動的システムを考えるとき(すなわち $X\subset A^T$, $Y\subset B^T$) $\rho: C\times X\to Y$ を初期状態表現とよぶ．命題1によりすべてのシステムが初期状態表現を持つことがわかる．初期状態表現はどのような形のものでもよいというわけではなく，つぎの条件が成立することが必要である．

$$(\forall c\in C)(\forall x)(\forall x')(\forall t)(x|T^t=x'|T^t\to\rho(c,x)|\bar{T}^t=\rho(c,x')|\bar{T}^t) \tag{3.1}$$

ただし $\bar{T}^t=T^t\cup\{t\}$ である．(3.1)式を満たす初期状態表現を(強い意味で)因果的表現とよぶ．意味のあるシステム表現はすべて因果的である．一般にはすべてのシステム $S\subset X\times Y$ が因果的表現を持つわけではない[1]．それではどのようなシステムが因果的表現を持つかが問題となる．それに対して

命題 2[5,6] $S\subset X\times Y$ が出力完備なシステムとする．このとき S が因果的表現を持つための必要十分条件はつぎの条件が成立することである．

$$(\forall x)(\forall x')(\forall t)(x|T^t=x'|T^t\to S(x)|\bar{T}^t=S(x')|\bar{T}^t) \tag{3.2}$$

ただし $S(x)=\{y|(x,y)\in S\}$ である．この証明は長いのでここではふれない[5,6]．表現が因果的ではないということは，現在の出力が将来の入力に依存することを意味し，このような表現はシステムを取り扱うための表現としてはあまり意味を持たない．またわれわれが認識するシステムはすべて因果的である．

逆に言えば，命題2は，われわれが考えるべき一般システムは単に $X\times Y$ の部分集合ではなく(3.2)の条件を満足する関係であることを示している．以下因果的表現のみを考える．

2節で述べたように，状態表現というのはシステムの動作を状態遷移関数と出力関数で表現したものである．それをいま少し正確に定義しておく．各 t と $t'\geq t$ に対し，つぎのような関数

$$\phi_{tt'}: C\times X_{tt'}\to C \qquad \lambda_t: C\to B$$

を考える．システム $S\subset X\times Y$ の初期状態表現を $\rho: C\times X\to Y$ とする．このとき関数族の対 $(\{\phi_{tt'}|t,t'\in T\},\{\lambda_t|t\in T\})\equiv(\bar{\phi},\bar{\lambda})$ が S の状態表現であるというのは $(\bar{\phi},\bar{\lambda})$ がつぎの条件を満足することである．すべての $c\in C$, $x\in X$, t, t', $t''\in T$ に対し

$$\left.\begin{array}{ll}\text{i)} & \rho(c,x)(t)=\lambda_t(\phi_{0t}(c,x^t))\\ \text{ii)} & \phi_{tt''}(c,x_{tt''})=\phi_{t't''}(\phi_{tt'}(c,x_{tt'}),x_{t't''})\\ \text{iii)} & \phi_{tt}(c,x_{tt})=c\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

ただし $x_{tt''}|T_{tt'}=x_{tt'}$ かつ $x_{tt''}|T_{t't''}=x_{t't''}$ である．i)の条件は各時刻での出力の値がそのときの状態によって表現されることから当然成立すべきことである．ii)は状態の composition property とよばれるもので，状態はシステムの歴史を完全に表現していることを示し，このような性質が成立することから動的な最適化手法(たとえば DP や最大原理)が成立する．iii)は表現の consistency を示すものである．このような表現が一般システムに対し存在するかどうかを考えてみる．そのために集合 $C_t=C\times X^t(t\in T)$ に対して関数 $\phi_{tt'}: C_t\times X_{tt'}\to C_{t'}$ および $\lambda_t: C_t\to B$ をつぎのように導入する．

$$\phi_{tt'}((c,x^t),x_{tt'})=(c,x^t\cdot x_{tt'})$$

$$\lambda_t((c,x^t))=\rho(c,x^t\cdot x_t')(t)\quad(x_t'\text{ は任意})$$

ただし $x^t\cdot x_{tt'}$ は連接(concatenation)という演算を示し

$$x^t\cdot x_{tt'}(\tau)=\begin{cases}x^t(\tau) & \text{もし } \tau\in T^t\\ x_{tt'}(\tau) & \text{もし } \tau\in T_{tt'}\end{cases}$$

である．λ_t が上記のように定義できるのは ρ が因果的表現であるからである．$\phi_{tt'}$ と λ_t は時間に依存している集合 C_t 上に定義されているので状態表現ではない．状態表現を定義するために集合 $\hat{C}=\bigcup_t C_t$ を考えたうえで導入した $\hat{\phi}_{tt'}$ と λ_t から関数 $\hat{\phi}_{tt'}: \hat{C}\times X_{tt'}\to\hat{C}$ と $\hat{\lambda}_t: \hat{C}\to B$ をつぎのように定義する．

$$\hat{\phi}_{tt'}(c,x_{tt'})=\begin{cases}\phi_{tt'}(c,x_{tt'}) & \text{もし } c\in C_t\\ \phi_{tt'}(\hat{c}_t,x_{tt'}) & \text{もし } c\notin C_t\end{cases}$$

$$\hat{\lambda}_t(c)=\begin{cases}\lambda_t(c) & \text{もし } c\in C_t\\ \lambda_t(\hat{c}_t) & \text{もし } c\notin C_t\end{cases}$$

ただし $\hat{c}_t\in C_t$ は各時刻 t に対し任意に固定された要素である．このように定義された関数 $\hat{\phi}_{tt'}$ と $\hat{\lambda}_t$ がシステム S の状態表現になっている．

実際 $(x,y)\in S$ とすると，初期状態表現の定義からある $c\in C$ に対し $y=\rho(c,x)$ になり，$y(t)=\rho(c,x)(t)=\lambda_t(\phi_{0t}(c,x^t))=\hat{\lambda}_t(\hat{\phi}_{0t}(c,x^t))$ を得る．状態遷移関数 $\hat{\phi}_{tt'}$ が(3.3)の満足することも直接計算することでたしかめられる．

書評者募集

現在つぎの5冊が学会に届いております．書評ご希望の方はお申し出ください．

1) 「整数計画法入門」
D. R. プレン，C. マクミラン，Jr.＝共著
黒田充・豊田吉顕・田部勉・馬渡鎮夫＝共訳
培風館

2) 「Men and Machines」
Hywel Murrell 著 Methven 出版

3) 「Motivation at Work」
Hywel Murrell 著 Methven 出版

4) 「分枝過程」〈数理解析とその周辺12〉
セバスチャーノフ著　長沢正雄訳　産業図書

5) 「都市工学読本——都市を解析する——」
奥平耕造　彰国社

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．