, London, (1963).
- [9] Harding, E. F. and Kendall, D. G. : *Stochastic Geometry*. John Wiley, London, (1974).
- [10] 増山元三郎 : 幾何学的調査法の話, オペレーションズ・リサーチ, No. 1, Vol. 1(1956).
- [11] Pielou, E. C. : *An Introduction to Mathematical Ecology*. John Wiley, New York, (1969). (邦訳)南雲仁一監訳, 数理生態学, 産業図書, (1974).
- [12] Bartlett, M. S. : The spectral analysis of line processes. *Proc. 5th Berkley Symposium*, Vol. III. University of California Press, Berkeley, (1967).

(こしづか・たけし 東京大学工学部都市工学科)